

# Numerical study of transverse flow through banks of tubes using curvilinear coordinates

Jesús Rojo<sup>1</sup>, José Rincón<sup>2</sup> y Miguel Reyes<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad Nacional Experimental del Táchira, San Cristóbal, Venezuela. E-mail: jrojo@telcel.net.ve

<sup>2</sup>Escuela de Ingeniería Mecánica, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela. Telf-Fax 0261-7598794. E-mail: jrincón@luz.ve

<sup>3</sup>Departamento de Termodinámica y Fenómenos de Transferencia, Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela. E-mail: mareyes@usb.ve

## Abstract

The scope of this work is to develop a numerical method to calculate the laminar flow through tube arrangements such as those in heat exchangers. To achieve this purpose, a non-staggered grid arrangement in curvilinear coordinates is used. The differential equations that describe the flow and heat transfer are transformed and expressed in a conservative form. The discretisation of the governing equations is carried out using the integration by means of the finite volumes method. The solution procedure uses the Cartesian components of velocity as dependent variables and the SIMPLER method to attain the pressure-velocity field coupling. Convective terms are approximated by using a high order treatment. The numerical model was applied to several cases in laminar regime and the predictions obtained were compared with experimental and numerical works of several bibliographic sources, showing that the method is stable and accurate for the range of Reynolds numbers studied.

**Key words:** Numerical study, banks of tubes, curvilinear coordinates.

## Estudio numérico de flujo transversal a través de un banco de tubos utilizando coordenadas curvilíneas

### Resumen

El objetivo de este trabajo es desarrollar un método numérico para calcular el flujo laminar a través de arreglos de tubos tales como los que se encuentran en los intercambiadores de calor. Para lograr este propósito, se utiliza una malla no-desplazada en coordenadas curvilíneas y las ecuaciones que describen el flujo se resuelven mediante el método de los volúmenes finitos. El procedimiento de solución utiliza las componentes cartesianas de velocidad como variables dependientes y un método similar al SIMPLER para lograr el acoplamiento de los campos de velocidad y de presión. Los términos convectivos se aproximan utilizando un tratamiento de alto orden. El modelo numérico se aplica a varios casos en régimen laminar y los resultados obtenidos se comparan con trabajos experimentales y numéricos de varias fuentes, demostrando que el método es estable y preciso para el rango de números de Reynolds considerados.

**Palabras clave:** Estudio numérico, banco de tubos, coordenadas curvilíneas.

## Introducción

El estudio de flujo normal a través de un banco de tubos es de gran interés en el diseño de intercambiadores de calor, los cuales forman parte de diferentes equipos industriales. Para el diseño óptimo de dichos equipos se necesita información de las propiedades importantes del flujo, tales como la caída de presión, tasas de transferencia de calor locales y promedio, distribución de velocidades y temperaturas, etc. La forma tradicional de obtener esa información es a través de medidas experimentales en un modelo a escala del banco de tubos en consideración. Sin embargo, este procedimiento resulta muy oneroso, debido a que para cada geometría considerada se necesita construir un modelo nuevo. Uno de los estudios experimentales de flujo laminar a través de banco de tubos, más conocidos, es la investigación realizada por Bergelin y sus colaboradores [1]. El otro método que se utiliza para obtener la información requerida en el diseño de intercambiadores de calor, consiste en la solución numérica de las ecuaciones de masa, momentum y energía. Debido al desarrollo vertiginoso de la arquitectura de las computadoras, la solución numérica se ha convertido en una excelente alternativa para resolver este tipo de problemas y es mucho más económica y rápida que la experimental. Además, cuando se combina con los datos experimentales constituye una herramienta muy eficiente en el diseño, simulación y optimización de estos dispositivos. Entre los estudios numéricos de flujo cruzado completamente desarrollado a través de un banco de tubos se encuentran los de las referencias [1-7]. Le Feuvre [3] resolvió las ecuaciones de conservación (en forma de vorticidad-función de corriente) numéricamente y utilizó una malla en coordenadas cartesianas. Massey [4] utilizó una combinación de una malla en coordenadas polares y cartesianas para la predicción del flujo y la transferencia de calor en bancos de tubos para varios espaciamientos. Ho y Chen [5] y Antonopoulos [6] emplearon sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales para resolver las ecuaciones numéricamente. Wung y Chen [7] emplearon sistemas de coordenadas curvilíneas y el método finito analítico para analizar la convección forzada en bancos de tubos en línea y escalonados para diferen-

tes valores de Reynolds y una relación entre el paso y el diámetro de los tubos igual a 2.

A pesar de que las ecuaciones diferenciales gobernantes expresadas en función de las coordenadas curvilíneas son más complejas que en coordenadas cartesianas, constituyen una herramienta muy poderosa y flexible para resolver problemas de campos de flujo asociados con geometrías complejas como es el caso de flujo a través de bancos de tubos.

Este trabajo tiene como objetivo fundamental, presentar y validar un método para simular el flujo laminar que fluye externamente a través de un banco de tubos, utilizando coordenadas curvilíneas (no-ortogonales) y mallas no escalonadas. Las ecuaciones gobernantes se resuelven numéricamente utilizando el método de los volúmenes de control finitos y el algoritmo SIMPLER

## Planteamiento del Problema

Como la geometría que se muestra en la Figura 1(a) contiene módulos geométricos idénticos, se considera que el flujo es completamente desarrollado en forma periódica y el campo de velocidades se repite en cada módulo. Algunas soluciones numéricas de este tipo de flujo se encuentran en las referencias [8-11]. El dominio de solución está representado por la mitad del módulo de la Figura 1, debido a la naturaleza simétrica del problema.

Para flujo completamente desarrollado con periodicidad, las componentes de velocidad se comportan en forma periódica, es decir:

$$u(x, y) = u(x + S_L, y) = u(x + 2S_L, y) = \dots \quad (1)$$

$$v(x, y) = v(x + S_L, y) = v(x + 2S_L, y) = \dots \quad (2)$$

y la presión se puede dividir en dos componentes:

$$P(x, y) = -\Psi x + P(x, y) \quad (3)$$

donde  $\Psi$  es una constante que representa el gradiente de presión global en el dominio y  $P(x, y)$  se comporta en forma periódica, es decir:

$$P(x, y) = P(x + S_L, y) = P(x + 2S_L, y) = \dots \quad (4)$$

El número de Reynolds y el factor de fricción se definen como:

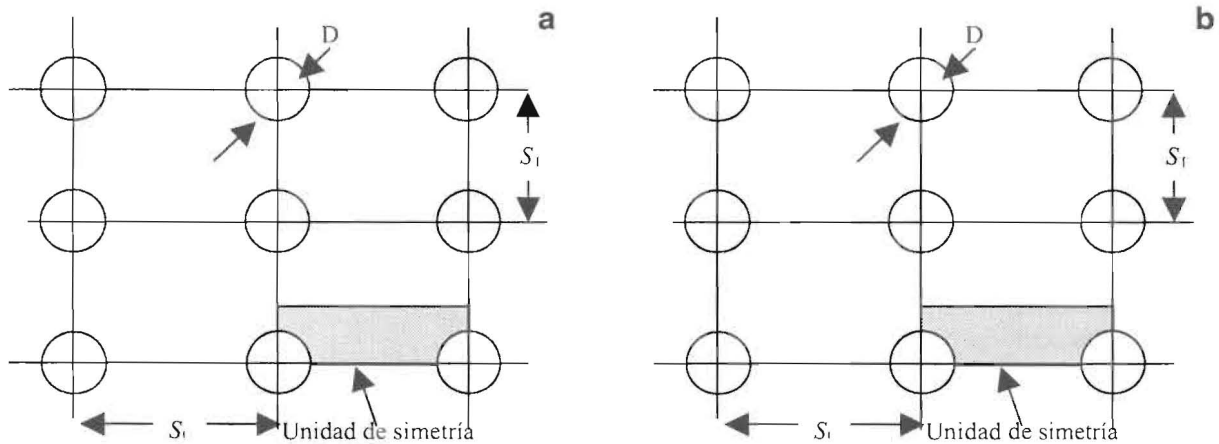


Figura 1. Dominio de solución. (a) Arreglo de tubos en línea. (b) Arreglo de tubos escalonados.

$$Re = \frac{\rho \bar{u} D}{\mu} \quad (5)$$

$$Cf = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho \bar{u}^2} \quad (6)$$

Donde  $\bar{u}$  es la velocidad promedio en la sección mínima del dominio y  $\Delta p$  es la caída de presión en el mismo.

Las ecuaciones gobernantes, en dos dimensiones, para flujo laminar completamente desarrollado, con periodicidad y propiedades constantes, se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \Psi - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

Las ecuaciones (1), (2), y (3), describen las condiciones de borde en los planos de entrada y de salida del dominio de solución. En las paredes de los tubos las componentes de velocidad son iguales a cero y en los planos de simetría son válidas las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0 \quad (10)$$

Estas ecuaciones se pueden representar como una ecuación general de transporte, en función de la variable escalar  $\phi$ , de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S(x, y) \quad (11)$$

### Transformación de las Ecuaciones Gobernantes

Para transformar la ecuación general de transporte desde el espacio físico en coordenadas cartesianas  $(x, y)$  al computacional  $(\xi, \eta)$ , donde  $\xi$  y  $\eta$  son las variables independientes en el sistema de coordenadas curvilíneas, se utilizan las derivadas parciales de la variable escalar  $\phi$ , en coordenadas cartesianas  $\partial \phi / \partial x_i$ , las cuales se obtienen mediante la regla de derivación en cadena, de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (13)$$

Sustituyendo las ecuaciones (12) y (13) en la ecuación (11), se obtiene la ecuación general de transporte transformada, en forma conservativa, en el nuevo sistema de coordenadas  $(\xi, \eta)$ :

$$\frac{\partial(\rho U\phi)}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta}(\rho V\phi) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\Gamma G^{zz}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\Gamma G^{yy}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right] + \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\Gamma G^{zy}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\Gamma G^{yz}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right] + S(\xi, \eta) \tag{14}$$

donde

$$U^z = J(\xi_x u + \xi_y v) \quad ; \quad U^y = J(\eta_x u + \eta_y v) \tag{15}$$

$$G^{zz} = Jg^{zz} = J(\xi_x^2 + \xi_y^2) \tag{15}$$

$$G^{zy} = Jg^{zy} = J(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) = G^{yz} \tag{16}$$

$$G^{yy} = Jg^{yy} = J(\eta_x^2 + \eta_y^2) \tag{16}$$

J es el Jacobiano de la transformación:

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \tag{17}$$

### Solución numérica

En el esquema numérico usado en este trabajo, la ecuación de presión se obtuvo combinando la ecuación de continuidad y las ecuaciones de momentum como en el método SIMPLER de Patankar [12]. Además se utilizó una malla no-escalonada con todas las variables ubicadas en el centro del volumen de control y las componentes cartesianas de la velocidad en las ecuaciones de momentum. Para resolver el problema de las oscilaciones debidas al desacople de la velocidad y de la presión, en mallas no-escalonadas, se utilizó un esquema de interpolación de las ecuacio-

nes de momentum, parecido al de Rhie y Chow [13]. De esta forma los gradientes de presión se incluyen en el esquema, permitiendo que el acople entre la velocidad y la presión sea fuerte y la convergencia de las soluciones sea estable.

Integrando la ecuación (14) en el volumen de control del dominio computacional de la Figura 2(b) y suponiendo una fórmula de interpolación para la variable  $\phi$  se obtiene la ecuación discretizada, la cual tiene la siguiente forma:

$$a_p \phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \tag{18}$$

donde:

$$a_p = a_{nb} - S_p \Delta_x \Delta_y \tag{19}$$

$$b = b_{NO} + S_c \Delta_x \Delta_y \tag{20}$$

$$b_{NO} = \left[ \Gamma G^{zy} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_e^w + \left[ \Gamma G^{yz} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_n^s \tag{21}$$

El índice  $nb$  se refiere a los nodos vecinos (E,W,N,S) que rodean al nodo central P (Figura 2). Los coeficientes,  $a_{nb}$ , están formados por la parte convectiva y la difusiva. En este trabajo, se adopta el mismo tratamiento del término convectivo usado por Rincón [14], es decir, un esquema aguas arriba de primer orden, el cual servirá de base para construir un esquema de alto orden. Por lo tanto, utilizando el esquema aguas arriba de primer orden y suponiendo un perfil lineal para la variable en la discretización de los términos difusivos, se obtiene la forma expandida de los coeficientes  $a_{nb}$ :

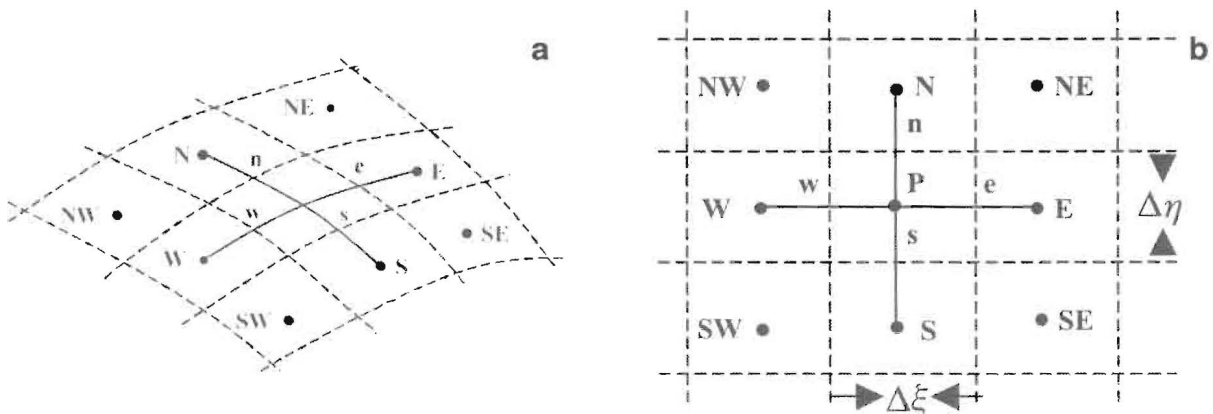


Figura 2. Representación de la malla. (a) Dominio físico. (b) Dominio computacional.

$$\alpha_e = \frac{G_e^{\xi\xi} \Gamma_e \Delta \eta}{(\partial \xi)_e} + [-(\rho U^{\xi})_e \Delta \eta, 0] \quad (22)$$

$$\alpha_w = \frac{G_w^{\xi\xi} \Gamma_w \Delta \eta}{(\partial \xi)_w} + [-(\rho U^{\xi})_w \Delta \eta, 0] \quad (23)$$

$$\alpha_n = \frac{G_n^{\eta\eta} \Gamma_n \Delta \xi}{(\partial \eta)_n} + [-(\rho U^{\eta})_n \Delta \xi, 0] \quad (24)$$

$$\alpha_s = \frac{G_s^{\eta\eta} \Gamma_s \Delta \xi}{(\partial \eta)_s} + [-(\rho U^{\eta})_s \Delta \xi, 0] \quad (25)$$

Los gradientes en los términos no ortogonales se calculan en los nodos utilizando fórmulas de interpolación apropiadas. Por lo tanto, la ecuación (21) se puede escribir de la siguiente forma:

$$b_{NO} = G_e^{\xi\eta} \Gamma_e \frac{\phi_{ne} - \phi_{se}}{\Delta \eta} - G_w^{\xi\eta} \Gamma_w \frac{\phi_{nw} - \phi_{sw}}{\Delta \eta} + G_n^{\xi\eta} \Gamma_n \frac{\phi_{ne} - \phi_{se}}{\Delta \xi} \quad (26)$$

La ecuación de corrección de presión se obtuvo en forma similar al método SIMPLER, en este algoritmo la presión se actualiza a través de una ecuación para la presión y la velocidad cambia por medio de una ecuación de corrección de presión.

La malla se generó usando el programa de generación de mallas CAF2D/GENGRID [15] y las ecuaciones algebraicas resultantes del proceso de discretización se resolvieron utilizando el algoritmo de la Matriz Tridiagonal Cíclico [16]. Se utilizaron factores de relajamiento de 0.9 y 0.2 para las velocidades y la presión, respectivamente.

## Resultados

Se analizaron tres tipos de arreglos: el triangular equilátero, el cuadrado escalonado y el arreglo en línea cuadrado, con  $1.25 \leq P/D \leq 2.0$

El número de Reynolds, se varió hasta 150.

Para las pruebas de dependencia de la malla se seleccionaron como indicadores de los cambios debido al refinamiento de la malla, la longitud de recirculación, el perfil de velocidades en la sección de entrada o de salida del dominio y el coeficiente de caída de presión. Para el caso de tubos en línea, se seleccionó un arreglo con  $S_T \times S_L = 2.0 \times 2.0$  y se obtuvieron soluciones para  $Re=100$ , usando mallas de  $30 \times 30$ ,  $40 \times 40$  y  $50 \times 50$  nodos. Una malla de  $50 \times 50$  da prácticamente los mismos resultados que una malla de  $40 \times 40$  y los cambios en la caída de presión y la longitud de recirculación son menores del 4%, tal como se muestra en la Figura 3(a). Por lo tanto, se seleccionó la malla de  $40 \times 40$  para el análisis. En el caso de tubos escalonados, la prueba de dependencia se realizó utilizando un arreglo de  $P/D=2$  y un número de Reynolds de 100, usando mallas de  $40 \times 20$ ,  $60 \times 30$  y  $80 \times 40$  nodos. En este caso, se encontró que la malla de  $60 \times 30$  es suficiente para los propósitos del análisis en este tipo de arreglo, como se muestra en la Figura 3(b).

El efecto del número de Reynolds en el patrón de flujo de puede observar en las Figuras 4 y 5 para bancos de tubos en línea y escalonados respectivamente. En el caso de tubos en línea, para  $Re=10$  y  $P/D=1.25$  (Figura 4(a)), las líneas de corriente son prácticamente simétricas en la mitad de la sección transversal del dominio y los puntos de separación y de ataque se encuentran

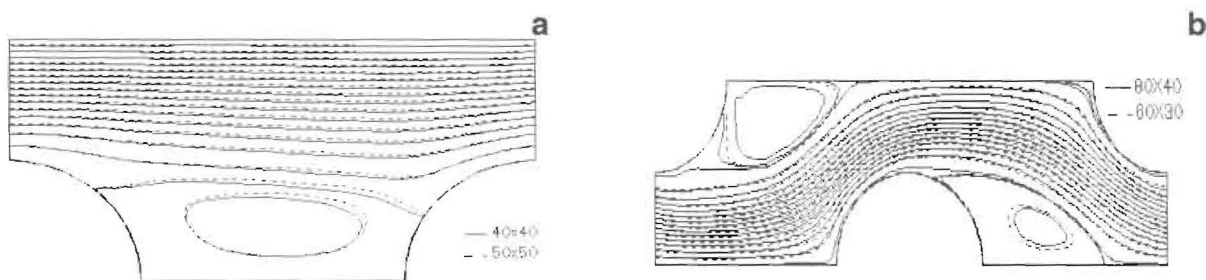


Figura 3. Efecto del refinamiento de la malla en el patrón de flujo en banco de tubos con  $P/D = 2$  y  $Re = 100$ . (a) Banco de tubos en línea. (b) Banco de tubos escalonados.

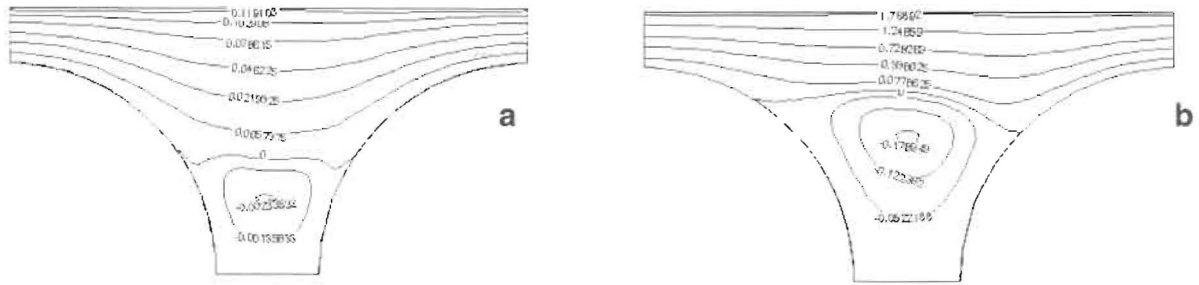


Figura 4. Líneas de corriente en flujo a través de un banco de tubos en línea para  $P/D = 1.25$ . (a)  $Re = 10$ . (b)  $Re = 150$ .



Figura 5. Líneas de corriente en flujo a través de un banco de tubos escalonados cuadrados. (a)  $P/D = 2$  y  $Re = 10$ . (b)  $P/D = 2$  y  $Re = 100$ .

aproximadamente en las mismas posiciones relativas, debido a la influencia de la difusión para este número de Reynolds, el cual es bajo. Cuando el Reynolds se incrementa a 150 (Figura 4(b)), la recirculación incrementa en tamaño, se destruye la simetría y el punto de ataque se ubica por debajo del punto de separación. En este caso el transporte está dominado por la convección

Los patrones de flujo, para arreglos escalonados con  $P/D = 2$  y  $Re=10$  y  $100$ , se presentan en las Figuras 5(a) y 5(b), respectivamente. En este tipo de arreglos se observa que con números de Reynolds bajos no aparece recirculación, mientras que con  $Re=100$  aparece un gran vórtice. En el caso de arreglos de tubos escalonados equiláteros, el comportamiento es similar al de los escalonados cuadrados. La variación del coeficiente de caída de presión  $C_p$  con el número de Reynolds, para varios  $P/D$ , se muestra en las Figuras 6(a), 6(b) y 7, para arreglos de tubos en línea, escalonados cuadrados y triangulares equiláteros, respectivamente, así como las predicciones experimentales de Bergelin [1]. Los resultados del coeficiente de presión obtenidos en el presente trabajo para arreglos en línea y escalonados cuadrados (Figuras 6(a) y 6(b)), concuerdan bastante bien con los de Massey y Launder4 y los

de Bergelin. En el caso de arreglos escalonados equiláteros (Figura 7), las predicciones obtenidas concuerdan bastante bien con los de Bergelin. Sin embargo, para el caso de  $P/D=1.5$ , se observan diferencias bastante apreciables a partir de  $Re = 100$ . Estas discrepancias también se reflejaron en el trabajo de Antonopoulos [6].

En la Figura 8 se compara la distribución del esfuerzo de corte obtenida en este trabajo con las obtenidas por Le Feuvre [3] y Antonopoulos [6] y se observa la excelente coincidencia con los resultados obtenidos por estos investigadores. También se observa como la distribución del esfuerzo de corte es simétrica cerca de la parte superior (cima) del tubo, con pequeñas regiones negativas del mismo en la zona de recirculación.

### Conclusiones

El procedimiento numérico desarrollado en este trabajo fue validado ampliamente con datos experimentales y otros estudios numéricos, considerando el flujo laminar. Se puede concluir que el método numérico predice en forma eficiente y precisa, el flujo en diferentes arreglos de bancos de tubos, considerando una gran variedad de situaciones. Por lo tanto, se puede utilizar como

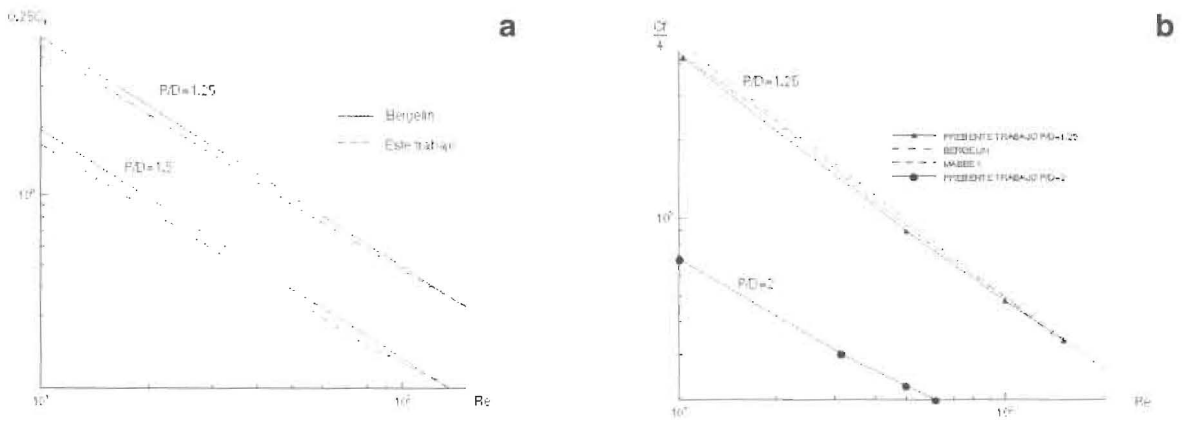


Figura 6. Coeficiente de caída de presión para varias relaciones de P/D. a) Arreglos en línea. (b) Banco de tubos escalonados cuadrados.

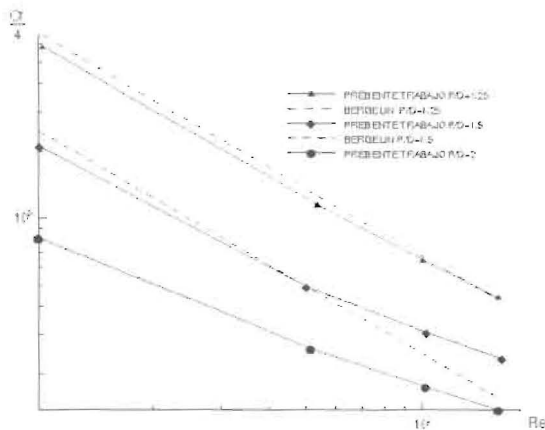


Figura 7. Coeficiente de caída de presión para arreglos escalonados equiláteros a diferentes P/D.

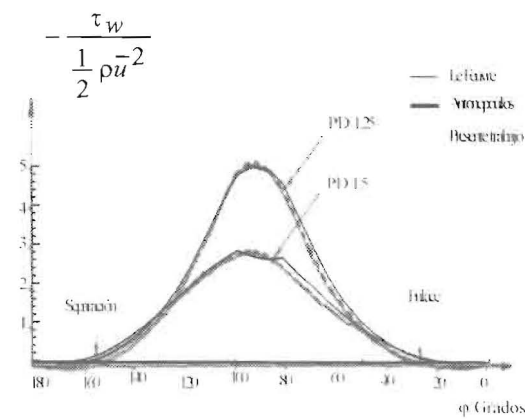


Figura 8. Distribución del esfuerzo de corte local en banco de tubos en línea con diferentes P/D y  $Re = 10$ .

herramienta en el diseño industrial de intercambiadores de calor.

El método cíclico implícito implementado, para la predicción del flujo cruzado completamente desarrollado, es eficiente y estable. Los resultados obtenidos se presentaron gráficamente y se compararon con datos experimentales y numéricos existentes en la literatura.

### Referencias Bibliográficas

1. Bergelin, O. P., Brown, G. A. y Doberstein, S. C., Heat Transfer and Fluid Friction during Flow across Banks of Tubes, part IV, Trans. ASME, Vol. 74, (1952), 953-960.
2. Thom, A., Apelt, C. J., Field Computations in Engineering and Physics, Van Nostrand, London, 1961.
3. Le Feuvre, R. F., Laminar and Turbulent Forced Convection Processes In-line Tube Banks, PhD thesis, Imperial College of Science and Technology, London University, 1973.
4. Massey, T.H and Launder, B.E., The Numerical Prediction of viscous Flow and Heat Transfer in tube Banks, Journal of Heat Transfer, Vol. 100 (1978), 565 - 571.
5. Ho, K. S. And Chen, C. J., Finite Analytic Numerical Solution of Laminar Convective Heat Transfer in Tube Bundles, ASME paper No 83-WA/HT-23 (1987) 234-245.
6. Antonopoulos, K., Heat Transfer in Tube Assemblies Under Conditions of Laminar Axial,

- Transverse and Inclined Flow, *Int.J. Heat and Fluid Flow*, Vol 5 (1985), 193-204.
8. Wung, T. and Chen, C., Finite Analytic Solution of Convective Heat Transfer for Tube Arrays in Crossflow: part I-Flow Field Analysis, *Journal of Heat Transfer*, Vol.111 (1989), 633-640.
  9. Patankar, S.V., Liu, C.H. and Sparrow, E.M., Fully Developed Flow and Heat Transfer in Ducts Having Streamwise-Periodic Variations of Cross-Sectional Area, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 99 (1977), 180-186.
  10. Kelkar, K., Choudhury, D. and Minkowycz, W., Numerical Method For the Computation of Flow in Irregular Domains that Exhibit Geometric Periodicity Using Nonstaggered Grids, *Numerical Heat Transfer, part B*, Vol. 31 (1997), 1-21.
  11. Sparrow, E. and Prata, A., Numerical Solutions for Laminar Flow and Heat Transfer in a Periodically Converging - Diverging Tube, with Experimental Confirmation, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 6 (1983), 441-461.
  12. Xin, R. and Tao, W., Numerical Prediction of Laminar Flow and Heat Transfer in Wavy Channels of Uniform Cross-Sectional Area, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 14 (1988), 465-481.
  13. Patankar, S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
  14. Rhie, C.M. and Chow, W.L., Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation, *AIAA Journal*, Vol. 21, N° 11 (1983), 1525-1532.
  15. Rincón, J., *Improving CFD Calculations for Turbomachinery Flows*, PhD. Thesis, Cranfield University, 1994.
  16. Sah, Jong-Youb and Chae, Eun-Mi., *CAF2D/GENGRID* version 1.1, Computer Applied Fluid Lab., Yeungnam Univ., Korea.
  17. Napolitano, M., A Fortran Subroutine for the Solution of Periodic Block-Tridiagonal Systems, *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 1 (1985), 11-15.

Recibido el 12 de Febrero de 2001

En forma revisada el 10 de Febrero de 2002