

Methodology to establish stability regions for controllers performance. Case of study: Sliding mode controllers

Oscar Camacho¹, Rubén Rojas¹ y Luis G. González²

¹Departamento de Circuitos y Medidas. ²Departamento de Electrónica y Comunicaciones.
Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes. Mérida 5101, Venezuela.
Telf. 58-274-2402802. E-mail: ocamacho@ula.ve

Abstract

This work shows the development of a method to analyze the robustness of a controller based on the establishment of stability regions. Based on computer simulations a data set is obtained for a wide range of modeling parameter variations. On each case, controller parameters are adjusted up to reach the stability limit. The resulting data is used to obtain boundary equations that establish the stability regions. The proposed method was used to study a sliding mode controller robustness based on a first order plus dead-time model of the process (POMTM). This model represents most of the overdamped processes such as chemical processes.

Key words: Sliding mode control, robustness, graphical approach.

Metodología para el establecimiento de regiones de estabilidad para desempeño de controladores. Caso de estudio: Controladores por modo deslizante

Resumen

Este trabajo presenta el desarrollo de un método para el análisis de robustez de un controlador basado en el establecimiento de regiones de estabilidad. Un conjunto de datos es obtenido mediante simulaciones, para un amplio rango de variación en los parámetros de un modelo. En cada caso, los parámetros del controlador son ajustados hasta alcanzar el límite de estabilidad. Los datos resultantes son usados para obtener las ecuaciones límite que establecen las regiones de estabilidad. El método propuesto fue usado para estudiar la robustez de un controlador por modo deslizante basado en un modelo del proceso de primer orden más tiempo muerto (POMTM). Este modelo representa la mayoría de los procesos con respuesta de tipo sobreamortiguada, tales como los procesos químicos.

Palabras clave: Control por modo deslizante, propuesta gráfica, robustez.

1. Introducción

El comportamiento dinámico de los procesos es afectado significativamente por errores de modelado, cometidos en la estimación del orden del modelo ó en la determinación correcta de los parámetros, al no tomar en cuenta no linealidades y/o errores de medición. Esto sugiere, la im-

portancia de desarrollar controladores robustos, así como conocer la tolerancia de estos ante la estimación de los parámetros del modelo.

Este artículo presenta a partir del control por modo deslizante, desarrollado por Camacho y Smith [1], una propuesta para determinar regiones de estabilidad, mediante las cuales se pueda

determinar el error de modelado tolerable por este controlador, cuando los procesos han sido aproximados por modelos de primer orden más tiempo muerto. Aunque, el método propuesto es explicado sobre este caso de estudio, su aplicación es directamente extensible a otros controladores usando también otros modelos del proceso.

Este artículo presenta en forma organizada, el controlador analizado (Sección 2), las premisas mediante las cuales se realizó el estudio (Sección 3), el desarrollo del análisis de robustez (Sección 4), el análisis de los datos recolectados y determinación de las regiones de inestabilidad (Sección 5). Posteriormente, se muestra una aplicación práctica de las ecuaciones, para un sistema representable mediante un modelo de primer orden más tiempo muerto (Sección 6). Finalmente, se presentan las conclusiones (Sección 7).

2. Control por Modo Deslizante Basado en un Modelo POMTM

Esta sección presenta en forma general al controlador por modo deslizante, para aplicaciones de control en procesos químicos auto-regulables [1]. La ley de control del mismo puede ser representada por las ecuaciones siguientes:

$$U(t) = \left(\frac{t_0 \tau}{K} \right) \left[\frac{X(t)}{t_0 \tau} + \lambda_0 e(t) \right] + K_D \frac{S(t)}{|S(t)| + \delta} \quad (1)$$

con:

$$S(t) = \text{signo}(K) \left[-\frac{dX(t)}{dt} + \lambda_1 e(t) + \lambda_0 \int_0^t e(t) dt \right] \quad (2)$$

donde $U(t)$, ley de control, está compuesta por un primer término continuo obtenido mediante el método de control equivalente [2] y un segundo término que garantiza la alcanzabilidad de la superficie de deslizamiento $S(t)$ [3, 4], con mínimo "chattering" [5]. La ecuación (2) considera el signo de la ganancia estática del proceso, $\text{signo}(K)$, sólo para elegir la correcta acción del controlador (directa o inversa), y por esta razón nunca conmuta.

Para este controlador las ecuaciones de sintonización son las siguientes [1]:

- Para el control y la superficie de deslizamiento.

$$\lambda_1 = \frac{t_0 + \tau}{t_0 \tau} [=] [\text{tiempo}]^{-1} \quad (3)$$

$$\lambda_0 \leq \frac{\lambda_1^2}{4} [=] [\text{tiempo}]^{-2} \quad (4)$$

- Para la alcanzabilidad y disminución del "chattering".

$$K_D = \frac{0,51}{|K|} \left[\frac{\tau}{t_0} \right]^{0,76} [=] [\text{SC}] \quad (5)$$

$$d = 0,68 + 0,12(|K| K_D \lambda_1) [=] [\text{ST}/\text{tiempo}] \quad (6)$$

donde SC es la salida del controlador y ST es la salida del transmisor respectivamente. Las ecuaciones (5) y (6) son usadas cuando las señales del transmisor y controlador están en fracciones (0 a 1). Cuando estas señales están en porcentajes del rango (0 a 100%), los valores de y debe ser multiplicados por 100.

3. Premisas del Estudio Realizado

El estudio se realizó de manera generalizada para procesos representables mediante un modelo POMTM, ecuación (7). Por tanto, este método es válido para cualquier proceso no lineal de orden superior que pueda ser representado por un modelo POMTM.

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-t_0 s}}{\tau s + 1} \quad (7)$$

Los parámetros objeto de estudio corresponden a los obtenidos a partir de la técnica de identificación "Método de la Curva de Reacción" [1]: A. Ganancia estática del proceso (K), B. Constante de tiempo del proceso (τ), C. Tiempo de retardo o Tiempo muerto (t_0).

En este estudio los errores de modelado fueron expresados en porcentaje para cada variable involucrada en el proceso. Ejemplo: A. un parámetro sin errores de modelado corresponde al 100% del valor nominal, B. un parámetro con un error de modelado del -30% (error de estimación por defecto), corresponde al 70% del valor nominal. C. un parámetro con un error de modelado del +30% (error de estimación por exceso), co-

responde al 130% del valor nominal. Estos errores se pueden producir por varias causas, como son: por la exactitud de la instrumentación utilizada, por despreciar las dinámicas de orden superior no consideradas en el modelo usado para el diseño del controlador, por efecto de envejecimiento de los elementos de la planta que cambien los parámetros nominales de la misma, etc.

Aunque en la industria, normalmente los errores en la estimación de parámetros no son considerablemente grandes (menores de $\pm 30\%$ del valor nominal), a fin de garantizar robustez, este estudio comprende errores en un rango de hasta $\pm 70\%$.

Otra característica fundamental de los procesos, tomada en cuenta en este estudio, es la relación de controlabilidad (r), la cual es entendida, como la relación existente entre el tiempo muerto t_0 , y la constante de tiempo τ , ecuación (8), la cual es factor determinante para la selección de la estructura del controlador a utilizar.

$$r = \frac{t_0}{\tau} \quad (8)$$

Se conoce que el control por modo deslizante en estudio presenta un mejor desempeño que las técnicas tradicionales de control [1], cuando la razón de controlabilidad se encuentra entre 1 y 3.

4. Análisis de Robustez

Con el fin de analizar la robustez, se usó el siguiente procedimiento (en Matlab®-Simulink®):

1. Se implementó un modelo general de primer orden más tiempo muerto de parámetros K , τ , t_0 , para simular el proceso real.
2. Se implementó el controlador SMCr en estudio, considerando como variables: (K_M) Ganancia estática estimada del proceso, (τ_M) Constante de tiempo estimada del proceso, (t_{0M}) Tiempo muerto estimado del proceso y los parámetros de sintonización (λ_0 , λ_1 , K_D , δ) a partir de los valores nominales del modelo del proceso (K_M , τ_M y t_{0M}).
3. Se elaboró un programa que realiza las siguientes funciones:
 - 3.1. Genera todas las combinaciones posibles de los valores estimados de los parámetros

característicos, implicando los posibles errores de modelado.

$$K_M \in \{0.3, 0.4, \dots, 1, 1.1, 1.2, \dots, 1.6, 1.7\} * K$$

(Errores entre -70% a $+70\%$)

$$\tau_M \{0.3, 0.4, \dots, 1, 1.1, 1.2, \dots, 1.6, 1.7\} * \tau$$

(Errores entre -70% a $+70\%$)

$$t_{0M} \{0.3, 0.4, \dots, 1, 1.1, 1.2, \dots, 1.6, 1.7\} * t_0$$

(Errores entre -70% a $+70\%$)

3.2. Aplica la combinación de errores de modelado a procesos cuya constante de tiempo dominante oscila entre 0.25 y 12, $\tau \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1, 2, \dots, 10, 11, 12\}$ unidades de tiempo. Para cada valor de τ calcula el valor de t_0 , tal que cumpla con el conjunto predeterminado de razones de controlabilidad $\{2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$, generando así el conjunto de combinaciones de modelos a estudiar; lo cual abarca una gran diversidad de procesos que pueden presentarse en aplicaciones industriales. En otras palabras, se fija el valor de los parámetros del proceso controlado y se varían los parámetros del controlador, para determinar cuánto es la máxima desviación que se puede tolerar manteniendo el sistema (controlador-proceso) estable, en función de los errores de modelado.

3.3. Determina si el resultado de una simulación se comporta de una manera estable o no. El desempeño del sistema es probado en cada simulación mediante una perturbación aditiva tipo escalón de amplitud 20% de la variable controlada. El criterio utilizado es determinar si la respuesta del sistema contiene oscilaciones crecientes, en este caso se considera inestable, cuantificándolo mediante los máximos absolutos en el periodo estudiado. En caso contrario, al obtener oscilaciones decrecientes el sistema es considerado estable. El criterio utilizado para este fin se expresa en la Figura 1.

3.4. Agrupa el conjunto de resultados de cada modelo y lo expresa de forma grafica: La Figura 2 muestra el **número de simulaciones con comportamientos inestables, es decir simulaciones inestables número**

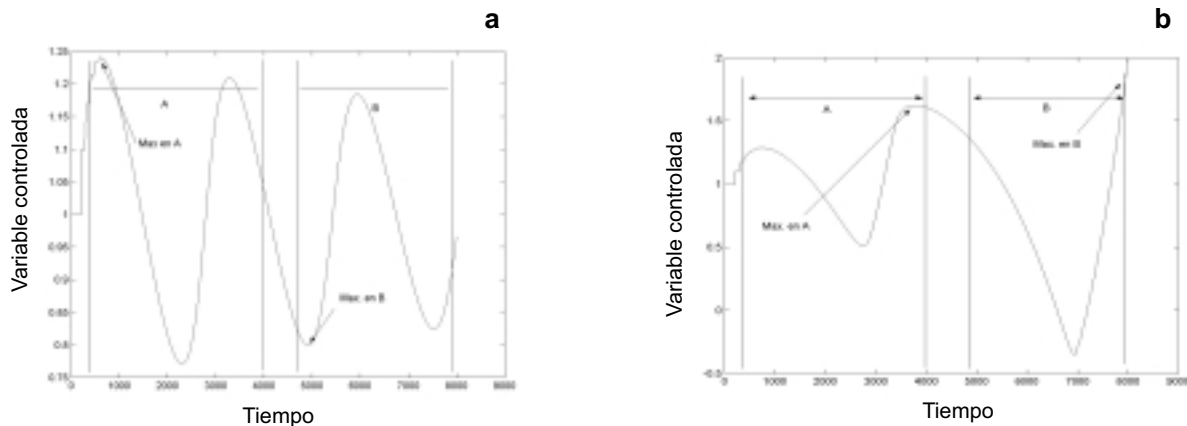


Figura 1. Comportamiento de un sistema: (a) Estable, (b) Inestable.

\mathbf{r}_0 , en el eje de las abscisas y en el eje de las ordenadas se representa el error de estimación cometido para cada simulación, en cada uno de los tres parámetros del modelo. Se decidió presentar las simulaciones con comportamientos inestables, dado a que su número es menor que las simulaciones con comportamientos estables. e_K representa variaciones en la ganancia estática estimada K_M . e_r representa variaciones en la constante de tiempo τ_M . e_{t_0} representa variaciones en el tiempo muerto t_{0M} . Todas estas variaciones van desde 30% hasta 170% del valor nominal, lo cual implica que para la sintonización del controlador se realizaron simulaciones desde 0.3 hasta un máximo de 1.7 veces el valor nominal del parámetro en cuestión.

La manera de interpretar estos datos se resume en el siguiente ejemplo:

Se quiere saber si para el proceso cuyos parámetros nominales son $K = -1$, $\tau = 3$ y $t_0 = 9$, las cuales aparecen en la gráfica como \mathbf{K} , \mathbf{T} y \mathbf{T}_0 . El sistema en lazo cerrado es inestable cuando se han cometido errores de modelado de -50% en K , -30% en τ y $+30\%$ en t_0 (Figura 2). Es conveniente destacar que este ejemplo representa un caso desfavorable para el sistema controlado por el SMCr, dado que el número de simulaciones inestable es mayor cuando se tienen simultáneamente errores de estimación por defecto en K y τ y por exceso en t_0 .

Para ubicar este caso en la gráfica, primero se debe expresar los errores de estimación en

porcentajes del valor nominal, es decir: -50% corresponde a $50\%K$, -30% corresponde a $70\%\tau$ y $+30\%$ corresponde a $130\%t_0$. Luego, se procede a buscar estos valores alineados de manera vertical sobre la figura y si está marcado (*), se dice que el comportamiento del sistema es inestable, de lo contrario es estable. Es decir se ubica primero el error en ganancia estática, $e_K = 50$, luego sobre todo el rango de simulaciones en que coincide este valor se ubica el error en constante de tiempo, $e_r = 70$, finalmente para todos los pares coincidentes se revisa el gráfico del error en tiempo muerto y si se encuentran puntos para los cuales $e_{t_0} = 130$, se considera que para este caso el sistema se hace inestable. Para este ejemplo, se identifica una simulación con un comportamiento inestable, por lo que se encuentran puntos con estas tres coordenadas (Figura 3).

5. Análisis de Datos

En esta sección, se relacionan los datos recolectados con el objetivo de generar un conjunto de ecuaciones, que generalicen los casos posibles que se encuentre dentro de los límites de estabilidad en estudio. Esto permite lograr el análisis de robustez del SMCr mediante el uso de funciones que se evalúan en puntos específicos de operación para obtener así resultados concretos, y no mediante el análisis de gráfico, cuya manipulación trae como consecuencia un trabajo arduo, dado que no es fácil agrupar todas las variables involucradas dentro de una misma figura, y en caso de que se desarrollen dichas gráficas sería necesario realizar una gráfica para cada proceso.

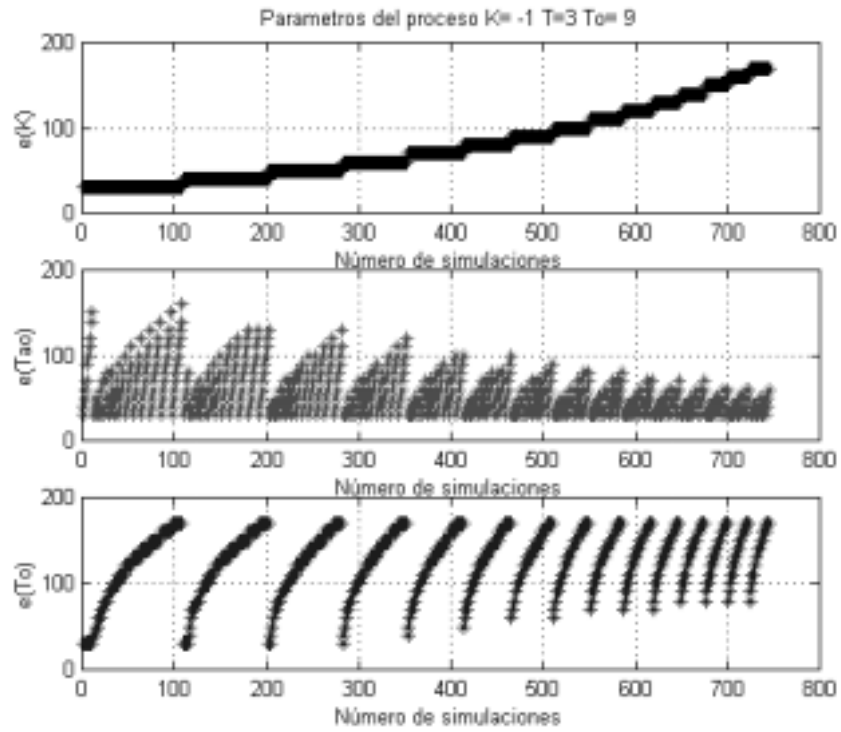


Figura 2. Resultados para un modelo con $K = -1$, $\tau = 3$, $t_o = 9$.

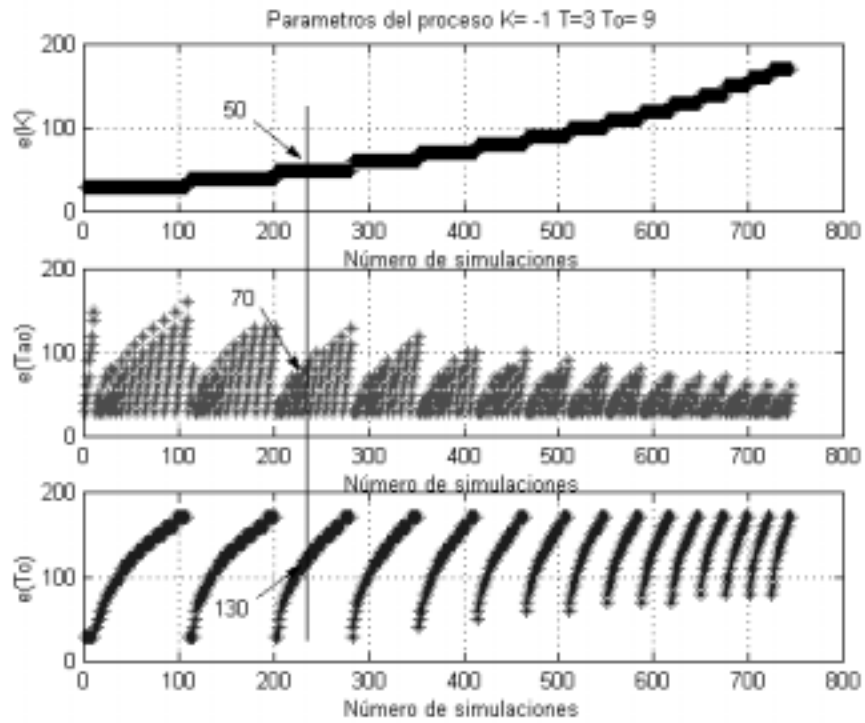


Figura 3. Metodología para la interpretación de los datos recopilados.

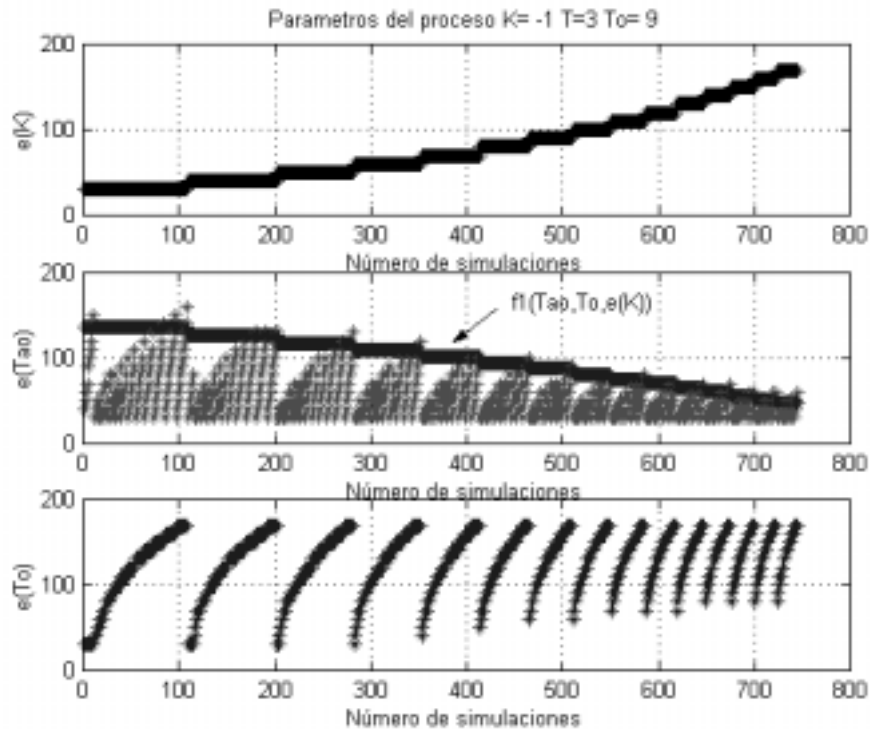


Figura 4. Ajuste de curva \hat{e}_t , sobre los valores máximos de e_t .

Estas funciones se obtuvieron mediante el siguiente procedimiento:

Primero se obtuvo un rango preliminar de error en la constante de tiempo e_t , en función del error de estimación en la ganancia estática e_K y la razón de controlabilidad r . Para esto, dado que todas las gráficas tienen una tendencia similar, se logró relacionar el decremento que presenta el error de estimación en la constante de tiempo a medida que incrementa el error de la ganancia estática mediante una función exponencial decreciente (\hat{e}_t), como se muestra en la Figura 4. Los coeficientes de esta función, ecuación (9), están determinados por e_K y r . Es de hacer notar, que esta función establece un límite superior, cota, dentro de la cual no se garantiza por completo la estabilidad del sistema.

$$\hat{e}_t = A(r)e^{-B(r, e_K)} \quad (9)$$

Este resultado fue refinado utilizando técnicas de interpolación con funciones exponenciales, además de funciones polinomiales de segundo orden. La ecuación (10) muestra las expresiones

obtenidas para los coeficientes $A(r)$ y $B(r, e_K)$, respectivamente:

$$\begin{aligned} A(r) &= 0.5005r + 0.1906 \\ B(r, e_K) &= (-0.0673r^2 + 0.3381r + 0.3075) \\ &\quad \left(\frac{100 - e_K}{100} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Debido a la necesidad de definir aún más la región de inestabilidad, de manera gráfica se establecen curvas más cercanas a los límites de las regiones en estudio, con el fin de encontrar relaciones entre las variables involucradas (Figura 5).

Para acotar estas regiones inestables del sistema controlado, se procede a determinar de manera matemática una función que represente cada una de las trayectorias de la nueva curva de ajuste, como se procedió a ajustar la primera curva. El comportamiento de cada una de estas trayectorias tiende a semejarse en muchos de los casos estudiados, tendencia que se toma en cuenta para determinar la trayectoria, así como también asociar la función anteriormente encontrada con

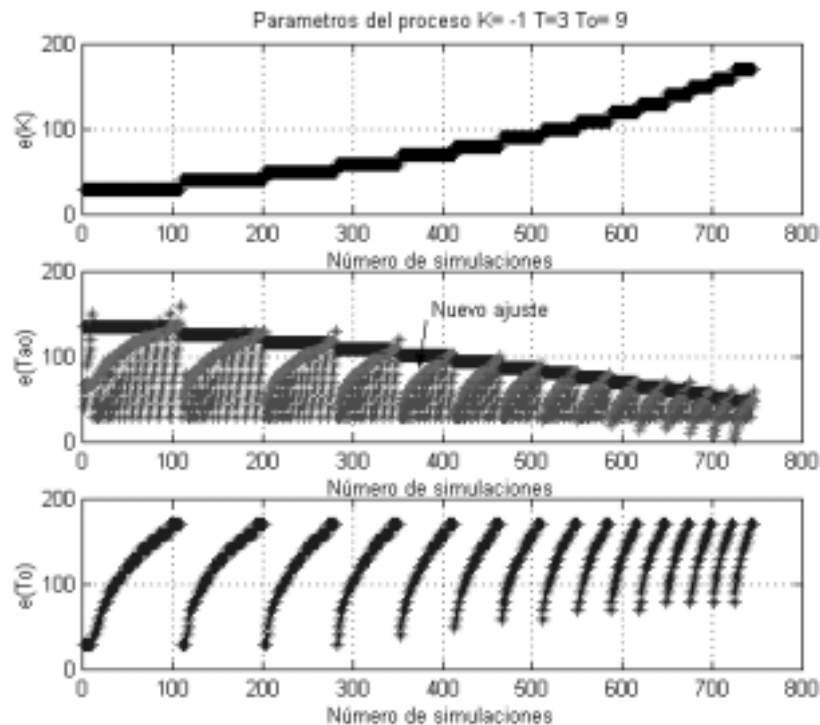


Figura 5. Delimitación de la región inestable a partir de las curvas de ajuste.

el inicio de la nueva función de ajuste. Esta curvatura es sustituida por una recta donde su pendiente varía a medida que cambia la razón de controlabilidad del proceso. Para minimizar el error entre la trayectoria de la inestabilidad y la recta, se utilizó una función de costos, encontrándose así una función, ecuación (11), que representa dicha trayectoria.

$$\tilde{e}_\tau(\hat{e}_\tau, r, e_{t_0}) = [100 - (100 \cdot \hat{e}_\tau - (0.1629r^2 - 0.8071r + 1.4583) \cdot (70 - e_{t_0}))] \quad (11)$$

6. Aplicación Práctica

Se tiene un proceso industrial, cuya dinámica puede ser representada por un modelo de primer orden más tiempo muerto con los siguientes parámetros: ($K = -2$ ST/SC, $t_0 = 8.3$ s, $\tau = 2.1$ s), parámetros que deben ser conocidos claramente para poder establecer una referencia cuando se evalúa al controlador, en la cuantificación de su robustez. Además, se conoce que en la obtención de estos parámetros se pueden cometer errores

para la ganancia estática y el tiempo muerto de 10% y 20%, respectivamente. Esclarecer bajo que condiciones de error en la constante de tiempo el sistema controlado por el SMCr tendrá un comportamiento estable.

Aplicando la ecuación (9), con los coeficientes dados en la ecuación (10), se obtiene \hat{e}_τ ($\hat{e}_\tau = 1.2463$). Seguidamente, se procede a determinar \tilde{e}_τ , mediante la ecuación (11):

$$\tilde{e}_\tau(1.2463, 3.95, 20) = [100 - 100 \cdot 1.2463 - (0.1629 \cdot 3.95^2 - 0.8071 \cdot 3395 + 1.4583) \cdot (70 - 20)] \quad (12)$$

$$\tilde{e}_\tau(1.2463, 3.95, 20) = 15.93 \quad (13)$$

Analizando el valor de $\tilde{e}_\tau = 15.93\%$, se tendrá una región estable si se cometen errores de estimación en la constante de tiempo menores al $\pm 15.93\%$, tomando en consideración que se estiman errores en la ganancia estática de 10%, y del 20% en el tiempo muerto.

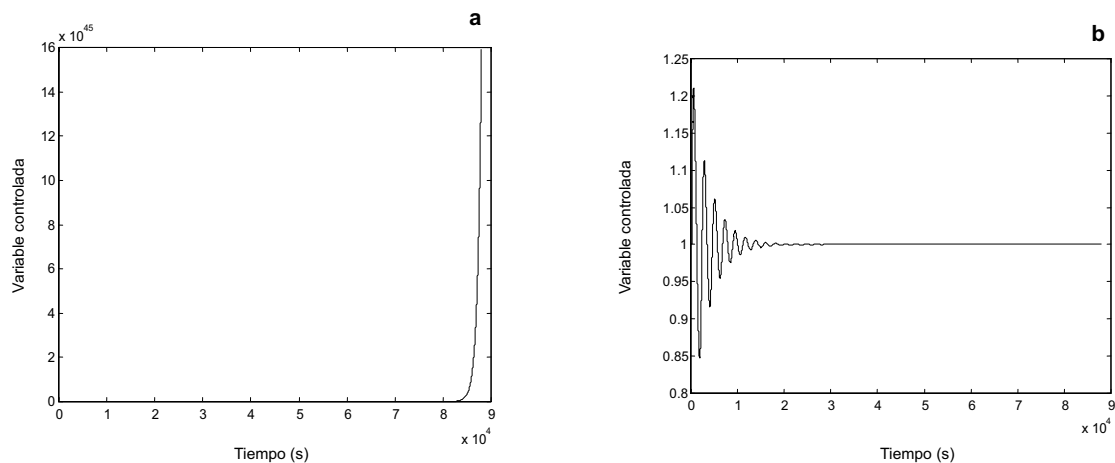


Figura 6. Respuesta del sistema controlado ante errores de modelado
(a) Sistema inestable, (b) Sistema estable.

Analizando un poco más el valor resultante de $\tilde{\tau}$, es de hacer notar que dado a la no-linealidad de las regiones de estabilidad, el error en la estimación de la constante de tiempo puede ser cometido en un rango mayor si el sentido del error de los parámetros restantes no es el más desfavorable. Este resultado es comprobado mediante una simulación, donde se incluyen errores de modelado cercanos al límite calculado. En la Figura 6(a) se puede observar, como al aplicar un error de 20% por defecto en la constante de tiempo, el sistema en lazo cerrado presenta un comportamiento inestable. Esto es consistente con los cálculos, dado que el error de estimación considerado es mayor que el valor máximo permitido (15.93%). De manera contraria, en la Figura 6(b) se logra observar, como al aplicar un error de 10% por defecto en la constante de tiempo, el sistema en lazo cerrado presenta un comportamiento estable. Esto demuestra la confiabilidad del resultado arrojado por la función $\tilde{\tau}$, para discriminar ante errores cometidos en la constante de tiempo.

7. Conclusiones

El procedimiento propuesto permitió identificar patrones de comportamiento mediante los cuales se pudieron crear relaciones para la determinación de las regiones de estabilidad. Estas mostraron ser de gran utilidad y de fácil manejo

Los errores de estimación de la ganancia influyen directamente sobre la estabilidad del pro-

ceso. Para errores de estimación por exceso, el controlador responde lentamente y por ende el sistema controlado tiende a ser menos agresivo y estable. En el caso contrario, para errores por defecto, el controlador aumenta su agresividad y tiende a ser inestable.

Los errores en la constante de tiempo y/o el tiempo muerto, influyen en el desempeño del controlador, este desempeño se ve mayormente afectado cuando se comete una estimación por defecto en la constante de tiempo y al mismo tiempo una estimación por exceso en tiempo muerto. Lo cual demuestra que se pierde robustez a medida que se produce un aumento de la razón de controlabilidad.

Se comprobó que hasta un 15% de error de modelado en cada una de las variables, se garantiza la estabilidad del sistema, sin embargo, cuando los errores de modelado cometidos en la ganancia estática oscilan entre un 15% y 25% no es posible garantizar la estabilidad. Esta conclusión no es extensible a los parámetros restantes, constante de tiempo y tiempo muerto.

Referencias Bibliográficas

1. Camacho O., C. Smith, (2000), Sliding Mode Control: An Approach to Regulate Nonlinear Chemical Processes. ISA Transactions, 39, pp. 205-218.
2. DeCarlo R., Zak S. and Matthews G. (1988). Variable Structure control of nonlinear mul-

- tivariable systems: A Tutorial. In: Proceedings of the IEEE, Vol. 76, N° 3, pp. 212-232.
3. Utkin, V.I., (1977), "Variable Structure Systems with Sliding Modes", Transactions of IEEE on Automatic Control, AC- 22. Pp. 212-222.
 4. Slotine, J.J., y W. Li, (1991), Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall, New Jersey.
 5. Zinober, A. S. I., (1994). Variable Structure and Liapunov control, Spring-Verlag, London.
 6. Irwin Guttman, s.s. Wilks and J. Stuart Hunter; (1965), Introductory Engineering Statistics, John Wiley & Sons, New-York.

Recibido el 02 de Junio de 2003

En forma revisada el 1° de Diciembre de 2003