

Controller synthesis with compensation AW and performance in \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_∞

Addison Ríos-Bolívar

Departamento de Sistemas de Control, Facultad de Ingeniería, Universidad de los Andes. Mérida 5101, Venezuela. Tel. +58 274.240.33.36. Fax 274.240.28.11. ilych@ula.ve

Abstract

Considering the time invariant linear systems (LTI), this contribution studies the design problem of robust Anti-Windup compensation (AW). The robust performance is analyzed on two function transfers of closed loop using the \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_∞ norms. One transfer function is defined of the controlled output respect to the perturbation, in order to design a dynamical controller, minimizing the \mathcal{H}_2 norm. Another one transfer function from the actuator output to the controller output is used in order to evaluate the performance under saturation. The performance index considers the effect of the saturation on the controller output, and this index allows to design the AW compensation gain, minimizing the \mathcal{H}_∞ norm. The dynamical controller and the AW compensation gain are obtained by numerical solution of linear matrix inequalities (LMI), which allow to characterize the \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_∞ norms.

Key words: Anti-windup compensation, optimal control, bounded control, linear matrix inequalities (LMI), Saturation of actuators.

Síntesis de controladores con compensación AW y desempeño en \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_∞

Resumen

Considerando los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI), esta comunicación trata del diseño de controladores con compensación anti-windup (AW) robusta. El desempeño robusto se analiza a partir de dos funciones de transferencia, utilizando las normas \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ . Una función de transferencia corresponde a la salida controlada respecto a perturbaciones, de manera de diseñar un controlador dinámico, minimizando la norma \mathcal{H}_2 . La otra función de transferencia corresponde a la salida del actuador respecto a la salida del controlador. A partir de esa función de transferencia se impone un índice de desempeño, que permite evaluar el efecto de la saturación de los actuadores sobre la salida del controlador. Este índice de desempeño permite diseñar la ganancia de compensación de AW, minimizando la norma \mathcal{H}_∞ . La síntesis del controlador dinámico y la compensación se obtienen mediante el uso de desigualdades matriciales lineales (LMI), que permiten caracterizar las normas \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_∞ .

Palabras clave: Compensación anti-windup, control óptimo, control acotado, desigualdades matriciales lineales (LMI), saturación de actuadores.

1. Introducción

En el control de procesos industriales complejos es común encontrar esquemas de control que deben satisfacer múltiples objetivos y por lo tanto deben operar en diferentes modos de con-

trol. La habilidad de un sistema de control de operar en múltiples ambientes y con multi-objetivos, partiendo del reconocimiento de la situación específica y sirviéndola adecuadamente, se puede definir como *control inteligente* [1]. Cada situación específica define el modo de operación y

cada uno de los modos tiene un controlador que se ha diseñado para satisfacer los objetivos de desempeño correspondiente a ese modo. La conmutación entre regímenes de operación se logra por una selección de la entrada de la planta a partir de las salidas de un número de controladores en paralelo, cada uno de los cuales corresponde a un modo en particular. Entonces la conmutación de modos es la sustitución de la entrada a la planta en virtud de que la salida de un controlador se reemplaza por otro.

Como consecuencia de las limitaciones (saturación) y de conmutación de controladores, la entrada de control a los procesos será distinta a la salida de dichos controladores. Cuando esto sucede, la salida de los controladores no conduce apropiadamente la planta y los estados del mismo se actualizan fuertemente, situación que se denomina *windup* [2, 3]. En términos generales, el *windup* es una inconsistencia entre la entrada de control al proceso y los estados internos del controlador. Los efectos adversos del rebote son un deterioro significativo del desempeño, sobre-disparo y en algunos casos inestabilidad [4].

El problema de análisis y síntesis de sistemas de control para sistemas LTI sujetos a limitaciones y sustituciones en la entrada de la planta tiene dos formas de ser abordado: una es incorporando las limitaciones y sustituciones en el diseño del sistema de control. La otra es que se puede atacar el problema mediante compensación, que consiste en dos etapas: una primera etapa considera el diseño del sistema de control sin tomar en cuenta las restricciones físicas de los actuadores, de manera que se pueden imponer distintos objetivos de funcionamiento. La segunda etapa se refiere al diseño de alguna compensación a través de una realimentación adicional a fin de minimizar los efectos negativos de la saturación de los actuadores. En general, esta técnica se estudia como el problema de transferencia sin salto anti-rebote (AWBT) o problema de compensación anti-*windup* (AW).

A los fines de obtener compensadores globales, en Kothare *et al.* [5] se presenta un marco general para el problema de AWBT, el cual está basado en el paradigma de diseñar un controlador lineal que ignore las entradas no-lineales e incorpore compensación a objeto de minimizar los efectos adversos del efecto *windup*. La genera-

lidad de ese trabajo permite considerar cualquier estructura de sistema de control incluyendo realimentación de estados, pre-adelanto (*feedforward*), grados de libertad múltiples, cascadas y controladores no cuadrados en general. La principal desventaja de estos métodos es que no se consideran los efectos de la saturación de los actuadores sobre los índices de desempeño que se imponen para el diseño del controlador. Además, cambios en los límites de saturación de los actuadores tampoco son tomados en cuenta lo cual, desde el punto de vista de robustez, puede resultar muy inconveniente. Otra desventaja, no menos importante, es que en todos los esquemas de compensación es fundamental la medición de la salida no-lineal de los actuadores [6, 7]. En consecuencia, esta medición puede resultar una limitante a los fines de implementar la compensación en los procesos industriales [8].

De manera de considerar la robustez en el diseño de la compensación, AWBT [9] presenta una formulación general del problema de síntesis AWBT multivariable. La compensación resultante se obtiene por minimización de una ganancia pesada en \mathcal{L}_2 , usando desigualdades lineales matriciales, pero los cambios de acción de los actuadores no se consideran y no se evalúan los efectos respecto a los índices desempeño del sistema en lazo cerrado cuando se está en saturación. Por otro lado Wada y Saeki [10], presentan un método basado en el desempeño \mathcal{L}_2 , donde se obtiene un compensador anti-rebote estático. En este caso, tanto el desempeño nominal como el desempeño robusto se reducen a un problema de autovalores generalizados. Hu y Lin [11] presentan el diseño de compensación AW con rechazo a perturbaciones para sistemas LTI a tiempo discreto, donde, considerando solamente realimentación de estados, establece condiciones para un conjunto invariante en presencia de perturbación persistente para el diseño de la compensación. En Mulder y Kothare [12] se muestra el diseño de un controlador dinámico y una ganancia de compensación estática de manera simultánea, donde se considera el efecto de la saturación sobre el desempeño en lazo cerrado, pero no toma en consideración los posibles cambios en los límites de operación de los actuadores, no hay robustez. En Ríos-Bolívar *et al.* [13] se presenta una técnica para compensación AWBT en controladores PID

basada en la caracterización de las normas \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ como desigualdades matriciales lineales, al igual que en Ríos-Bolívar y Godoy [14, 15] para controladores multivariables. La robustez se considera asegurando el desempeño en lazo cerrado a pesar de cambios desconocidos en los límites de saturación de los actuadores, pero no se considera sobre el funcionamiento en lazo cerrado de acuerdo a las premisas de diseño del controlador.

En este trabajo se presenta un método de diseño de controladores dinámicos con compensación robusta para sistemas LTI basado en la normas \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ . La síntesis del controlador dinámico y la ganancia de compensación se realizan simultáneamente, tomando en consideración el desempeño en lazo cerrado y cambios en los límites de saturación de los actuadores. La característica de desempeño robusto se analiza sobre la función de transferencia de lazo cerrado de la salida del actuador respecto a la diferencia entre la señal de control efectiva al proceso y la salida del controlador, la cual se considera como una señal de perturbación. Así, se considera la minimización de la normas \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ , descritas como un problema de optimización convexa, de esa función de transferencia, asociadas con las especificaciones de desempeño en lazo cerrado en ausencia de saturación. Al considerarse la síntesis de controladores dinámicos, los casos específicos, como el diseño de PIDs, pueden ser tratados como casos particulares.

Notación

\mathbb{R} es el conjunto de números reales. Para una matriz A , A^T denota su transpuesta. \mathcal{L}_2 es el espacio de Hilbert de señales vectoriales definidas en $(-\infty, \infty)$, con producto escalar $\langle x|y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)^* y(\tau) d\tau$ y tal que $\|x\|_2 \triangleq \langle x|x \rangle^{1/2} < \infty$, $\forall x \in \mathcal{L}_2$. En las particiones de matrices simétricas $(o)^T$ denota cada uno de sus bloques simétricos. \mathbb{I} define la matriz identidad de dimensión apropiada.

2. Problema introductorio

De manera de introducir el problema de robustez para el diseño de compensación anti-rebote, considérese el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1\omega(t) + B_2\sigma(u) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}\omega(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_{21}\omega(t) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ son los estados, $\omega \in \mathbb{R}^l$ son las perturbaciones, $u \in \mathbb{R}^p$ son los controles, $z \in \mathbb{R}^m$ son las salidas controladas, y $y \in \mathbb{R}^q$ son las salidas medidas. $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{21}$ son matrices conocidas de dimensiones apropiadas.

La función no-lineal $\sigma(o)$ denota la saturación del actuador, la cual es definida por

$$\sigma(u_i) = \begin{cases} u_{i_{\min}} & \text{si } u(t) < u_{i_{\min}} \\ u(t) & \text{si } u_{i_{\min}} \leq u(t) \leq u_{i_{\max}} \\ u_{i_{\max}} & \text{si } u(t) > u_{i_{\max}}, \quad i = 1, 2, \dots, p \end{cases} \quad (2)$$

Esta función no-lineal describe las limitaciones y/o sustituciones debido al funcionamiento de los actuadores.

El control efectivo aplicado al proceso $\sigma(u)$ es una función no-lineal, entonces, de la salida $u(t)$ del controlador.

A objeto de satisfacer los requerimientos de control, se considera un controlador dinámico con compensación, el cual es dado por

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= \mathbf{A}_c\zeta(t) + \mathbf{B}_c y(t) + \mathbf{E}_c[\sigma(u) - u] \\ u(t) &= \mathbf{C}_c\zeta(t) + \mathbf{D}_c y(t) \end{aligned} \quad (3)$$

donde $\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c, \mathbf{D}_c$ corresponden a las matrices dinámicas del controlador, las cuales son parámetros de diseño. \mathbf{E}_c representa la ganancia de compensación, la cual es también un parámetro de diseño.

Cuando la saturación ocurre, la señal $\vartheta = \sigma(u) - u$ es distinta de cero y los efectos adversos se hacen presentes. Considerando la minimización de dichos efectos mediante compensación, las matrices dinámicas del controlador $\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c$ y \mathbf{D}_c son diseñadas sin tomar en cuenta la saturación, mientras que se sintetiza la ganancia de compensación \mathbf{E}_c para poder mejorar el desempeño del lazo cerrado. La compensación toma lugar cuando la señal $\vartheta = \sigma(u) - u$ es no nula y la realimentación adicional, es incorporada de manera de hacer nula dicha señal, en el menor tiempo posible, mediante la actualización de la señal de control u , la cual entrará nuevamente en sus límites de acción.

Así, el sistema en lazo cerrado está dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_2 D_c C_2)x + B_2 C_c \zeta + (B_1 + B_2 D_c D_{21})\omega \\ &\quad + B_2 \vartheta \\ \dot{\zeta} &= B_c C_2 x + A_c \zeta + B_c D_{21} \omega + E_c \vartheta \\ z &= C_1 x + D_{11} \omega \\ u &= D_c C_2 x + C_c \zeta + D_c D_{21} \omega \end{aligned} \quad (4)$$

El desempeño del sistema en lazo cerrado y sin saturación se estudia a partir de la función de transferencia de la perturbación ω a la salida controlada z . Sea $T_{z\omega}$ tal función de transferencia:

$$T_{z\omega}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right] = C_1 (sI - A)^{-1} B_1 + D_1, \quad (5)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ B_c D_{21} \end{pmatrix}, \\ C_1 &= (C_1 \quad 0), \quad D_1 = D_{11}. \end{aligned}$$

Problema 1

Por requerimientos de desempeño, sin saturación, es necesario diseñar un controlador dinámico (3) tal que

1. El sistema en lazo cerrado (4) sea asintóticamente estable.
2. $\|T_{z\omega}\|_2 < \mu$ ó $\|T_{z\omega}\|_\infty < \gamma$, donde $\mu > 0$ y $\gamma > 0$.

Este es un problema típico en la literatura de control óptimo robusto [16, 17].

Cuando la saturación se activa es necesario preservar las propiedades de estabilidad. Dichas propiedades se garantizan por medio de la estabilidad global de los sistemas de entrada acotada, la cual debe ser utilizada en el diseño de la ganancia de compensación. Entonces, el problema de síntesis consiste en obtener \mathbf{E}_c que garantice la efectividad de la compensación bajo alguna condición de estabilidad robusta para sistemas perturbados. Así, en primer lugar, la estabilidad en lazo cerrado se satisface por la adecuada selección de las matrices dinámicas del controlador. La segunda condición, ligada a la estabilidad de los sistemas de entrada acotada, permitirá la compensación bajo condiciones de estabilidad robusta. En este caso, algunos resultados pueden ser encontrados en la literatura [18].

Por otro lado, es necesario considerar aspectos de robustez con relación a la operación de los actuadores. En este sentido, se debe diseñar la ganancia de compensación a objeto de garantizar la estabilidad en lazo cerrado y minimizar el efecto de la *señal perturbación* ϑ sobre la señal de control u bajo saturación. Entonces, el problema de diseño de la ganancia de compensación se puede focalizar a partir de las normas \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ .

Considérese la función de transferencia de la perturbación ϑ a la señal de control u :

$$T_{z\vartheta}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right] = C_2 (sI - A)^{-1} B_2 + D_2, \quad (6)$$

donde

$$B_2 = \begin{pmatrix} B_2 \\ \mathbf{E}_c \end{pmatrix}, C_1 = (\mathbf{D}_c C_2 \quad \mathbf{C}_c), D_2 = 0.$$

Problema 2

Dado el sistema dinámico (1), diseñar la ganancia de compensación \mathbf{E}_c para el controlador (3), tal que:

1. El sistema en lazo cerrado (4) sea asintóticamente estable.
2. El efecto de ϑ sobre u sea mínimo, en algún sentido.

En consecuencia, el índice de desempeño robusto, respecto a cambios en los límites de saturación, puede ser alcanzado. Este funcionamiento robusto es una demanda típica en un ambiente de control industrial ya que los elementos actuadores (válvulas de control, dispositivos hidráulicos, etc.), sufren deterioros debido al uso intensivo, obsolescencia de partes, degradación de los materiales de construcción, entre otros aspectos. Por lo tanto, es necesario diseñar los mecanismos de compensación con características de robustez.

En resumen, se han formulado dos problemas: un problema típico de control óptimo robusto y un problema de síntesis de la ganancia de compensación para AWBT robusto. Ambos problemas pueden ser considerados bajo una misma óptica como un problema de control multiojetivo:

Problema. Dado el sistema dinámico (1), diseñar el controlador con compensación (3) tal que:

1. El sistema en lazo cerrado (4) sea asintóticamente estable.
2. $\|T_{zw}\|_2 < \mu$ ó $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, donde $\mu > 0$ y $\gamma > 0$; sujeto a que
3. El efecto de ϑ sobre u sea mínimo, en algún sentido.

Bajo esta formulación, los objetivos de síntesis puede ser una mezcla de desempeño \mathcal{H}_2 , desempeño \mathcal{H}_∞ , y rechazo a perturbación, los cuales pueden ser descritos mediante desigualdades matriciales lineales, tal como ha sido establecido en la síntesis de controladores multi-objetivos, [19].

En este contexto, es posible desarrollar una técnica sistemática de diseño que combine aspectos importantes de la síntesis de control realimentado con el diseño de compensación anti-rebote, tomando ventaja de la formulación con criterios múltiples.

3. Síntesis del Controlador con Compensación

Como ya ha sido mencionado, el problema 1 es típico en el diseño de sistemas de control óptimo robusto. Por lo tanto, en este punto se intenta satisfacer las restricciones de diseño descritas en el problema 2, para lo cual se desea un controlador que satisfaga que el sistema en lazo cerrado (4) sea asintóticamente estable y que el efecto de ϑ sobre u sea mínimo, en algún sentido.

3.1. Formulación en \mathcal{H}_2

En este caso, se busca diseñar el controlador (3) tal que $\|T_{w\vartheta}\|_2 < \mu$, para algún $\mu > 0$, lo cual asegura la compensación anti-rebote. Para ello se aplica el siguiente lema, el cual caracteriza completamente la norma \mathcal{H}_2 como una restricción LMI [19].

Lema 3.1

La desigualdad $\|T_{w\vartheta}\|_2 < \mu$ se cumple si y solo si $D = 0$ y existen matrices simétricas $X = 0$ y W tales que:

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T & B \\ (o)^T & -I \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} W & CX \\ (o)^T & X \end{bmatrix} > 0, \text{tr}[W] < \mu \tag{7}$$

es factible.

Proposición 3.1

Considérese el sistema definido por (1) y el controlador con compensación dado por (3). El sistema controlado es asintóticamente estable con compensación anti-rebote robusta, ya que $\|T_{w\vartheta}\|_2 < \mu$, si y solo si, existen matrices simétricas de orden n $X > 0$ y $Y = 0$; la matriz $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$; las matrices $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $R \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$; y la matriz simétrica $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ que satisfacen las siguientes LMIs:

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + & A + B_2RC_2 + G^T & B_2 \\ B_2L + L^TB_2^T & & \\ (o)^T & YA + A^TY + & \\ & FC_2 + C_2^TF^T & YB_2 + M \\ (o)^T & (o)^T & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} W & L & RC_2 \\ (o)^T & X & I \\ (o)^T & (o)^T & Y \end{bmatrix} > 0, \text{tr}(W) < \mu.$$

El controlador se obtiene de

$$\begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^{-1} & -V^{-1}YB_2 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G - YAX & F \\ L & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ -C_2XU^{-1} & I \end{pmatrix}$$

La matriz de ganancia de compensación E_c es dada por

$$E_c = V^{-1}M,$$

donde V y U son matrices no singulares que satisfacen $YX + VU = I$.

Demostración

La prueba se fundamenta en el procedimiento de linealización de las desigualdades matriciales mediante transformación congruente y cambios de variables [19]. Sean las transformaciones matriciales

$$T = \begin{pmatrix} I & \mathbf{Y} \\ 0 & \mathbf{V}^T \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}^T \\ \mathbf{U} & \mathbf{Y} \end{pmatrix}, X^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V} \\ \mathbf{V}^T & \mathbf{X} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

En primer lugar, de las transformaciones se deriva $\mathbf{YX} + \mathbf{VU} = I$.

Para obtener desigualdades lineales, la primera desigualdad en (7) se multiplica por la derecha por $\mathcal{T} := \text{diag}[T, I]$ y por la izquierda por T^T . La segunda desigualdad en (7) se multiplica por la derecha por $\mathcal{J} := \text{diag}[I, T]$, y por la izquierda por J^T . Entonces,

$$\begin{bmatrix} T^T A X T + T^T X A^T T & T^T B \\ (o)^T & -I \end{bmatrix} < 0, \\ \begin{bmatrix} W & C X T \\ (o)^T & T^T X T \end{bmatrix} > 0, \text{tr}(W) < \mu, \quad (9)$$

donde

$$T^T A X T = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{X} + \mathbf{C}_c \mathbf{U} & \mathbf{A} + \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{Y}\mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{X} + \mathbf{Y}\mathbf{C}_c \mathbf{U} & \mathbf{Y}\mathbf{A} + \mathbf{Y}\mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 + \mathbf{V}\mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$T^T X T = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & I \\ I & \mathbf{Y} \end{pmatrix}, T^T B = \begin{pmatrix} B_2 \\ \mathbf{Y}B_2 + \mathbf{V}\mathbf{E}_c \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$C X T = (\mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{C}_c \mathbf{U} \quad \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2). \quad (12)$$

Por lo tanto, las desigualdades son no lineales. Para la linealización de las desigualdades se aplican los cambios de variables siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{X} + \mathbf{C}_c \mathbf{U} \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{Y}\mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{X} + \mathbf{Y}\mathbf{C}_c \mathbf{U} + \mathbf{V}\mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{X} + \mathbf{V}\mathbf{A}_c \mathbf{U} \\ \mathbf{F} &= \mathbf{Y}\mathbf{D}_c + \mathbf{V}\mathbf{B}_c \\ \mathbf{R} &= \mathbf{D}_c \end{aligned} \quad (13)$$

Que en forma matricial se escriben como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{F} \\ \mathbf{L} & \mathbf{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{Y} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ 0 \end{pmatrix} A(\mathbf{X} \quad 0). \quad (14)$$

El otro cambio de variable corresponde a

$$\mathbf{M} = \mathbf{V}\mathbf{E}_c. \quad (15)$$

Con esos cambios de variables se obtienen las LMIs. Las matrices de la dinámica del controlador se obtienen devolviendo los cambios de variables definido por (14). Mientras que la ganancia de compensación se obtiene a partir de (15).

Así, esta formulación garantiza la estabilidad del sistema controlado en caso de saturación, la cual tendría un mínimo efecto sobre la señal de salida del controlador.

3.2. Formulación en \mathcal{H}_∞

En este caso, se quiere diseñar el controlador (3) tal que $\|T_{u\theta}\|_\infty < \gamma$, para algún $\gamma > 0$. Es bien sabido que la norma \mathcal{H}_∞ tiene una caracterización como una restricción LMI de acuerdo al Lema Real Acotado [19]:

Lema 3.2

La desigualdad $\|T_{u\theta}\|_\infty < \gamma$ se cumple si y solo si, existe una matriz simétrica X , tal que

$$\begin{bmatrix} A^T X + X A & X B & C^T \\ (o)^T & -\gamma I & D^T \\ (o)^T & (o)^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (16)$$

Proposición 3.2

Considérese el sistema definido por (1) y el controlador con compensación dado por (3). El sistema controlado es asintóticamente estable con compensación robusta, en el sentido que $\|T_{u\theta}\|_\infty < \gamma$, si y solo si existen matrices de orden n simétricas $\mathbf{X} > 0$ y $\mathbf{Y} > 0$; la matriz $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$; las matrices $\mathbf{L} \in \mathfrak{R}^{p \times n}$, $\mathbf{F} \in \mathfrak{R}^{n \times q}$, $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}^{p \times q}$, $\mathbf{M} \in \mathfrak{R}^{n \times p}$; tales que la siguiente LMI se satisface:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}_2 \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \mathbf{B}_2^T & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} \mathbf{C}_2 + \mathbf{Q}^T & \mathbf{B}_2 & \mathbf{L}^T \\ (o)^T & \mathbf{Y}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{Y} + \mathbf{F} \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2^T \mathbf{F}^T & \mathbf{Y}\mathbf{B}_2 + \mathbf{M} & \mathbf{C}_2^T \mathbf{R}^T \\ (o)^T & (o)^T & -\gamma I & 0 \\ (o)^T & (o)^T & (o)^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

El controlador se obtiene de

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{-1} & -\mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{B}_2 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q} - \mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{X} & \mathbf{F} \\ \mathbf{L} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{-1} & 0 \\ -\mathbf{C}_2 \mathbf{X} \mathbf{U}^{-1} & I \end{pmatrix}$$

La matriz de ganancia de compensación \mathbf{E}_c es dada por

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{M},$$

donde \mathbf{V} y \mathbf{U} son matrices no singulares que satisfacen $\mathbf{YX} + \mathbf{VU} = \mathbf{I}$.

Demostración

Al igual que en el caso anterior, la prueba se sigue por el procedimiento de linealización de las desigualdades matriciales mediante transformación congruente y cambios de variables. En este caso la matriz de transformación corresponde a $\mathcal{T} := \text{diag}\{\mathbf{T}, \mathbf{I}, \mathbf{I}\}$.

El índice de desempeño basado en la norma \mathcal{H}_∞ corresponde a la ganancia \mathcal{L}_2 de la salida del controlador con respecto a la salida del actuador.

3.3. Controlador con compensación usando índices en \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_∞ mezclados

A partir de los resultados previos, es posible derivar diferentes objetivos de diseño considerando el problema de control y los requerimientos de compensación. Así, por ejemplo, se pueden formular los siguientes objetivos:

1. $\|T_{zw}\|_\infty < \mu$ sujeto a $\|T_{uw}\|_2 < \gamma$.
2. $\|T_{zw}\|_2 < \mu$ sujeto a $\|T_{uw}\|_\infty < \gamma$.

Por lo tanto, para el de diseño multi-objetivos, lo importante es combinar, apropiadamente, el conjunto de LMIs que permita derivar un controlador único. Estos resultados muestran que fácilmente se puede encontrar la formulación LMI apropiada para cada especificación particular. De hecho, el problema de diseño puede involucrar una restricción sobre la señal controlada y una restricción sobre la señal de control referida desde la señal de saturación. De igual manera, es factible incorporar otros tipos de restricciones definidas como LMI, por ejemplo la ubicación de polos. Entonces, es posible encontrar la síntesis LMIs correspondiente sobre el problema con criterios múltiples o mezclados. A partir de entonces se resuelven las LMIs numéricamente, planteadas como un sistema de desigualdades matriciales lineales, para obtener la solución al problema de control con compensación [15]. Es importante recalcar que, considerando el diseño de

controladores dinámicos, la síntesis de controladores con estructuras fijas, como los PIDs, pueden ser tratados como casos particulares, definiendo su modelo dinámico. Así, esta técnica tiene la fortaleza, además de permitir el diseño simultáneo de controlador dinámico y compensación, ofrecer cierta robustez frente a cambios en las condiciones de operación de los actuadores al imponerse un índice de desempeño de esos cambios sobre la señal de control, lo cual no ha sido reportado en las diferentes técnicas presentadas en la literatura actual.

Comentario 3.1

De manera similar al caso de sistemas LTI continuos que han sido abordados, en el procedimiento para el diseño de compensación AW robusta en plantas a tiempo discreto se procede de manera análoga, tan solo cambian las LMIs que permiten el diseño del controlador con compensación robusta. Los resultados que se obtienen pueden ser analizados en Ríos-Bolívar y Acuña [20].

4. Evaluación Numérica

Con el ejemplo que se presenta a continuación se quiere reforzar la importancia de la compensación robusta planteada. Así, considérese el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -0.2000 & -0.2000 \\ -1.0000 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \omega + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sigma(u) \\ z &= (-0.4000 \quad 0.9000)x + (0 \quad 0 \quad 1)\omega \\ y &= (-0.4000 \quad 0.9000)x + (0 \quad 0 \quad 1)\omega \end{aligned}$$

Para este ejemplo, se considera que los límites de saturación se definen por $u \in [-2.56, 2.56]$. Se requiere el diseño de un controlador que atenúe el efecto de las perturbaciones sobre la salida controlada y que permite una regulación de la misma alrededor de $r = 10$.

De acuerdo a lo planteado y por medio del *toolbox* LMI de MatLab[®], se resuelven las desigualdades lineales para el problema donde se desea que $\|T_{zw}\|_\infty < \mu$ sujeto a $\|T_{uw}\|_\infty < \gamma$. Se obtiene los siguientes resultados:

$$\gamma = 1.7099, \quad \mu = 1.6475.$$

$$\mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} -13.7659 & 13.3794 \\ 2.4718 & -5.3750 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{pmatrix} -3.8798 \\ 4.4022 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{C}_c = (-7.4638 \quad 5.2520), \quad \mathbf{D}_c = (18438).$$

La ganancia de compensación obtenida corresponde a $\mathbf{E}_c = \begin{pmatrix} 0.9285 \\ 0.0918 \end{pmatrix}$.

La primera evaluación se hace a partir del comportamiento temporal comparativo entre el caso sin saturación y sin compensación, asumiendo, además, que los actuadores operan dentro los límites que previamente se han fijado. La Figura 1 muestra esta comparación.

Tal como se puede apreciar, por efecto de la saturación el desempeño temporal de la salida sin compensación se deteriora en el sentido de que se requiere un mayor tiempo de asentamiento, $t = 20\text{s}$, para alcanzar el objetivo de diseño, con respecto al caso sin saturación.

Por el contrario, tal como se puede apreciar en la Figura 2, por medio de la compensación robusta diseñada, se mejora un tanto la respuesta temporal. Se disminuye el tiempo de asentamiento a aproximadamente $t = 10\text{s}$. Hay un mayor acercamiento entre la respuesta sin saturación y la respuesta con compensación, tal como se ha esperado.

Una mayor prestancia del diseño de compensación AW robusta se puede demostrar con el caso de variación del límite de saturación del actuador. Para ello se ha considerado un pequeño cambio de alrededor del 1,56%, solamente. A pesar de ser un pequeño cambio en el límite, la Figura 3 muestra que el sistema sin compensación se hace inestable. El efecto de este cambio, de manera concluyente, refiere la necesidad de la compensación robusta.

La situación es diferente cuando se utiliza la compensación robusta, tal como se puede apreciar en la Figura 4. Allí el sistema compensado permite alcanzar los objetivos de control. En saturación y con compensación robusta, la acción de la compensación permite llevar la señal de control dentro de los límites de acción del actuador, a pesar de sus cambios. Entonces se satisfacen los objetivos de desempeño.

5. Conclusiones

Se ha presentado una técnica para el diseño de controladores multivariables con compensación robusta anti-rebote. El método se basa en

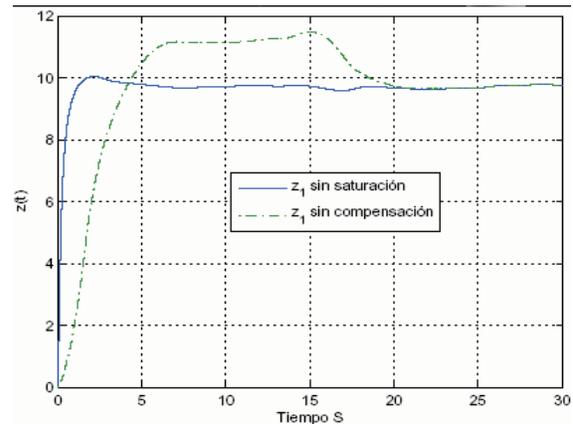


Figura 1. Comparación de salidas controladas: sin saturación y sin compensación.

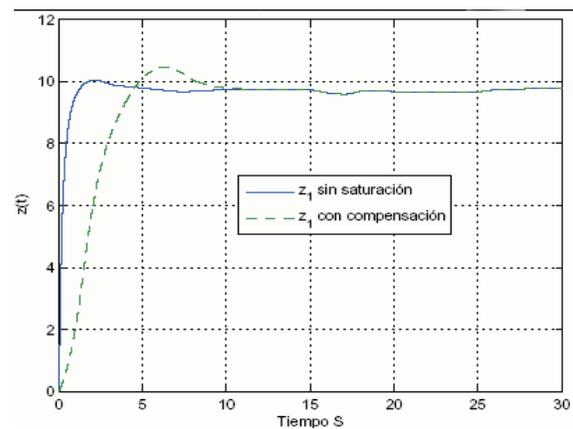


Figura 2. Comparación de salidas controladas: sin saturación y con compensación.

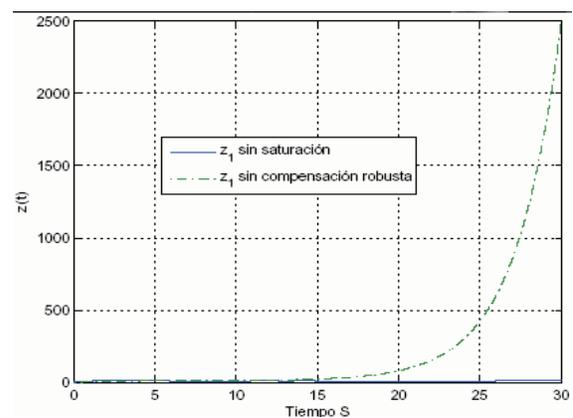


Figura 3. Comparación de salidas controladas: sin saturación y sin compensación robusta.

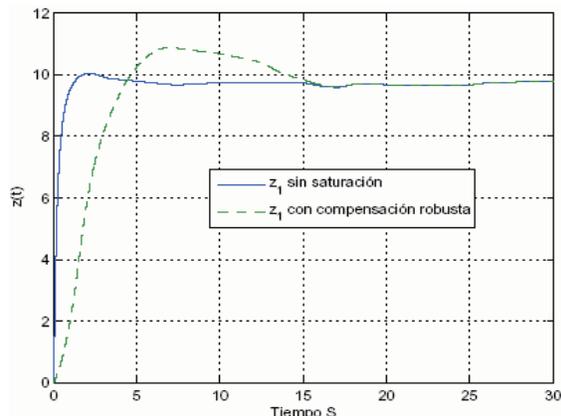


Figura 4. Comparación de salidas controladas: sin saturación y con compensación robusta.

la caracterización de las normas \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ como restricciones LMI. El análisis del desempeño robusto de la compensación se establece sobre la matriz de transferencia de lazo cerrado del control respecto a la diferencia entre la salida del actuador y la salida del controlador, la cual se considera como una señal de perturbación. Este desempeño robusto permite cambios en los límites de saturación del actuador, preservándose la acción de la compensación, cuya ganancia se obtiene por solución de criterios múltiples descritos por LMIs.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el FONACIT bajo el proyecto No. 2005000170, y el CDCHT de la Universidad de Los Andes, a través del proyecto No. I-795-04-02-A, por lo que gratamente se reconocen estos soportes.

Referencias Bibliográficas

- Narendra, S. K. and Balakrishnan, J., Adaptive Control Using Multiple Models, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 42, No. 2, 1997.
- Aström, K. J. and Rundqwist, L., Integrator Windup and how to avoid it, Proc. Amer. Control Conference, pp. 1693-1698, Pittsburgh, USA, June 1989.
- Morari, M., Some Control Problems in the Process Industries. Essays on Control: Perspectives in Theory and Applications, Birhauser, 1993.
- Campo, P. J. and Morari, M., Robust Control of processes subject to saturation nonlinearities, Comp. & Chem. Engineering, Vol. 14, pp. 343-358, 1990.
- Kothare, M. V., Campo, P. J., Morari, M. and Nett, C. N., A Unified Framework for the Study of Anti-Windup Designs, Automatica, Vol. 30, No. 12, pp. 1869-1883, 1994.
- Kothare, M. V. and Morari, M., Stability Analysis of Anti-Windup Control Systems: A Review and Some Generalizations, Proc. European Control Conference ECC97, 1997.
- Zheng, A., Kothare, M. V. and Morari, M., Anti-Windup Design for Internal Model Control, Tech. Rep. CIT-CDS Technical Memo, CalTech, 1993.
- Ríos-Bolívar, A. and Garcia, G., Control with Saturation Compensation and Fault Detection Filter Design, Ciencia e Ingeniería, Vol. 25, No. 1, pp. 51-59, 2004.
- Mulder, E., Kothare, M. and Morari, M., Multivariable Anti-windup Controller Synthesis using Linear Matrix Inequalities, Automatica, Vol. 37, pp. 1407-1416, 2001.
- Wada, N. and Saeki, M., Design of a Static Anti-windup Compensator that Optimizes \mathcal{L}_2 Performance: An LMI Based Approach, Proc. of the IEEE International Conference on Robotics & Automation, pp. 2628-2633, Taipei-Taiwan, 2003.
- Hu, T. and Lin, Z., Disturbance Rejection with Saturation Actuators for Discrete-time Linear Systems, Proc. 40th IEEE Conf. on Control and Decision, Vol. WeM01-3, pp. 1723-1728, Orlando, Florida, USA, 2001.
- Mulder, E. and Kothare, M., Static Anti-windup Controller Synthesis Using Simultaneous Convex Design, Proceedings of the American Control Conference, pp. 651-656, Anchorage, 2002.
- Ríos-Bolívar, A., Rivas, F. and Garcia, G., Robust Anti-Windup Compensation for PID Controllers, 7th WSEAS Int. Conf. on Automatic Control, Modelling and Simulation, ACMOS-05, pp. 242-247, Prague-Czech Republic, 2005.
- Ríos-Bolívar, A. and Godoy, S., Multivariable Anti-Windup Controller Design using \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_∞

- Multiobjectives, ICGST Int. Conf. on Automatic Control and System Engineering, Vol. 1, pp. 28-34, Cairo, Egypt, 2005.
15. Ríos-Bolívar, A. and Godoy, S., Multiobjective Approaches for Robust Anti-windup Controller Synthesis in LTI Systems, WSEAS Transaction on Systems, Vol. 5, No. 1, pp. 164-171, 2006.
 16. Zhou, K., Doyle, J. and Glover, K., Robust and Optimal Control, Prentice-Hall, 1996.
 17. Gahinet, P. and Apkarian, P., A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control, Int. J. of Robust and Nonlinear Control, Vol. 4, No. 4, pp. 421-448, 1994.
 18. Kothare, M. and Morari, M., Multivariable Anti-Windup Controller Synthesis using Multi-objective Optimization, Proc. of the American Control Conference, pp. 3093-3097, 1997.
 19. Scherer, C., Gahinet, P. and Chilali, M., Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 42, No. 7, pp. 896-911, 1997.
 20. Ríos-Bolívar, A. and Acuña, W., Robust AW Compensation for Discrete-Time Linear System, Proc. XII Latin-American Congress on Automatic Control, Vol. 1, pp. 144-149, Salvador-Bahia-Brazil, Oct. 3-6, 2006.

Recibido el 11 de Julio de 2006

En forma revisada el 10 de Septiembre de 2007