

Interactive optimization tool for the optimum design of helical extension springs

Carlos H. Galeano, Carlos A. Duque y Andrés Tovar

*Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica, Universidad Nacional de Colombia.
Carrera 30 45-03, Edificio 453, Oficina 401, Bogotá, Colombia
{chgaleanou, caduqued, atovarp}@unal.edu.co*

Abstract

This work presents an interactive computer tool for the optimal design of helical extension springs. The developed algorithm incorporates all design considerations used in the manufacturing industry and specialized design manuals. All these considerations are used to create a novel optimum design formulation. The flexibility of this software allows the user to characterize a particular design problem, through the selection of the right constraints for each case. The optimization model includes sixteen constraints (linear and nonlinear) derived from different failure criteria and designs and manufacture recommendations. This nonlinear problem is solved using sequential quadratic programming in Matlab. The characteristics of this tool are showed through development of a benchmark problem. The free software developed in this work is available at <http://www.unal.edu.co/optimun/resortes/>.

Key words: Helical springs, mechanical design, sequential quadratic programming, parametric design optimization.

Herramienta computacional interactiva para el diseño óptimo de resortes helicoidales de tracción

Resumen

Este trabajo presenta una herramienta computacional interactiva, libre y de código abierto, para el diseño óptimo de resortes helicoidales de tensión. El algoritmo propuesto incorpora todas las consideraciones de diseño usadas en la industria manufacturera y referenciadas en los manuales especializados. Estas consideraciones han sido usadas para crear una nueva formulación apropiada para el diseño óptimo de resortes. La flexibilidad del software permite al usuario la caracterización del problema particular de diseño a través de la selección de las restricciones adecuadas para cada caso. El modelo de optimización incluye dieciséis restricciones (lineales y no lineales) derivadas de distintos criterios de falla y recomendaciones para diseño y manufactura. Este problema no lineal es solucionado mediante programación secuencial cuadrática en Matlab. Las características de esta herramienta se muestran a través del desarrollo de un problema tipo. El software se encuentra disponible en <http://www.unal.edu.co/optimun/resortes/>.

Palabras clave: Resortes helicoidales, diseño de elementos de máquinas, programación secuencial cuadrática, diseño óptimo paramétrico.

1. Introducción

El diseño de elementos mecánicos es un proceso que se caracteriza por la búsqueda de los parámetros propios del producto a diseñar, a

partir de algunas condiciones o requerimientos iniciales. Estos últimos, envuelven consideraciones de resistencia del material, rigidez, deformación, peso, así como restricciones dimensionales, de costos y limitaciones de manufactura, entre

otras. A partir de requerimientos geométricos, de rigidez y de carga, el diseño de resortes helicoidales de tracción es un problema que normalmente implica la determinación de cuatro parámetros independientes: el número de espiras activas N_a , el diámetro medio del resorte D , el diámetro de alambre d y la carga inicial P_i [1-3]. Tradicionalmente, estos cuatro parámetros se determinan por ensayo y error, de forma que sus valores satisfagan simultáneamente todas las restricciones o consideraciones de diseño. Además de ser un proceso tedioso e ineficiente, no hay garantía de conseguir el diseño más conveniente para la necesidad en particular, como por ejemplo, la configuración del resorte más pequeño, más liviano, etc.

Comercialmente hay disponibles programas que permiten agilizar el proceso de diseño. Entre los programas más conocidos se encuentran: *Compresión Spring Software*[®] del Institute of Spring Technology, IST[®] [4], *FEDI*[®] de Hexagon[®] [5], *MasterSpring*[®] [6], *Advanced Spring Design Software ASDS*[®] de Spring Manufacturers Institute SMI[®] [7], *Quick Spring Designer*[®] de Prodmor [8], *SpringCAD*[®] de Bare Hill Software Inc. [9], *Free Spring Design Software* de Mid-West Spring and Stamping [10], *Coil Spring Calculator* de Spring Engineers of Houston Ltda [11], y *Spring Design Software* del Institute of Spring Technology [12]. Si bien estos productos son herramientas útiles en el diseño de resortes, no son herramientas que permitan realizar diseño óptimo de resortes de tracción. En otras palabras, no permiten al usuario seleccionar una función a maximizar o minimizar y posteriormente encontrar el valor óptimo mediante la variación metódica de variables de diseño en una región de diseño factible acotada por restricciones geométricas y funcionales.

El presente artículo expone el problema del diseño de resortes helicoidales a tracción, bajo el enfoque de un problema de optimización paramétrica. Describe el desarrollo de un algoritmo de optimización en entorno de Matlab[®], empleando el método de programación cuadrática secuencial (SQP), el cual permite encontrar fácil y eficientemente los parámetros óptimos de un resorte helicoidal de tracción. Este algoritmo ha sido implementado un software de código libre y abierto que reúne las consideraciones de diseño

planteadas por diferentes autores y manuales de diseño especializados. El problema se centra en la adaptación de una metodología de diseño clásico a un algoritmo de diseño óptimo. De esta forma, el texto recoge las expresiones de la literatura de diseño clásico y las adaptadas de forma original como funciones objetivo y restricciones funcionales y geométricas que definen el espacio factible del problema de diseño.

2. Diseño óptimo de resortes helicoidales a tracción

El proceso de diseño de resortes helicoidales de tracción parte de requerimientos de carga y rigidez, además de consideraciones relacionadas con el material, la geometría del alojamiento en el cual se ubicará el resorte y criterios de diseño propios del problema particular. Con el fin de plantear el proceso de diseño óptimo de un resorte, dichos requerimientos iniciales deben ser traducidos en términos de restricciones matemáticas que definan el espacio factible. Estas restricciones pueden ser expresadas como

$$1 - \frac{d^4 G \delta_t}{8 D^3 N_a (P_t - P_p)} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1.05 D + d}{D_o} - 1 \leq 0 \quad (2)$$

$$1 - \frac{0.95 D - d}{D_i} \leq 0 \quad (3)$$

donde las variables independientes son el diámetro medio del resorte D , es el diámetro de alambre d y el número de espiras activas N_a . Así mismo, algunos parámetros típicos asociados con los requerimientos iniciales del diseño de un resorte son: la precarga del resorte P_p , la carga de trabajo P_t , la deflexión de trabajo δ , el diámetro máximo del alojamiento en el que se ubicará el resorte D_o y el diámetro mínimo del vástago en el que será insertado el resorte D_i . En la Figura 1 se ilustra el significado de estas variables. La ecuación (1) condiciona los valores de las variables independientes, de modo que todo diseño factible cumpla con el valor requerido para la constante de rigidez del resorte. Las ecuaciones (2) y (3) garantizan que los valores del diámetro exterior e interior del

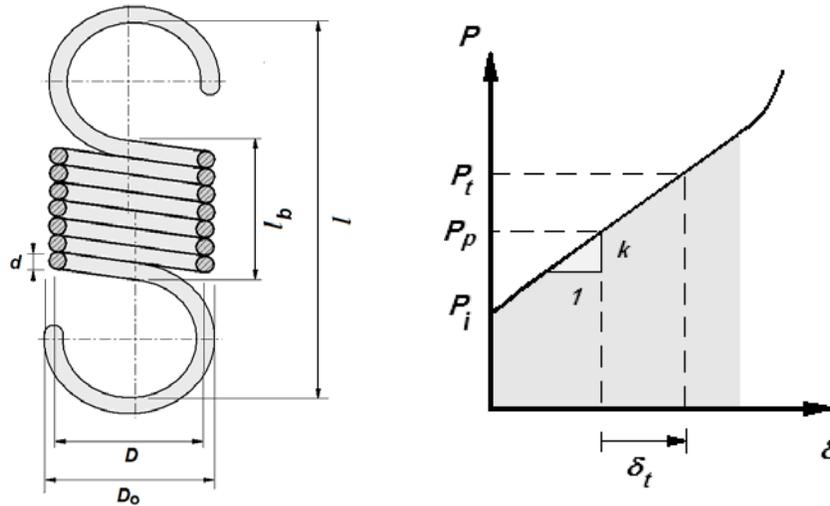


Figura 1. Requerimientos iniciales de diseño.

resorte diseñado guarden cierta holgura respecto a los diámetros del alojamiento respectivo. La holgura de $0,05D$ existente entre los diámetros exterior e interior del resorte y los diámetros del alojamiento y/o del vástago es adoptada como una recomendación de diseño comúnmente utilizada [13, 14].

2.1. Restricciones de Resistencia

Además de las condiciones de diseño expresadas en (1), (2) y (3), se deben satisfacer requerimientos asociados con los esfuerzos inducidos en el elemento con cargas de trabajo, así como con la resistencia propia del material del alambre. A diferencia de los resortes helicoidales de compresión, en los resortes de tracción no solo se debe garantizar la resistencia en las fibras críticas del cuerpo sino la resistencia de las fibras de los extremos (ganchos) del resorte, las cuales generalmente representan los puntos más críticos de estos elementos mecánicos. Una primera restricción puede ser planteada considerando el requerimiento de un factor de seguridad, a fluencia en las fibras del cuerpo, igual o superior a un valor requerido por el diseñador:

$$1 - \frac{1,36Ad^{b+3}}{4 \cdot FS \cdot P_t(2D + d)} \leq 0 \quad (4)$$

donde FS es el valor del factor de seguridad a la fluencia mínimo requerido por el diseñador, en tanto que A y b son los coeficientes que definen el

valor del esfuerzo último a tracción del material (S_{ut}) en función del diámetro del alambre ($S_{ut} = Ad^b$). Shigley [15] presenta una tabla con los valores de estos coeficientes para los materiales comúnmente empleados para la fabricación de resortes.

Considerando la condición fluencia en las fibras de los extremos del resorte, se necesita asegurar que el diseño cumpla con el requerimiento de resistencia para la fibra número uno (Figura 2). Es decir

$$1 - \frac{0,75Ad^b}{\left[\frac{4 \left(\frac{D}{d} \right)^2 - \frac{D}{d} - 1}{4 \frac{D}{d} \left(\frac{D}{d} - 1 \right)} \right] \frac{16P_t D}{\pi d^3} + \frac{4P_t}{\pi d^2}} \leq 0 \quad (5)$$

donde FS_1 es el valor del factor de seguridad mínimo a la fluencia requerido por el diseñador en la fibra número uno del gancho extremo del resorte. De acuerdo con Norton [13], la condición de resistencia a la fluencia en la fibra dos del resorte se cumple implícitamente si se satisfacen las restricciones (4) y (5).

Es importante aclarar que esta, como todas las expresiones de este documento relacionadas con los ganchos extremos del resorte, fue deducida considerando que dichos ganchos se conforman doblando dos espiras del cuerpo guardando un radio de doblez R_2 (Figura 2). Por otro lado, si la carga de trabajo aplicada sobre el resorte es de na-

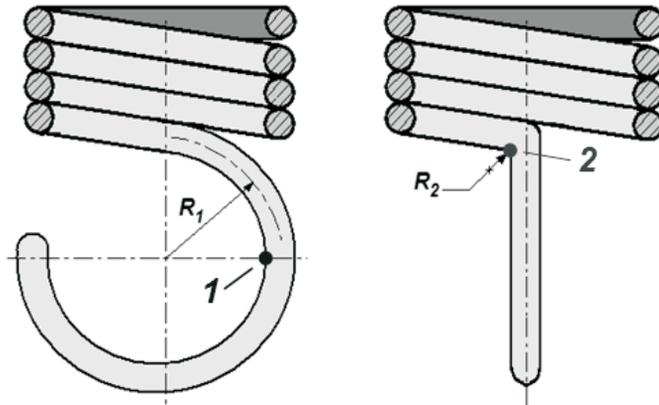


Figura 2. Fibras críticas en los extremos del resorte.

turalidad cíclica, se debe verificar adicionalmente la resistencia a la fatiga en las fibras del material. Siguiendo el criterio de Goodman, con el fin de garantizar un valor mínimo del factor de seguridad a la fatiga (FS_f), considerando un número de ciclos de carga en las fibras del cuerpo superior a 10^6 , se necesita satisfacer la restricción que

$$1 - \frac{S'_{es}K_1}{FS_f[S'_{es}K_2 + K_3]} \leq 0 \quad (6)$$

donde S'_{es} es el límite de resistencia a la fatiga, el cual para alambres de acero en resortes sin granallar tiene un valor $S'_{es} = 45$ ksi (310 MPa) y de $S'_{es} = 67,5$ ksi (465 MPa) para resortes granallados [13]. Adicionalmente, los términos K_1 , K_2 y K_3 se definen de acuerdo con

$$K_1 = \left[\frac{0,67\pi Ad^{b+3}}{D} - \left(8 + \frac{4d}{D}\right)P_p \right] \quad (7)$$

$$K_2 = \left[\left(4 + \frac{2d}{D}\right)(P_t + P_p) - \left(8 + \frac{4d}{D}\right)P_p \right] \quad (8)$$

$$K_3 = (0,95Ad^b - S'_{es}) \left(\frac{4D - d}{D - d} + \frac{2,46d}{D} \right) (P_t - P_p) \quad (9)$$

Además de garantizar una condición de resistencia en las fibras del cuerpo del resorte, se debe cumplir una condición similar para las fibras más críticas en los ganchos extremos del elemento. Por tanto, desde el punto de vista de la fatiga, la fibra número uno de los ganchos del resorte debe cumplir que

$$1 - \frac{S'_{es}K_5}{FS_{f1}[(0,82Ad^b + 0,14S'_{es})K_6]} \leq 0 \quad (10)$$

donde FS_{f1} es el factor de seguridad mínimo requerido en la fibra número uno del gancho del extremo del resorte y

$$K_4 = \left(\frac{4\left(\frac{D}{d}\right)^2 - \frac{D}{d} - 1}{4\frac{D}{d}\left(\frac{D}{d} - 1\right)} \right) \quad (11)$$

$$K_5 = \left[Ad^b - 16K_4 \frac{P_p D}{\pi d^3} - \frac{4P_p}{\pi d^2} \right] \quad (12)$$

$$K_6 = \left[8K_4 \frac{(P_t - P_p)D}{\pi d^3} + \frac{2(P_t - P_p)}{\pi d^2} \right] \quad (13)$$

Para condiciones de carga cíclica, se requiere verificar las fibras 1 y 2 del gancho, por lo tanto también se debe asegurar que la fibra dos del extremo del resorte satisfaga que

$$1 - \frac{S'_{es}K_8}{FS_{f2}[3,79Ad^b[K_7(P_t - P_p)D]]} \leq 0 \quad (14)$$

donde FS_{f2} es el factor de seguridad mínimo requerido en la fibra número dos del gancho del extremo del resorte, en tanto que

$$K_7 = \left(\frac{8\frac{R_2}{d} - 1}{8\frac{R_2}{d} - 4} \right) \quad (15)$$

$$K_8 = [0,67\pi Ad^{b+3} - 8K_7P_p D] \quad (16)$$

Otra característica que diferencia el diseño de resortes de tracción, respecto a los resortes de compresión, es la existencia de una carga inicial en el resorte (P_i), la cual aparece cuando se enrollan las espiras de forma apretada. La existencia de esta carga inicial impone la definición de una nueva variable independiente, así como el cumplimiento de dos nuevas condiciones de diseño. La primera condición está relacionada con la cantidad de precarga útil requerida para separar las espiras, la cual se define por

$$\frac{P_i}{0,9P_p} - 1 \leq 0 \quad (17)$$

La segunda, relacionada con el esfuerzo inducido por esta carga inicial (τ_i), requiere que dicho esfuerzo deba encontrarse dentro de un rango práctico. Dicho rango, según Norton [13], debe limitarse a la región definida entre las dos curvas de la Figura 3. Los valores máximo y mínimo para el esfuerzo inicial (τ_i) se muestran en la gráfica de la Figura 3, como una función del valor del índice del resorte (D/d).

Estas curvas, ajustadas y escritas en forma de restricciones en Sistema Internacional, pueden expresarse como

$$\frac{193,20 - 21,14\left(\frac{D}{d}\right) + 1,02\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 0,02\left(\frac{D}{d}\right)^3}{\left(1 + \frac{d}{2D}\right) \frac{8 \cdot 10^{-6} P_i D}{\pi d^3}} \quad (18)$$

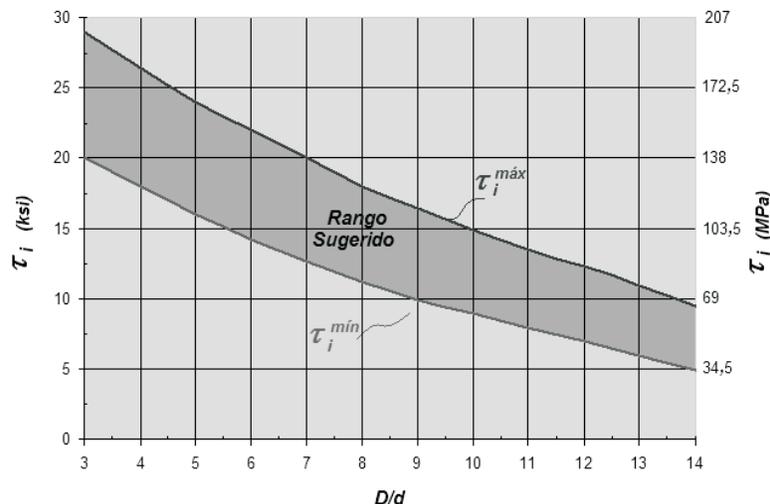


Figura 3. Valores típicos de esfuerzos por carga inicial para resortes de tracción.

$$1 - \frac{265,27 - 24,73\left(\frac{D}{d}\right) + 1,1\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 0,03\left(\frac{D}{d}\right)^3}{\left(1 + \frac{d}{2D}\right) \frac{8 \cdot 10^{-6} P_i D}{\pi d^3}} \quad (19)$$

donde P_i está expresada en [N], mientras D y d están dadas en [m].

2.2 Restricciones de rigidez

Además de la restricción expresada en (1), se debe plantear una restricción adicional asociada con la rigidez del resorte. Aunque para el caso de resortes de tracción la estabilidad (o pandeo) no es un fenómeno relevante, si lo es la resonancia. Desde este punto de vista, la frecuencia natural del resorte debe ser condicionada si se trata del caso de una carga repetitiva. De este modo es importante asegurar que la frecuencia natural del resorte sea superior a trece veces la frecuencia de carga [13]. Esto es

$$1 - \frac{0,15d}{\pi F_c N_a D^2} \sqrt{\frac{Gg}{32\gamma}} \leq 0 \quad (20)$$

donde f_c es la frecuencia de carga, g es la constante de gravedad y γ es el peso específico del material.

2.3 Restricciones geométricas

Estas restricciones se relacionan con el valor del índice del resorte. De acuerdo con recomendaciones de diseño, resortes con índices superiores a 12 serán elementos poco estables, mientras que resortes con índices inferiores a 4

serán elementos difícilmente conformables [15]. SAE [16] recomienda un rango para los índices de resorte entre 4 y 16. Asumiendo el caso más conservador, estas restricciones pueden expresarse como

$$\frac{D}{12d} - 1 \leq 0 \tag{21}$$

$$1 - \frac{D}{4d} \leq 0 \tag{22}$$

Por otro lado, si se considera la estandarización de los diámetros de alambre en virtud del tipo de material escogido para el resorte, se tiene límites para los valores máximo y mínimo de los diámetros comerciales disponibles de acuerdo al tipo de alambre seleccionado. La Figura 4 muestra una gráfica con los valores límites para los diámetros comerciales de alambres para resorte. Resulta necesario aclarar que un planteamiento más cercano a la realidad consideraría la variable (d) del tipo discreto y no continuo, como se plantea en el presente trabajo. No obstante, esta consideración se sale del alcance de la herramienta de optimización empleada y será incorporada en trabajos posteriores.

Con el fin de tener en cuenta los límites extremos en los valores comerciales del diámetro del alambre, son introducidas las siguientes restricciones,

$$\frac{d}{d_{\max}} - 1 \leq 0 \tag{23}$$

$$1 - \frac{d}{d_{\min}} \leq 0 \tag{24}$$

Para ciertos diseños, además de las dimensiones del alojamiento y/o del vástago donde se insertará el resorte, se requiere limitar la longitud máxima natural del elemento. Esto es

$$\frac{N_a d + 2D - d}{l_{\max}} - 1 \leq 0 \tag{25}$$

donde l_{\max} es el valor de longitud libre máxima que puede tomar el resorte diseñado.

2.4. Función objetivo

Un requerimiento común en optimización de resortes es obtener un valor mínimo de masa [1, 2, 17-20]. Sin embargo, se pueden plantear



Figura 4. Rangos de diámetros comerciales de alambres para resortes.

condiciones de máxima vida a la fatiga, mínima altura libre, máximo factor de seguridad, mínimo volumen de empaquetamiento, o cualquier otro requerimiento que pueda ser expresado en función de las variables independientes del problema.

3. Sistematización del modelo desarrollado

Hasta este punto se ha definido el problema de diseño de un resorte helicoidal de tracción como un problema de optimización en términos de cuatro variables independientes (N, D, d, P_i), una función objetivo y diecisiete restricciones. Dentro de estas restricciones una es una ecuación no lineal y dieciséis inecuaciones, de las cuales siete son de tipo lineal y las restantes no lineales. Por eso, resulta necesario emplear técnicas de optimización no lineal. En diversos trabajos, como en [21] y [22], se plantean diferentes técnicas numéricas para la solución de problemas de optimización no lineal en diseño mecánico, y aunque en muchos casos estos problemas son solucionados con métodos heurísticos, los métodos basados en gradiente representan una alternativa común para obtener los parámetros de diseño buscados. Para la solución del problema, se adoptó como método la Programación Cuadrática Secuencial (SQP), dada la gran capacidad de esta técnica para la resolución de casos con restricciones no lineales, como muchas de las expresiones encontradas dentro del presente trabajo. En particular, se empleó la función *fmincon* del *Optimization Toolbox* de Matlab 7.0[®], en la cual se usa el método BFGS para la actualización

del Hessiano de la aproximación cuadrática. Esta función permite la localización de mínimos de funciones objetivo multivariable, limitadas por medio de restricciones de igualdad e desigualdad, lineales y no lineales. La función *fmincon* ofrece la posibilidad de tratar todas estas restricciones por separado incrementando la eficiencia computacional de la herramienta. Resulta importante aclarar que no es posible asegurar que el valor crítico alcanzado con el algoritmo de optimización empleado corresponda a un mínimo global. Esta limitante, inherente a todas las técnicas basadas en gradiente, puede ser superada implementando algún método directo (también llamado de orden cero) tal como: algoritmos genéticos [23, 24], colina de hormigas [25], recocido simulado [26], optimización estocástica [27], tabu search [28], algoritmos genéticos interactivos [29], entropía cruzada [30], optimización extrema [31] y estrategias de evolución [32], entre otros. Sin embargo, estos métodos resultan inapropiados debido al elevado costo computacional que conllevan.

El algoritmo de solución fue implementado en Matlab 7.0[®] mediante el uso de ventanas gráficas, las cuales agilizan la interacción con el usuario. El software desarrollado, *Diseño Óptimo de Resortes Helicoidales (DORH)*, incorpora todas las consideraciones necesarias para el diseño de resortes helicoidales, tanto de tracción como de compresión, y emplea un algoritmo de búsqueda basado en gradiente para la determinación de las características óptimas. Por restricciones de espacio, se presenta aquí únicamente el módulo para el diseño de resortes de tracción, el software completo puede ser descargado en <http://www.unal.edu.co/optimun/resortes/>. La principal ca-

racterística del software *DORH* es la flexibilidad, ya que permite al usuario jugar con todas las opciones y consideraciones de diseño implementadas, de modo que el mismo logre configurar el problema de diseño particular. En la Figura 5 se muestra, para el módulo de resortes de tracción, el esquema de la interfaz gráfica desarrollada para el ingreso de estas restricciones.

De acuerdo con la selección de las características particulares del problema de diseño estudiado, el algoritmo solicita al diseñador los parámetros de entrada relevantes y construye un archivo de texto con las ecuaciones de restricción involucradas. Este proceso se realiza también a través de una interfaz gráfica, la cual se muestra en la Figura 6. El software *DORH* permite al usuario la selección de la función objetivo deseada (masa o volumen de empaquetamiento), o de otra forma escribir la misma en términos de las variables independientes. Finalmente el usuario fija las tolerancias de convergencia asociadas al algoritmo iterativo del comando *fmincon* y ejecuta la búsqueda del punto óptimo. Dado que el algoritmo *SQP* implementado no garantiza la convergencia en un mínimo global, la selección del punto inicial de la iteración es un factor decisivo en la búsqueda del punto crítico en la región factible. Si el algoritmo converge satisfactoriamente en un punto crítico, el software *DORH* muestra, por medio de una ventana gráfica, como la ilustrada en la Figura 7, los valores de las variables independientes en dicho punto, además de las características más importantes del resorte diseñado. Una vez terminado el proceso, un completo informe del elemento diseñado puede ser generado en formato HTML.

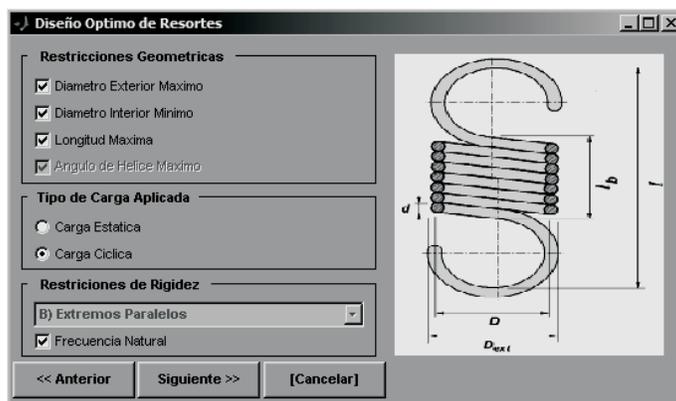


Figura 5. Ventana para la selección de las restricciones relevantes.

4. Caso de estudio

Como procedimiento de validación y prueba de la metodología de diseño óptimo presentada y del software *DORH*, se plantea la solución a un problema de diseño con los siguientes requerimientos iniciales: carga de tipo cíclico, magnitud de precarga $P_p = 1,5 \text{ lb}$, carga de trabajo $P_t = 5 \text{ lb}$, factor de seguridad mínimo de 1,5 para condiciones de resistencia mecánica en cualquiera de los puntos críticos (fluencia y fatiga), frecuencia de carga de 1 Hz, deflexión de trabajo $\delta_t = 0,197 \text{ in}$, diámetro exterior del resorte no superior a $9/16 \text{ in}$, longitud máxima no debe sobrepasar $1 \frac{1}{2} \text{ in}$, emplear espiras completas en los extremos y radios de dobléz de las mismas iguales a $3/16 \text{ in}$, temperatura de trabajo promedio 68°F , debido a restricciones en el inventario del material se solicita un diseño empleando alambre estirado en frío. Se necesita encontrar la configuración de resorte que satisfaga las anteriores condiciones y que garantice la mínima masa posible para la fabricación del mismo. De esta forma, la función objetivo del problema quedará definida por:

$$F(N_a, D, d) = \frac{\rho \pi^2 N_a D d^2}{4} \tag{26}$$

donde ρ es la densidad del material del alambre. De otro lado, las restricciones de diseño a emplear serán las siguientes:

- Restricciones asociadas al valor mínimo y máximo en el diámetro de alambre y el índice del resorte:

$$1 - 50d \leq 0 \tag{27}$$

$$2d - 1 \leq 0 \tag{28}$$

$$\frac{D}{12d} - 1 \leq 0 \tag{29}$$

$$1 - \frac{D}{4d} \leq 0 \tag{30}$$

- Restricciones relacionadas con el valor máximo valor permisible para el diámetro exterior y la máxima longitud libre admisible del resorte:

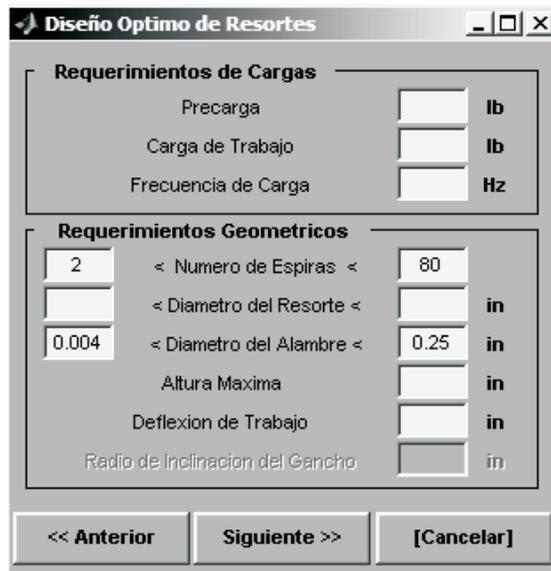


Figura 6. Ventana para la entrada de parámetros.

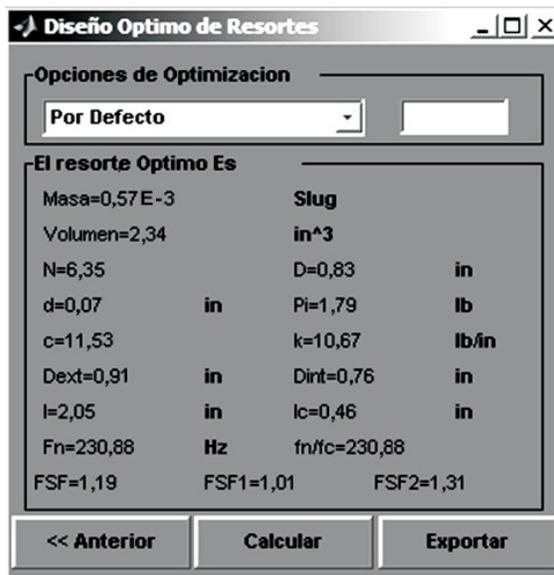


Figura 7. Ventana para la presentación de los resultados.

$$\frac{16,8D + 16d}{9} - 1 \leq 0 \tag{31}$$

$$\frac{2N_a d + 4D - 2d}{3} - 1 \leq 0 \tag{32}$$

- Restricciones asociadas al valor de la constante de rigidez y la mínima frecuencia natural requerida:

$$1 - \frac{80910,71d^4}{D^3 N_a} = 0 \quad (33)$$

$$1 - \frac{1081,47d}{N_a D^2} \leq 0 \quad (34)$$

- Restricciones que definen el mínimo y máximo valor admisible para el esfuerzo inicial:

$$\frac{28 - 3,06\left(\frac{D}{d}\right) + 0,15\left(\frac{D}{2}\right)^2 - 3,3 \cdot 10^{-3}\left(\frac{D}{d}\right)^3}{\left(1 + \frac{d}{2D}\right) \frac{8 \cdot 10^{-3} P_t D}{\pi d^3}} - 1 \leq 0 \quad (35)$$

$$1 - \frac{38,44 - 3,58\left(\frac{D}{d}\right) + 0,16\left(\frac{D}{2}\right)^2 - 3,6 \cdot 10^{-3}\left(\frac{D}{d}\right)^3}{\left(1 + \frac{d}{2D}\right) \frac{8 \cdot 10^{-3} P_t D}{\pi d^3}} \leq 0 \quad (36)$$

- Restricciones relacionadas con el mínimo factor de seguridad por fluencia en el cuerpo del resorte y en la fibra número uno del gancho extremo del resorte:

$$1 - \frac{6165,33d^{2,81}}{2D + d} \leq 0 \quad (37)$$

$$1 - \frac{68000d^{-0,19}}{\left[\frac{4\left(\frac{D}{d}\right)^2 - \frac{D}{d} - 1}{4\frac{D}{d}\left(\frac{D}{d} - 1\right)} \frac{80D}{\pi d^3} + \frac{20}{\pi d^2} \right]} \leq 0 \quad (38)$$

- Restricciones relacionadas con el mínimo factor de seguridad por fatiga en las fibras del cuerpo del resorte, y en las fibras del gancho:

$$1 - \frac{\frac{4}{3} \left[\frac{286261d^{2,81}}{D} - \frac{6d}{D} - 12 \right]}{\left(28 + \frac{14d}{D}\right) + \left(\frac{4D-d}{D-d} + \frac{2,46d}{D}\right) (20,03b^{-0,19} - 7)} \leq 0 \quad (39)$$

$$1 - \frac{\frac{4}{3} \left[286261,92d^{2,81} - 12 \left(\frac{\frac{3}{2d} - 1}{\frac{3}{2d} - 4} \right) D \right]}{80,18d^{-0,19} \left[\left(\frac{\frac{3}{2d} - 1}{\frac{3}{2d} - 4} \right) D \right]} \leq 0 \quad (40)$$

$$1 - \frac{\frac{4}{3} \left[136000d^{-0,19} - 7,64 \left(\frac{4\left(\frac{D}{d}\right)^2 - \frac{D}{d} - 1}{4\frac{D}{d}\left(\frac{D}{d} - 1\right)} \right) \frac{D}{d^3} + \frac{1,91}{d^2} \right]}{(4,93d^{-0,19} + 0,28) \left[8,91 \left(\frac{4\left(\frac{D}{d}\right)^2 - \frac{D}{d} - 1}{4\frac{D}{d}\left(\frac{D}{d} - 1\right)} \right) \frac{D}{d^3} + \frac{2,23}{d^2} \right]} \leq 0 \quad (41)$$

Como punto inicial para la solución del modelo se toma $N_a = 10$ espiras, $D = 0,5$ in, $d = 0,35$ in y $P_t = 1lb$, y empleando el método SQP implementado en la función *fmincon* de Matlab®, se requirieron 11 iteraciones para la convergencia del algoritmo. El valor de las coordenadas alcanzadas para el punto crítico se muestra en la Tabla 1. Al verificar estos valores en las restricciones empleadas, se encuentra que solo una de estas se encuentra activa en el punto solución, se trata de la restricción asociada al factor de seguridad a la fatiga en la fibra número uno del gancho del resorte. Este resultado está acorde a lo sugerido por diversos autores como Norton [13], Mott [14] y Shigley [15] en cuanto a que el mayor esfuerzo en un resorte de tracción, con argollas conformadas por el doblado de las espiras extremas, se localiza en la fibra uno, la cual experimenta cargas de tipo flector. Por lo anterior, es de esperarse que en este punto, el factor de seguridad sea la menor razón, de las calculadas mediante las expresiones (39), (40) y (41). En otras palabras, se espera que la restricción asociada con este factor de seguridad controle de forma efectiva la localización del punto crítico.

5. Conclusiones

Se logró el desarrollo de un algoritmo que permite la obtención del diseño óptimo de un resorte helicoidal de tracción, teniendo en cuenta requerimientos y consideraciones de diseño reales. Se construyeron todas las expresiones que

Tabla 1
Valores óptimos obtenidos para el diseño del resorte de compresión

N_a	D	d	P_i
6,83 espiras	0,44 in	0,05 in	1,26 lb

restringen la zona factible del problema de optimización presentado, incluyendo restricciones geométricas (longitud máxima, diámetros límites interior y exterior, índice de resorte, diámetros límites estandarizados para el alambre), así como restricciones de resistencia del material (para condiciones de fluencia y fatiga) y de rigidez del resorte (constante de rigidez y frecuencia natural). El modelo de optimización construido, cuenta con un total de diecisiete restricciones, expresadas mediante cuatro variables independientes: el número de espiras, el diámetro medio del resorte, el diámetro de alambre y la carga inicial. Para la sistematización del modelo creado, se elaboró un código en Matlab[®], el cual permite al diseñador la selección de las restricciones pertinentes, además del ingreso de los requerimientos iniciales y la solución del mismo empleando programación cuadrática secuencial (SQP). Las pruebas realizadas al software desarrollado (Diseño Óptimo de Resortes Helicoidales DORH) permitieron probar la operatividad del programa y la utilidad del mismo al momento de diseñar de forma rápida y eficiente este tipo de elementos. Se plantean dos aspectos importantes sobre los cuales trabajar para las versiones posteriores. El primero relacionado con la naturaleza discreta de dos de las variables independientes del problema, el diámetro de alambre y el número de espiras activas. La primera esta limitada a los valores comerciales de dichos diámetros y la segunda a la exactitud lograda con tecnología empleada para el arrollado de los resortes, la cual normalmente se encuentra limitada a $\frac{1}{4}$ de vuelta [13]. Se plantea entonces el desarrollo de un algoritmo de optimización para el diseño de resortes, el cual permita el trabajo con variables tanto discretas como continuas. El segundo aspecto a trabajar, en versiones posteriores, contempla la implementación de un algoritmo de solución, basado por ejemplo en algoritmos genéticos, el cual permita encontrar mínimos globales dentro de la región factible, con el fin de eliminar la dependen-

cia del éxito del algoritmo del punto de inicio de las iteraciones.

Referencias

1. Paredes M., Sartor M., Masclet C.: "An optimization process for extensión spring design". *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 191, (2002), 783-797.
2. Paredes M., Sartor M., Masclet C.: Obtaining an optimal compression spring design directly from a user specification. *Proc. Instn. Mech. Engrs.* Vol 216, Part B: J Engineering Manufacture (2002), 419-428.
3. Metwalli S., Radwan A., Elmeligy A.: CAD and optimization of helical torsión springs. *Proceedings of the Computers in Engineering Conference.* (1994), 767-773.
4. IST[®] <http://www.istec.demon.co.uk> (Institute of Spring Technology, Sheffield).
5. Hexagon[®] <http://www.hexagon.de> (Industriesoftware GmbH, Kirchheim/Teck).
6. MasterSpring[®] <http://www.masterspring.it/spa/search.htm>
7. SMI[®] <http://www.smihq.org/> (Spring Manufacturers Institute).
8. Prodmor[®] Quick Spring Designer <http://www.springwizard.com/index.htm>
9. Bare Hill Software Inc. SpringCAD <http://www.barehillsoftware.com/SpringCAD/springcad.html>
10. Mid-West Spring and Stamping. Free Spring Design Software <http://www.mwspring.com/software.html>
11. Spring Engineers of Houston Ltda. Coil Spring Calculator http://www.springhouston.com/design_assistance.htm
12. Institute of Spring Technology. Spring Design Software http://www.ist.org.uk/software_services.htm

13. Norton R.L.: Machine Design: An Integrated Approach. Ed. Prentice Hall, 3th edition, New York, 2005.
14. Mott R.L.: Machine Elements in Mechanical Design. Ed. Prentice Hall, 4th edition, New York, 2003.
15. Shigley J.E.: Mechanical Engineering Design. Ed. Mc. Graw Hill, 7th edition, New York, 2003.
16. Society of Automotive Engineers Inc.: Spring Design Handbook. Second Edition. Warrendale. 1996.
17. Hinkle R., Morse I.: Design of helical springs for minimum weight, volume and length. ASME Jour. of Eng. for Ind. Vol 81, No. 1 (1959), 37-42.
18. Kothari H.: Optimum design for helical spring, Machine Design. Vol 52, No. 25 (1980), 69-73.
19. Yokota T., Taguchi T., Gen M.: A solution method for optimal weight design problem of helical spring using genetic algorithms. Computers Ind. Engng. Vol 33 (1997), 71-76.
20. Kothari H.: Optimal design of helical spring. Mach. Des. (1980), 69-73.
21. Sandgren E.: Nonlinear integer and discrete programming in mechanical design optimization. ASME J. Mech. Design. Vol 112 (1990), 223-229.
22. Kankan B., Kramer, S.: An augmented Lagrange multiplier based method for mixed integer discrete continuous optimization and its applications to mechanical design. Trans. ASME, J. Mech Des. Vol 116 (1994), 405-411.
23. Leung Y., Wang Y.: An orthogonal genetic algorithm with quantization for global numerical optimization. IEEE Transactions on Evolutionary Computation. Vol 5 (2001), 41-53.
24. Mitchell M.: An Introduction to Genetic Algorithms. MIT Press, Massachusetts, 2001.
25. Blum C.: Ant colony optimization: introduction and recent trends. Physics of Life Reviews. Vol. 4 (2005), 353-373.
26. Aarts E. Van Laarhoven P.: Simulated annealing: Theory and applications. Ed. Springer, 1er Edición, 1987.
27. Caballero C., Cerda E., Muñoz M., Rey L., Stancu-Minasian I.: Efficient solution concepts and their relations in stochastic multiobjective programming. Journal of Optimization Theory and Applications. Vol. 110 (2001). 53-74.
28. Youssef H., Sait S., Adiche H.: Evolutionary algorithms, simulated annealing and tabu search: a comparative study. Engineering Applications of Artificial Intelligence. Vol. 14 (2001). 167-181.
29. Llorà X., Sastry K., Alías F., Goldberg D., Welge, M.: Analyzing active interactive genetic algorithms using visual analytics. Proceedings of the 8th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation. 2006.
30. Rubinstein R., Kroese D.: The Cross-Entropy Method: A Unified Approach to Combinatorial Optimization, Monte-Carlo Simulation, and Machine Learning. Ed. Springer-Verlag, New York, 2004.
31. Boettcher S., Percus A.: Extremal optimization: an evolutionary local-search algorithm. Computational Modeling and Problem Solving in the Networked World: Interfaces in Computer Science and Operations Research. (2003). 61-77.
32. Rechenberg I.: Evolutionsstrategie - Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution (PhD thesis). 1973.

Recibido el 22 de Febrero de 2008

En forma revisada el 18 de Mayo de 2009