Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. Vol. 26, Nº 3, 205 - 208, 2003

A Fokker-Planck equation with a boundary condition

Jorge Guíñez, Ángel Rueda y Robert Quintero

Centro de Investigación de Matemática Aplicada (CIMA), Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia

Abstract

The steady state u of the Fokker-Planck Equation associated to a vector field X on a compact, orientable and without boundary Riemannian manifold M fulfils the boundary condition $\varepsilon\frac{\partial u}{\partial\eta}-(X\cdot\eta)u=0$ in an arbitrary domain Ω if X is a gradient vector field. In some non-gradient cases we give domains Ω in which u even fulfils that condition.

Key words: Fokker-Planck integrable, Laplace Beltrami operator.

2000 Mathematics subject classification: 35R35, 58J05.

Una ecuación de Fokker-Planck con una condición de frontera

Resumen

La solución estacionaria u de la Ecuación de Fokker-Planck relativa a un campo de vectores X, en una variedad de Riemann, compacta, orientable y sin borde M, satisface la condición de frontera $\varepsilon\frac{\partial u}{\partial\eta}-(X\cdot\eta)u=0$ en un dominio arbitrario Ω si X es un campo gradiente. En el caso de algunos campos no gradientes, determinamos dominios Ω para los cuales, la solución u satisface todavía la condición de frontera citada.

Palabras clave: Fokker-Planck Integrable, Operador de Laplace Beltrami.

2000 Mathematics subject classification: 35R35, 58J05.

1. Introducción

Consideraremos un campo X definido sobre una variedad de Riemann M, compacta, orientable, sin borde y usando el operador de Laplace-Beltrami y el de la divergencia sobre la variedad, definiremos la ecuación de Fokker-Planck sobre M. A partir de condiciones sobre la descomposición de Hodge de X obtenemos relaciones entre la solución estacionaria *global* [1] de la ecuación de Fokker-Planck:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varepsilon\Delta u-div(uX) \tag{1}$$

y las soluciones del problema con condición de frontera:

$$\begin{aligned}&\varepsilon\Delta u-div(uX)=0 && \text{en } \Omega.\\ &\varepsilon\frac{\partial u}{\partial\eta}-(X\cdot\eta)u=0 && \text{en } \partial\Omega\end{aligned} \tag{2}$$

donde Ω es un dominio de M cuya frontera es $\partial\Omega$ y η es la normal a $\partial\Omega$. En el teorema 3, para el caso de un campo X en el toro T^1, probamos que cuando la solución estacionaria del problema (1) resuelve el problema (2), entonces X es un gradiente. En la sección 2, nosotros describimos el operador de Fokker-Planck en una variedad compacta y damos algunos ejemplos de cálculo específico. En la sección 3, hacemos algunas observaciones necesarias sobre la descomposición de Hodge de un campo X. Finalmente en la sección 4, estudiamos casos no gradientes en los cuales la solución *global* satisface la condición de frontera para un cierto dominio Ω y proporcionamos algunos ejemplos.

2. El operador de Fokker-Planck

En lo que sigue M será una variedad de Riemann orientable, compacta y sin borde. En estas circunstancias M posee en el espacio tangente, un producto escalar

$$\begin{aligned} T_x(M)\times T_x(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) &\longrightarrow a\cdot b \end{aligned} \tag{3}$$

que depende diferenciablemente del punto x. De este modo, si f es una función diferenciable en M y X es un campo, la función $df(X)$ que da en cada punto x la derivada de f en la dirección $X(x)$, está bien determinada y el gradiente ∇f, de f en M, queda definido por el único campo que verifica:

$$(\nabla f)(x)\cdot X(x) = df(X)(x), \qquad x\in M. \tag{4}$$

La elección de un sistema $(x_1,\ldots,x_n)$ de coordenadas, en un abierto U de M, permite definir campos de vectores $\nabla(x_i)=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1,2,\ldots,n$. Entonces un campo X de clase C^∞ se puede expresar como:

$$X(x)=\sum X_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(x), \qquad x\in U \tag{5}$$

donde los X_i tienen la misma clase de diferenciabilidad de X. Por otra parte, las formas diferenciales (dx_i) permiten expresar, en U, cualquier forma diferencial de grado 1 como:

$$\omega=\sum \omega_i dx_i \tag{6}$$

y dado que $(dx_1,\ldots,dx_n)$ constituyen un sistema de generadores para el álgebra exterior de formas diferenciales, entonces:

$$\omega=\sum_H \omega_H dx_H$$

donde

$$dx_H = dx_{i_1}\Lambda\ldots\Lambda dx_{i_k}, \quad (i_1,\ldots,i_k)=H.$$

En particular, en U, se considera

$$\omega_v = dx_1\Lambda\ldots\Lambda dx_n$$

forma de grado n, que tiene la propiedad de que cualquier otra forma de grado n es un múltiplo de ella. Así:

$$\omega = f dx_1\Lambda\ldots\Lambda dx_n \quad \text{en } \Omega.$$

Si X es un campo de vectores, entonces

$$\tilde\omega=\sum_{i=1}^{n}(-1)^1 d(X_i)\Lambda dx_1\Lambda\ldots\Lambda dx_{i-1}\Lambda dx_{i+1}\Lambda\ldots\Lambda dx_n$$

es una forma de grado n que permite definir:

$$\tilde\omega = div(X)\omega_v \quad \text{en } U.$$

Esta posibilidad de definir la $div(X)$ para cualquier campo de clase C^∞, no depende de la elección del abierto U.

Ahora podemos definir un operador asociado al campo X de clase C^∞:

$$L_X : C^\infty(M)\to C^\infty(M)$$

$$L_X(u)=div(\varepsilon\nabla u - uX)=\varepsilon\Delta u - div(uX) \tag{7}$$

donde

$$\Delta(u)=div(\nabla u) \tag{8}$$

es el operador de Laplace-Beltrami. La ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varepsilon\Delta u - div(uX) \tag{9}$$

es la ecuación de Fokker-Planck, para la convexión X y el coeficiente de difusión ε.

Ejemplos

1. Sea M un abierto de $\mathbb{R}^n$ y para $x\in M$ consideremos el producto escalar de $\mathbb{R}^n$ identificado con $T_x(M)$. Consideremos un campo de vectores $X=\sum_{i=1}^{n} X_i\bar e_i$, entonces la ecuación de Fokker-Planck correspondiente es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(uX_i) \tag{10}$$

2. Si $M = T^n$ es el toro n-dimensional de período 1 con la estructura riemanniana usual; entonces, cuando se representan las funciones de T^n como funciones de $\mathbb{R}^n$, periódicas en todas las variables, la ecuación de Fokker-Planck toma la forma anterior (10).

3. En la esfera n-dimensional S^n de radio 1 podemos considerar funciones de clase C^∞ como restricciones de funciones de clase C^∞ en $\mathbb{R}^{n+1}$. A condición de que el campo X sea tangente a todas las esferas vecinas de S^n, la ecuación de Fokker-Planck que corresponde a la estructura de Riemann inducida por la de $\mathbb{R}^{n+1}$, es la siguiente [2]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n+1}(1-x_i^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - 2\sum_{i<j}x_i x_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - n\sum_{i=1}^{n+1}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^{n+1}\frac{\partial}{\partial x_i}(uX_i) \tag{11}$$

3. Descomposición de Hodge de un campo de vectores

Sea f una función de clase C^∞ tal que $\int_M f = 0$. Entonces la ecuación de Poisson:

$$\Delta u = f(x)$$

tiene una solución única salvo una constante. Consecuentemente, si X es un campo de vectores C^∞ en M,

$$\int(divX) = 0$$

y X se puede expresar de manera única como:

$$X = \nabla f + W \tag{12}$$

donde f verifica $\Delta f = divX$ y puesto que M tiene borde vacío, entonces W es un campo de divergencia nula.

Ejemplos

1. Sea $X = \left(\mathrm{sen}\,(2\pi(x+y)), \cos(3\pi y)\right)$, considerado como campo en el toro T^2. Entonces

$$divX = 2\pi\cos\left(2\pi(x+y)\right) - 3\pi\,sen\,(3\pi y) \tag{13}$$

y por lo tanto, $\Delta f = divX$ implica:

$$f = -\frac{2\pi}{(2\pi)^2}\frac{1}{2}\cos\left(2\pi(x+y)\right) + \frac{3\pi}{(3\pi)^2}\mathrm{sen}\,(3\pi y)\,, \tag{14}$$

con lo cual

$$\nabla f = \left(\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,\left(2\pi(x+y)\right), \frac{1}{2}sen\,\left(2\pi(x+y)\right) + \cos(3\pi y)\right) \tag{15}$$

$$W = \left(\frac{1}{2}\mathrm{sen}\left(2\pi(x+y)\right), -\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,\left(2\pi(x+y)\right)\right) \tag{16}$$

y así:

$$X = \nabla f + W. \tag{17}$$

2. Consideremos

$$X = x(0,z,-y) + y(y,-x,0) = (y^2, xz - xy, -xy) \tag{18}$$

como un campo tangente a la esfera S^2. Entonces

$$div(X) = -x \tag{19}$$

y usando (11), se tiene:

$$f = \frac{1}{2}x \tag{20}$$

y siguiendo [2]:

$$\nabla f = (x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{2},0,0\right) - \frac{1}{2}(x,y,z) \tag{21}$$

$$= \left(\frac{1}{2}(y^2+z^2), -\frac{1}{2}xy, -\frac{1}{2}xz\right)$$

$$W = \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2, xz - \frac{1}{2}xy, -xy + \frac{1}{2}xz\right). \tag{22}$$

4. Soluciones globales que verifican una condición de frontera

Teorema 1

Sea X un campo gradiente en M. Entonces la solución estacionaria de (1) es también solución de (2) para cualquier dominio Ω.

Prueba: En efecto si $X = \nabla f$ entonces $u = \exp\left(\frac{f(x)}{e}\right)$ y la condición de frontera en (2) implica:

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial \eta} - (X \cdot \eta)u = \exp\left(\frac{f(x)}{\varepsilon}\right)\frac{\partial f}{\partial \eta} - (X \cdot \eta)u =$$
$$= u\nabla f \cdot \eta - (X \cdot \eta)u = 0$$

Observación: Si la descomposición de Hodge: $X = \nabla f + W$, es tal que $W \neq 0$, las soluciones globales no están, en general, obligadas a satisfacer una tal condición de frontera, no obstante es posible exhibir ejemplos en dicha dirección.

Teorema 2

Si X es un campo Fokker-Planck Integrable, es decir, la descomposición de Hodge $X = \nabla f + W$ verifica $\nabla f(x) \cdot W(x) = 0$, para todo punto x de M, si Ω es una región y si $\partial\Omega$ está incluida en una unión de superficies de nivel de f, entonces la solución estacionaria de (1) es también solución de (2).

Prueba: En efecto (ver [1], [3]), la solución estacionaria de (1) toma la forma $u = \exp\left(\frac{f}{\varepsilon}\right)$ y, por lo tanto, se puede escribir:

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial \eta} - (X \cdot \eta)u = \varepsilon\left(\frac{\nabla(f)}{\varepsilon}u\right)\cdot\eta - \left((\nabla(f) + W)\cdot\eta\right)u =$$

$$= \left((\nabla(f))\cdot\eta\right)u - \left((\nabla(f))\cdot\eta)\right)u - W\cdot\eta = 0$$

ya que η es un múltiplo de $\nabla(f)$ en los puntos de la frontera.

Teorema 3

Sea X un campo del toro T^1 y sea $\overline{\Omega} \neq T^1$. Si la solución estacionaria de (1) es también solución de (2), entonces X es un campo gradiente.

Prueba: Para toda región Ω tal que $\overline{\Omega} \neq T^1$, el campo puede ser considerado como un campo en $\mathbb{R}$ y por el Teorema 1, $u = \exp\frac{\left(f(x) + Wx\right)}{\varepsilon}$ es una solución de (2). De otra parte si la solución global $v = \int_0^1 \exp\left(\frac{f(x) - f(x+z) - Wz}{\varepsilon}\right)$ (ver [4]) verifica (2), entonces existe un punto $x_0 \in T^1$ tal que $\varepsilon v'(x_0) = \left(f'(x_0) + W\right)v(x_0)$. pero esta relación implica W=0.

Ejemplos

1. Consideremos la función $f(x,y) = \mathrm{sen}(4\pi x)\mathrm{sen}(4\pi y)$ definida sobre el toro T^2 de período 1 y la región Ω determinada por $\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \frac{1}{4} < y < \frac{3}{4}$. La frontera de esta región está contenida en conjuntos de nivel de f. Cualquiera sea la función diferenciable $\omega(f)$, si denotamos $(\nabla f)\perp = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$, entonces el campo $X = \nabla f + \omega(f)(\nabla f)\perp$ es Fokker-Planck Integrable y $u = \exp\left(\frac{f}{\varepsilon}\right)$ es una solución de (1) que cumple las condiciones de frontera en (2).

2. En la esfera S^2 de radio 1, consideremos la función $f(x,y,z) = (z - b)g(x,y,z)$ y la región Ω determinada por $0 < b < z < 1$. La frontera de esta región está contenida en conjuntos de nivel de f. Entonces, cualquiera que sea la función diferenciable $\omega(f)$, el campo $X = \nabla f + \omega(f)(\nabla f)\perp$ es Fokker-Planck Integrable en S^2 y $u = \exp\left(\frac{f}{\varepsilon}\right)$ es una solución de (1) que cumple las condiciones de frontera en (2).

Agradecimientos

Esta investigación es financiada parcialmente por el Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico (CONDES) de la Universidad del Zulia.

Referencias Bibliográficas

1. Guíñez et al.: Calculating Steady State for a Fokker-Planck Equation. Acta Math. Hungar 91(4)(2001), 311-323.
2. Guíñez J., Rueda A.: Steady State for a Fokker-Planck Equation on S_n. Acta Math. Hungar 94(3)(2002), 217-228.
3. Rueda, A.: A class of vector fields which are Fokker-Planck integrables. Annales Univ., Sci. Budapest (1993).
4. Zeemann, C.: Estability of dynamical systems. Nonlinarity (1988), 115-155.

Recibido el 23 de Abril de 2002
En forma revisada el 17 de Noviembre de 2003