

Critical response to three-component earthquakes of arbitrary direction

Julio J. Hernández y Oscar A. López

IMME, Facultad de Ingeniería, Universidad Central de Venezuela, Apartado 50361, Caracas 1050-A, Venezuela. Correo-e: julher@cantv.net, oslopez@reacciun.ve.

Abstract

The method to calculate the critical responses, maximum and minimum, to three traslacional seismic components that may act with any orientation relative to the structural axes, is presented. Elastic behavior is assumed and the seismic action is specified by means of proportional response spectra for each component. The recent formulation GCQC3 is used to combine the responses to three seismic components, which is a generalization of the method CQC3 and allows that a principal seismic component can depart of the vertical direction. The critical responses to one seismic component are given by the square root of the maximum and minimum eigenvalues of the response matrix \mathbf{R} , whose elements are defined by means of the modal responses used in the well-known CQC. The critical responses to three seismic components of arbitrary directions are calculated combining the eigenvalues of \mathbf{R} and the intensities of the components. The method can also be applied to the determination of the critical responses when restrictions are imposed in the maximum inclination and/or intensity of a principal seismic component. The bounds of the quotient between the maximum response and the SRSS response, defined as the most unfavorable response to the principal seismic components acting along the structural axes, are presented.

Key words: Seismic components, response spectrum analysis, CQC3, GCQC3, eigenvalues.

Respuesta crítica a sismos tricomponentes de dirección arbitraria

Resumen

Se expone el método para calcular las respuestas críticas, máxima y mínima, ante tres componentes sísmicas traslacionales que inciden con cualquier orientación con respecto a los ejes estructurales. Se supone conducta elástica y el movimiento sísmico se especifica mediante espectros de respuesta proporcionales para cada componente. Se utiliza la reciente formulación GCQC3 para combinar las respuestas ante tres componentes sísmicas, la cual es una generalización del método CQC3 y permite que una componente sísmica principal pueda desviarse de la dirección vertical. Las respuestas críticas a una componente sísmica están dadas por la raíz cuadrada de los autovalores máximo y mínimo de la matriz de respuesta \mathbf{R} , cuyos elementos se definen mediante las respuestas modales utilizadas en el bien conocido método CQC. Las respuestas críticas ante tres componentes sísmicas de direcciones arbitrarias se calculan combinando los autovalores de \mathbf{R} y las intensidades de dichas componentes. El método puede aplicarse también a la determinación de las respuestas críticas cuando se impongan restricciones en la inclinación máxima y/o intensidad de una componente sísmica principal. Se presenta el acotamiento del cociente entre la respuesta máxima y la respuesta SRSS, siendo ésta la respuesta más desfavorable obtenida cuando las componentes sísmicas principales actúan según los ejes de la estructura.

Palabras clave: Componentes sísmicas, análisis espectral, CQC3, GCQC3, autovalores.

Introducción

La excitación sísmica de traslación puede representarse por tres componentes ortogonales, en general correlacionadas entre sí. Se suele considerar que la componente vertical es principal, es decir, que no está correlacionada con las horizontales [1], aun cuando algunos estudios han encontrado cierta correlación entre la componente vertical y las componentes horizontales [2, 3], y por tanto, que la componente principal está desviada respecto a la vertical. En algunos casos estas desviaciones pueden ser significativas, como por ejemplo para la estación 095 del sismo de Kern County (1952) [4], con un valor de unos 17° , y posiblemente en casos de topografía irregular [5].

Sismos recientes, como Northridge (1994) y Kobe (1995), han puesto en discusión la necesidad de incorporar las tres componentes traslacionales de la excitación sísmica actuando simultáneamente. El cálculo de la respuesta crítica elástica a dos componentes horizontales que incidían con cualquier ángulo en relación a los ejes de referencia de la estructura más una componente de dirección vertical fija, se puede efectuar según el método denominado "Complete Quadratic Combination extended to 3 components" (CQC3) [6-10]. Recientemente los autores presentaron una generalización de este procedimiento, "Generalized Complete Quadratic Combination with 3 Components" (GCQC3) [11, 12], el cual permite calcular la respuesta máxima probable a sismos tricomponentes de dirección

arbitraria. Es objeto de este trabajo exponer la metodología para calcular las respuestas críticas, máxima y mínima, correspondientes a toda la gama de direcciones principales posibles del sismo, y evaluar la variación posible de la respuesta máxima respecto a la calculada con el método conocido como SRSS ("Square-Root-of-Sum-of-Squares").

Fórmulas de Combinación de Respuestas ante varias Componentes Sísmicas

Sea un sistema estructural con m modos de vibración. Estudiamos una respuesta r que pueda expresarse como combinación lineal de los desplazamientos generalizados del sistema estructural, y, por tanto, como combinación lineal de los m desplazamientos modales. Definimos la respuesta cuadrática a la componente sísmica k de dirección arbitraria r_k^2 , como el cuadrado de la respuesta probable (llamada también "máxima" o "pico") que cumpla con cierta probabilidad de excedencia prefijada. Las respuestas modales deben establecerse con la misma probabilidad de excedencia, lo cual supone que los sismos se idealizan como procesos estocásticos gaussianos.

Consideremos la acción de tres componentes sísmicas principales u_1 , u_2 y u_3 (Figura 1), es decir no correlacionadas entre sí, representadas mediante espectros A_1 , A_2 y A_3 proporcionales al espectro A de una componente sísmica patrón, siendo γ_1 , γ_2 y γ_3 las respectivas intensidades es-

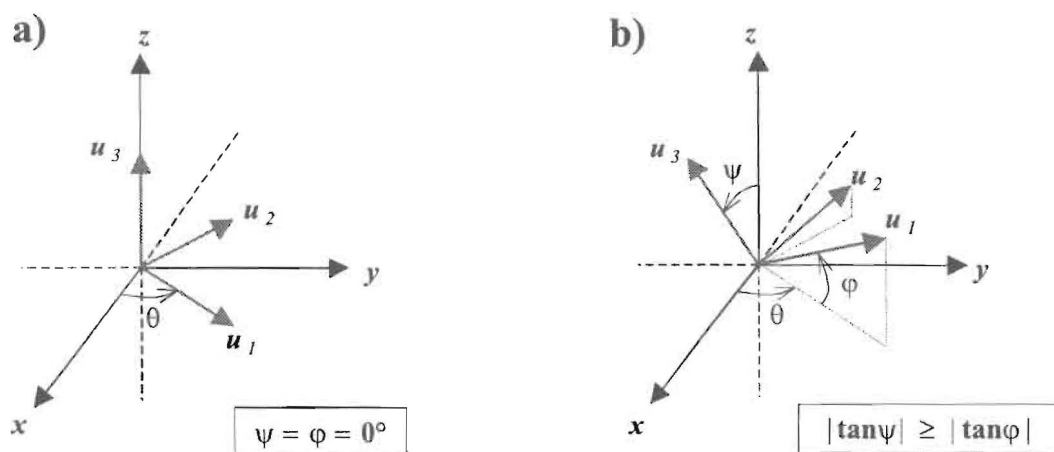


Figura 1. Direcciones principales de la estructura y de las componentes sísmicas no correlacionadas; a) componente principal en dirección vertical; b) caso general.

pectrales: $A_1 = \gamma_1 A$, $A_2 = \gamma_2 A$, $A_3 = \gamma_3 A$. En primer lugar, tomemos la componente sísmica patrón de espectro A (fijo) actuando alternativamente según cada dirección de referencia de la estructura x, y, z (Figura 1), para calcular las respuestas auxiliares a una componente sísmica, según cada dirección de aplicación: r_x, r_y, r_z , y las respectivas correlaciones, r_{xy}, r_{yz} y r_{zx} :

$$r_x^2 = r_{xx} = \sum_i \sum_j \rho_{ij} r_{xi} r_{xj}; r_y^2 = r_{yy} = \sum_i \sum_j \rho_{ij} r_{yi} r_{yj};$$

$$r_z^2 = r_{zz} = \sum_i \sum_j \rho_{ij} r_{zi} r_{zj} \tag{1}$$

$$r_{xy} = r_{yx} = \sum_i \sum_j \rho_{ij} r_{xi} r_{yj}; r_{yz} = r_{zy} = \sum_i \sum_j \rho_{ij} r_{yi} r_{zj};$$

$$r_{zx} = r_{xz} = \sum_i \sum_j \rho_{ij} r_{zi} r_{xj} \tag{2}$$

donde r_{xi}, r_{yi} y r_{zi} son las respuestas en el modo i ante la componente sísmica de espectro A , aplicada alternativamente según x, y y z , respectivamente. El coeficiente de correlación modal ρ_{ij} es definido en la Combinación Cuadrática Completa, "Complete Quadratic Combination" (CQC), definida en [13], en textos [14] y en las normas. Tal como éstas recomiendan, la CQC debe utilizarse cuando las frecuencias modales son cercanas entre sí, aunque debido a su generalidad puede usarse siempre.

Formulación CQC3

Se obtiene la expresión CQC3 [6-10] si al actuar simultáneamente la componente u_3 es vertical mientras las horizontales u_1 y u_2 forman un ángulo θ con los ejes de referencia xy y (Figura 1a):

$$r^2 = r_{xx}(\gamma_1^2 \cos^2 \theta + \gamma_2^2 \sin^2 \theta) + r_{yy}(\gamma_1^2 \sin^2 \theta + \gamma_2^2 \cos^2 \theta) + r_{xy}(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) \sin 2\theta + \gamma_3^2 r_z^2 \tag{3}$$

Obsérvese que r_{yz} y r_{zx} no intervienen en este cálculo, aunque no son necesariamente nulas.

Formulación GCQC3

La recientemente obtenida Combinación Cuadrática Completa Generalizada con 3 Com-

ponentes (GCQC3) [11, 12] da la respuesta máxima probable cuando las componentes sísmicas principales, actuando simultáneamente, toman cualquier dirección en el espacio (Figura 1b):

$$r^2 = r_{xx}(\gamma_1^2 u_{1x}^2 + \gamma_2^2 u_{2x}^2 + \gamma_3^2 u_{3x}^2) + r_{yy}(\gamma_1^2 u_{1y}^2 + \gamma_2^2 u_{2y}^2 + \gamma_3^2 u_{3y}^2) + r_{zz}(\gamma_1^2 u_{1z}^2 + \gamma_2^2 u_{2z}^2 + \gamma_3^2 u_{3z}^2) + 2r_{xy}(\gamma_1^2 u_{1x} u_{1y} + \gamma_2^2 u_{2x} u_{2y} + \gamma_3^2 u_{3x} u_{3y}) + 2r_{yz}(\gamma_1^2 u_{1y} u_{1z} + \gamma_2^2 u_{2y} u_{2z} + \gamma_3^2 u_{3y} u_{3z}) + 2r_{zx}(\gamma_1^2 u_{1z} u_{1x} + \gamma_2^2 u_{2z} u_{2x} + \gamma_3^2 u_{3z} u_{3x}), \tag{4}$$

donde $u_1 = (u_{1x}, u_{1y}, u_{1z})^t$, $u_2 = (u_{2x}, u_{2y}, u_{2z})^t$ y $u_3 = (u_{3x}, u_{3y}, u_{3z})^t$ son los vectores directores unitarios según las direcciones principales del sismo.

Expresiones Matriciales de las Respuestas Generalizadas

Definimos R , matriz de respuestas a la componente sísmica patrón aplicada alternadamente según los ejes x, y y z , mediante los elementos establecidos en (1) y (2), como:

$$R = \begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{yx} & r_{yy} & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{zy} & r_{zz} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Sean los vectores unitarios $u = (u_x, u_y, u_z)^t$ y $v = (v_x, v_y, v_z)^t$ a lo largo de los cuales actúan componentes sísmicas totalmente correlacionadas entre sí, de intensidades espectrales γ_u y γ_v respecto a la patrón, respectivamente. Se demuestra en [11] que las respuestas cuadráticas, r_{uu} y r_{vv} , y la correlación de respuestas r_{uv} , se pueden escribir compactamente como:

$$\begin{aligned} \text{a) } r_u^2 &= r_{uu} = \gamma_u^2 u^t R u \geq 0; \\ \text{b) } r_v^2 &= r_{vv} = \gamma_v^2 v^t R v \geq 0 \\ \text{c) } r_{uv} &= \gamma_u \gamma_v u^t R v. \end{aligned} \tag{6}$$

Y utilizando (6), la expresión (4) de la GCQC3 se puede escribir sintéticamente [11] como:

$$r^2 = \sum_{k=1}^3 \gamma_k^2 u_k^t R u_k. \tag{7}$$

Respuestas Críticas

Definimos las respuestas críticas como las respuestas máxima y mínima, que pueden ocurrir cuando se consideran todas las direcciones posibles de incidencia de las componentes sísmicas principales. En caso de que existieran restricciones, por ejemplo de las direcciones principales, las respuestas críticas serían las correspondientes a la gama de valores permitidos de los parámetros.

Autovalores y autovectores de la matriz de respuestas

Como la matriz \mathbf{R} (5) es simétrica y definida no-negativa (6a), (6b), entonces tiene *autovalores reales no-negativos* $\lambda_a \geq \lambda_b \geq \lambda_c \geq 0$, a los que corresponden los *autovectores unitarios ortogonales* \underline{v}_a , \underline{v}_b y \underline{v}_c , los cuales satisfacen:

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbf{R}\underline{v}_p &= \lambda_p \underline{v}_p, \quad (p = a, b, c); \\ \text{b) } \underline{v}_p^t \mathbf{R}\underline{v}_q &= \underline{v}_q^t \mathbf{R}\underline{v}_p = 0 \quad (p \neq q). \end{aligned} \quad (8)$$

Considerando ahora a la componente sísmica patrón de espectro A actuando a lo largo de las direcciones de los autovectores, a partir de (6) se obtiene [11]:

$$\begin{aligned} \text{a) } r_{ip}^2 &= \underline{v}_p^t \mathbf{R}\underline{v}_p = \lambda_p, \quad (p = a, b, c); \\ \text{b) } r_{pq} &= r_{qp} = \underline{v}_p^t \mathbf{R}\underline{v}_q = 0 \quad (p \neq q) \end{aligned} \quad (9)$$

Es decir, los autovalores de \mathbf{R} son las respuestas cuadráticas a la acción sísmica patrón aplicada alternadamente según la dirección de los autovectores. Y éstos definen direcciones a lo largo de las cuales las acciones sísmicas producen *respuestas de correlación nula, aunque las acciones estén completamente correlacionadas.*

Respuestas críticas a la componente sísmica patrón

Sea la componente sísmica patrón de espectro A orientada según una dirección definida por un vector unitario \underline{u} . Expresando el vector \underline{u} en términos de la base vectorial constituida por los autovectores: $\underline{u} = u_a \underline{v}_a + u_b \underline{v}_b + u_c \underline{v}_c$, y sustituyendo (9) en (6a) (considerando que $\gamma_u = 1$ para el espectro A), se obtiene la siguiente fórmula para la respuesta cuadrática a dicha componente:

$$r_u^2 = u_a^2 \lambda_a + u_b^2 \lambda_b + u_c^2 \lambda_c. \quad (10)$$

Al analizar la expresión (10), conociendo la ordenación de los autovalores λ_p ($p = a, b, c$) y que $u_a^2 + u_b^2 + u_c^2 = 1$ ya que los vectores \underline{u} , \underline{v}_a , \underline{v}_b y \underline{v}_c son unitarios, se puede demostrar que el máximo valor posible de respuesta bajo la acción de una componente sísmica patrón es λ_a según la dirección de aplicación \underline{v}_a , y el mínimo valor posible de respuesta bajo la acción de dicha componente sísmica es λ_c según la dirección de aplicación \underline{v}_c :

$$\text{a) } \max \{r_u^2\} = \lambda_a; \quad \text{b) } \min \{r_u^2\} = \lambda_c \quad (11)$$

Es posible que en una o varias direcciones principales la respuesta máxima probable sea nula. En [11] se analiza la dependencia que existe entre esa situación y los denominados coeficientes de correlación de las respuestas.

Respuestas críticas a tres componentes sísmicas simultáneas

Estudiemos la respuesta a las 3 componentes principales del sismo de direcciones \underline{u}_1 , \underline{u}_2 y \underline{u}_3 , definidas por sus espectros $\gamma_1 A$, $\gamma_2 A$ y $\gamma_3 A$, respectivamente, sin restricciones en cuanto a la inclinación posible de las componentes. Expresamos los vectores directores en la base de los autovectores:

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= \langle u_{1a}, u_{1b}, u_{1c} \rangle^t; \\ \underline{u}_2 &= \langle u_{2a}, u_{2b}, u_{2c} \rangle^t; \\ \underline{u}_3 &= \langle u_{3a}, u_{3b}, u_{3c} \rangle^t. \end{aligned} \quad (12)$$

De (10) obtenemos las respuestas cuadráticas según cada dirección principal y luego, sumando, la respuesta cuadrática global:

$$\begin{aligned} r^2 &= \gamma_1^2 (u_{1a}^2 \lambda_a + u_{1b}^2 \lambda_b + u_{1c}^2 \lambda_c) + \\ &\quad \gamma_2^2 (u_{2a}^2 \lambda_a + u_{2b}^2 \lambda_b + u_{2c}^2 \lambda_c) + \\ &\quad \gamma_3^2 (u_{3a}^2 \lambda_a + u_{3b}^2 \lambda_b + u_{3c}^2 \lambda_c). \end{aligned} \quad (13)$$

Ordenemos las intensidades espectrales denominándolas $\gamma_a \geq \gamma_b \geq \gamma_c \geq 0$, es decir:

$$\begin{aligned} \gamma_a &= \max \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}, \quad \gamma_b = \text{intermedio} \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} \\ \text{y } \gamma_c &= \min \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}. \end{aligned}$$

Del análisis de todos los valores posibles de (13), tomando en cuenta la ordenación de los

autovalores e intensidades y que $u_{ka}^2 + u_{kb}^2 + u_{kc}^2 = 1$, ($k = 1, 2, 3$), se desprende que los valores críticos, máximo y mínimo posibles, bajo la acción de 3 componentes sísmicas simultáneas, que pueden tomar cualquier orientación en el espacio, son [11]:

$$\begin{aligned} \text{a) } r_{\max}^2 &= r_{cr,1}^2 = \gamma_a^2 \lambda_a + \gamma_b^2 \lambda_b + \gamma_c^2 \lambda_c; \\ \text{b) } r_{\min}^2 &= r_{cr,2}^2 = \gamma_c^2 \lambda_a + \gamma_b^2 \lambda_b + \gamma_a^2 \lambda_c. \end{aligned} \quad (14)$$

Estas expresiones indican que la respuesta máxima se obtiene cuando la componente sísmica de mayor intensidad (γ_a) actúa según la dirección del mayor autovalor (λ_a) y la de menor intensidad (γ_c) según la dirección del menor autovalor (λ_c). Y la respuesta mínima con las direcciones invertidas.

Si se establece que existen restricciones respecto a las direcciones principales del sismo, por ejemplo en cuanto a la inclinación mínima de la componente más vertical y/o a la intensidad espectral correspondiente, lo más práctico es llevar a cabo un procedimiento numérico o gráfico que introduzca las restricciones y explorar los valores críticos mediante variación paramétrica de la fórmula (4). Los valores establecidos en (14a) y (14b) serán siempre las cotas superior e inferior de los mismos y pueden servir para control del cálculo o bien utilizarse como valores conservadores por motivos de simplicidad o rapidez.

Acotamiento de la respuesta máxima

La formulación conocida como SRSS supone que las componentes sísmicas que actúan en las direcciones de referencia x, y y z, son las principales, despreciando la posible correlación entre ellas, aunque considera las diversas intensidades espectrales en las direcciones de referencia más desfavorables. Debido a que la fórmula SRSS es ampliamente utilizada en diversas normas de diseño, interesa conocer cual es el error que se puede estar cometiendo al omitir la posibilidad de que las componentes sísmicas principales no estén orientadas según los ejes de referencia de la estructura.

Para considerar todos los casos posibles de orientación de los ejes principales del sismo (u_1, u_2, u_3) con respecto a los ejes de referencia (x, y, z) definimos:

$$\begin{aligned} \bar{r}_{\max} &= \max \{r_x, r_y, r_z\}; \bar{r}_{\min} = \min \{r_x, r_y, r_z\} \text{ y} \\ \bar{r}_{\text{med}} &= \text{la restante o media,} \end{aligned} \quad (15)$$

y suponiendo que no existen limitaciones a la relación entre intensidad y dirección, resulta:

$$r_{SRSS}^2 = \gamma_a^2 \bar{r}_{\max}^2 + \gamma_b^2 \bar{r}_{\text{med}}^2 + \gamma_c^2 \bar{r}_{\min}^2. \quad (16)$$

Dividiendo ahora (14a) entre (16) y tomando en cuenta las propiedades de la traza de la matriz **R**, la ordenación de los autovalores (independientemente de sus valores relativos) y la ordenación de las intensidades, se obtiene la relación deseada [11]:

$$1 \leq \frac{r_{\max}^2}{r_{SRSS}^2} \leq \frac{3\gamma_a^2}{\gamma_a^2 + \gamma_b^2 + \gamma_c^2} \leq 3. \quad (17)$$

El valor máximo 3 de la cota superior sólo se alcanza cuando $\gamma_b = \gamma_c = 0$, es decir, hay una sola componente sísmica. El error relativo máximo posible de la fórmula SRSS es $\frac{r_{\max} - r_{SRSS}}{r_{SRSS}} = \sqrt{3} - 1 = 73.2\%$. En el otro extremo, con 3 componentes sísmicas iguales, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$, ($\Rightarrow \gamma_a = \gamma_b = \gamma_c$), la cota superior iguala a la inferior en el valor 1, y entonces la fórmula SRSS es igual a la respuesta máxima posible, sin error de cálculo.

En una situación intermedia razonable, dada por estadísticas de espectros [15], [16], podríamos tener ($\gamma_b/\gamma_a = 0.65$) y ($\gamma_c/\gamma_a = 0.50$). Entonces (17) conduce a: $1 \leq \frac{r_{\max}}{r_{SRSS}} \leq 1.339$, es decir, un error relativo máximo posible de 33.9 %.

La inecuación (17) es también una generalización de la expresión semejante presentada en [9] para el caso de una componente sísmica principal en dirección vertical fija.

Metodología Propuesta para el Cálculo de las Respuestas Críticas

A continuación presentamos una síntesis de la metodología que puede seguirse en la práctica para determinar los valores máximo y mínimo de una determinada respuesta estructural ante la acción de las tres componentes principa-

les del sismo actuando según cualquier dirección en el espacio:

a) Definición del espectro sísmico patrón A , y de las intensidades espectrales de las distintas componentes sísmicas γ_1 , γ_2 y γ_3 ; **b)** Determinación de los modos de vibración: formas modales, periodos, masas participativas, etc.; **c)** Cálculo de las respuestas modales, $\{r_{xi}, r_{yi}, r_{zi}\}$, ante la componente sísmica patrón A , aplicada alternadamente según x , y y z ; **d)** Cálculo de las respuestas cuadráticas y las correlaciones de las respuestas (1, 2); **e)** Formación de la matriz \mathbf{R} (5) y determinación de sus autovalores; **f)** Aplicación de las fórmulas (14a) y (14b) para obtener los valores máximo y mínimo posibles de la respuesta estructural.

Si se quieren tomar en cuenta restricciones en las direcciones y/o intensidades de algunas componentes sísmicas se recomienda:

g) Efectuar un cálculo numérico utilizando la expresión (4) del método GCQC3, discretizando los ángulos de incidencia de las tres componentes sísmicas, bajo la limitación de las restricciones impuestas; **h)** Comparación de control de los valores obtenidos en **g)** con los derivados en **f)**.

Opcionalmente, si se desea una estimación rápida de una cota superior de la respuesta, independientemente de la existencia o no de restricciones, puede obrarse así a partir de **c)**:

d') Cálculo de las respuestas $\{r_x, r_y, r_z\}$ en las direcciones de referencia de la estructura, bajo la aplicación del espectro patrón; **e')** Cálculo del valor de la respuesta SRSS (16); **f')** Aplicación de la inecuación (17) para obtener una cota superior de la respuesta máxima.

Aplicación y Evaluación del Método Propuesto

Efectuamos una aplicación del método propuesto junto con las comprobaciones numéricas de los resultados obtenidos. El sistema estructural es el mismo del ejemplo utilizado en la referencia [12]. Se trata de una plataforma cuadrada formada por una losa apoyada en cuatro vigas que a su vez apoyan en cuatro columnas (Figura 2). Los materiales y cargas pueden revisarse en [12].

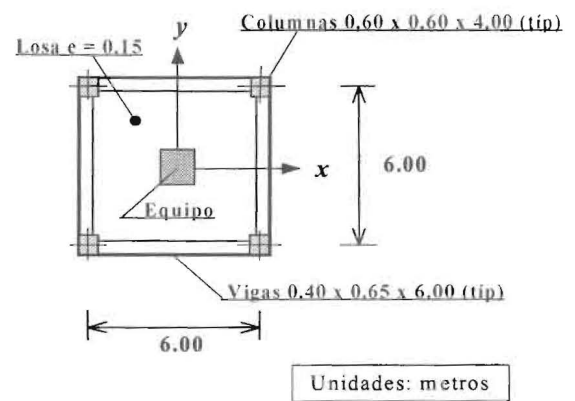


Figura 2. Planta de plataforma.

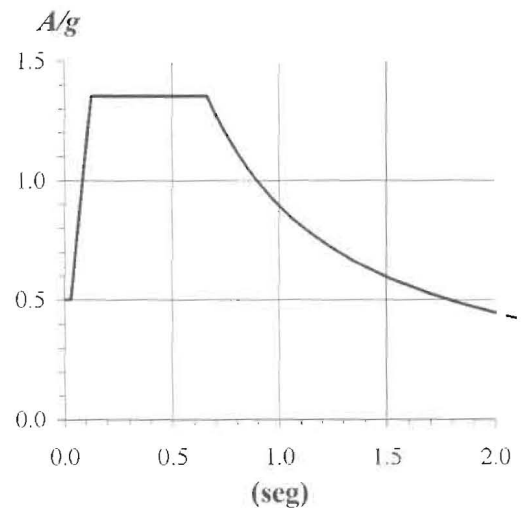


Figura 3. Espectro elástico de diseño.

La estructura se somete a tres componentes sísmicas no correlacionadas u_1 , u_2 y u_3 , con espectros proporcionales al espectro de pseudoaceleraciones A (Figura 3), siendo $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0.65$, $\gamma_3 = 0.5$. En [12] se indican los resultados del análisis modal que conducen a las respuestas sísmicas de la fuerza axial en la columna inferior izquierda:

$$r_x = 105.8 \text{ kN}, \quad r_y = 105.8 \text{ kN}, \quad r_z = 87.1 \text{ kN},$$

$$r_{yz} = r_{zx} = 7908 \text{ kN}^2, \quad r_{zz} = 7589 \text{ kN}^2. \quad (18)$$

Igualmente en [12] se presentaron las respuestas obtenidas mediante variación numérica de los ángulos φ , φ y ψ (Fig. 1b): **a)** Cuando sólo actúa la componente sísmica u_1 , la máxima respuesta encontrada fue $r = 168.44 \text{ kN}$, 12.6% superior a la máxima respuesta dada por la CQC3,

que es igual a 149.62 kN. La respuesta mínima obtenida fue $r = 0$; **b)** Cuando actúan 3 componentes sísmicas la máxima respuesta encontrada fue $r = 170.44$ kN y la mínima $r = 88.19$ kN.

Cálculo de las respuestas críticas, sin restricciones

A partir de los valores dados en (18) construimos la matriz \mathbf{R} definida en (5). Sus autovalores y autovectores resultan ser:

$$\lambda_a = 28397 \text{ kN}^2, \lambda_b = 1578 \text{ kN}^2, \lambda_c = 0, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} u_a^t &= (0.623, 0.623, 0.473); \\ u_b^t &= (0.335, 0.335, -0.881); \\ u_c^t &= (0.707, -0.707, 0). \end{aligned} \quad (20)$$

La respuesta máxima ante la componente sísmica de espectro A, actuando según la dirección de cada autovector, está dada por la raíz cuadrada del autovalor correspondiente:

$$r_a = 168.51 \text{ kN}, r_b = 39.73 \text{ kN}, r_c = 0 \text{ kN}. \quad (21)$$

El valor máximo es ligeramente superior al obtenido por variación numérica (168.51 kN vs. 168.44 kN) y el valor mínimo es exactamente el mismo (cero).

Cuando actúan las 3 componentes sísmicas de intensidades dadas, aplicando (14) tenemos:

$$r_{\max}^2 = 1^2(28397) + 0.65^2(1578) + 0.5^2(0) = 29064 \text{ kN}^2; \quad r_{\max} = 170.48 \text{ kN} \quad (22)$$

$$r_{\min}^2 = 0.5^2(28397) + 0.65^2(1578) + 1^2(0) = 7766 \text{ kN}^2; \quad r_{\min} = 88.12 \text{ kN}. \quad (23)$$

Los valores exactos son cercanos, pero respectivamente superior e inferior a los obtenidos numéricamente (170.48 kN vs. 170.44 kN) y (88.12 kN vs. 88.19 kN), con lo que se comprueba la ventaja del método propuesto, pues permite evitar el más laborioso cálculo numérico.

Cálculo de la respuesta máxima, con restricciones

Supongamos ahora que se establece la restricción de que la componente más cercana a la vertical no puede alejarse más de 20° del eje verti-

cal y que a su vez es la menos intensa con $\gamma = 0.5$. Esto equivale a exigir que la componente u_3 (Figura 1b) tenga $\gamma_3 = 0.5$ y que debe ser $0^\circ \leq \psi \leq 20^\circ$. Efectuando un barrido numérico de θ, φ y ψ a intervalos de 1° obtenemos como máximo valor $r = 168.45$ kN para $\psi = 20^\circ, \varphi = 20^\circ$ y $\theta = 45^\circ$.

En la Figura 4 se presenta parte de ese barrido a intervalos de 5° en el que puede apreciarse el carácter de la modificación que introduce la variación de los ángulos φ y ψ . La diferencia relativa entre el valor máximo con las restricciones indicadas (168.45 kN) y el valor máximo sin restricciones (170.48 kN) es de 1.2%, por lo que puede justificarse el ahorro del cálculo numérico y tomar como valor crítico el derivado del análisis de autovalores (14). Obsérvese que en el análisis con restricciones la componente más cercana a la vertical se fijó en $\gamma_3 = 0.5$, mientras que en el estudio de la respuesta máxima posible se admitió que según dicha componente la intensidad pudiera valer $\gamma_2 = 0.65$.

Cálculo de la cota general de la respuesta máxima

Calculemos ahora la cota general de la respuesta máxima dada por (17) y comparemos la respuesta máxima posible con la que se obtiene como aplicación de la formulación SRSS, (16):

$$r_{SRSS}^2 = 105.8^2 + 0.65^2(105.8^2) + 0.5^2(87.1^2) = 17819 \text{ kN}^2; \quad r_{SRSS} = 133.49 \text{ kN} \quad (24)$$

$$r_{\max} \leq r_{SRSS} \sqrt{\frac{3\gamma_a^2}{\gamma_a^2 + \gamma_b^2 + \gamma_c^2}} = 1.339 r_{SRSS} = 178.78 \text{ kN} \quad (25)$$

Para la estructura del ejemplo, si por rapidez estimamos la respuesta máxima mediante su cota superior, cometemos un error por exceso de 4.9 % si no existen restricciones (178.78 kN vs. 170.48 kN) o un error por exceso de 6.1 % en el caso de que las mismas existan (178.78 kN vs. 168.45 kN).

Por otro lado, mediante el procedimiento CQC3 no generalizado, o sea, con una componente en dirección vertical fija, la expresión (3) queda $r_{CQC3} = 155.83$ kN, con un error por defecto respecto al valor máximo posible sin restricciones de 9.4% (155.83 kN vs. 170.48 kN) o un error por defecto de 8.1% respecto al valor máximo con

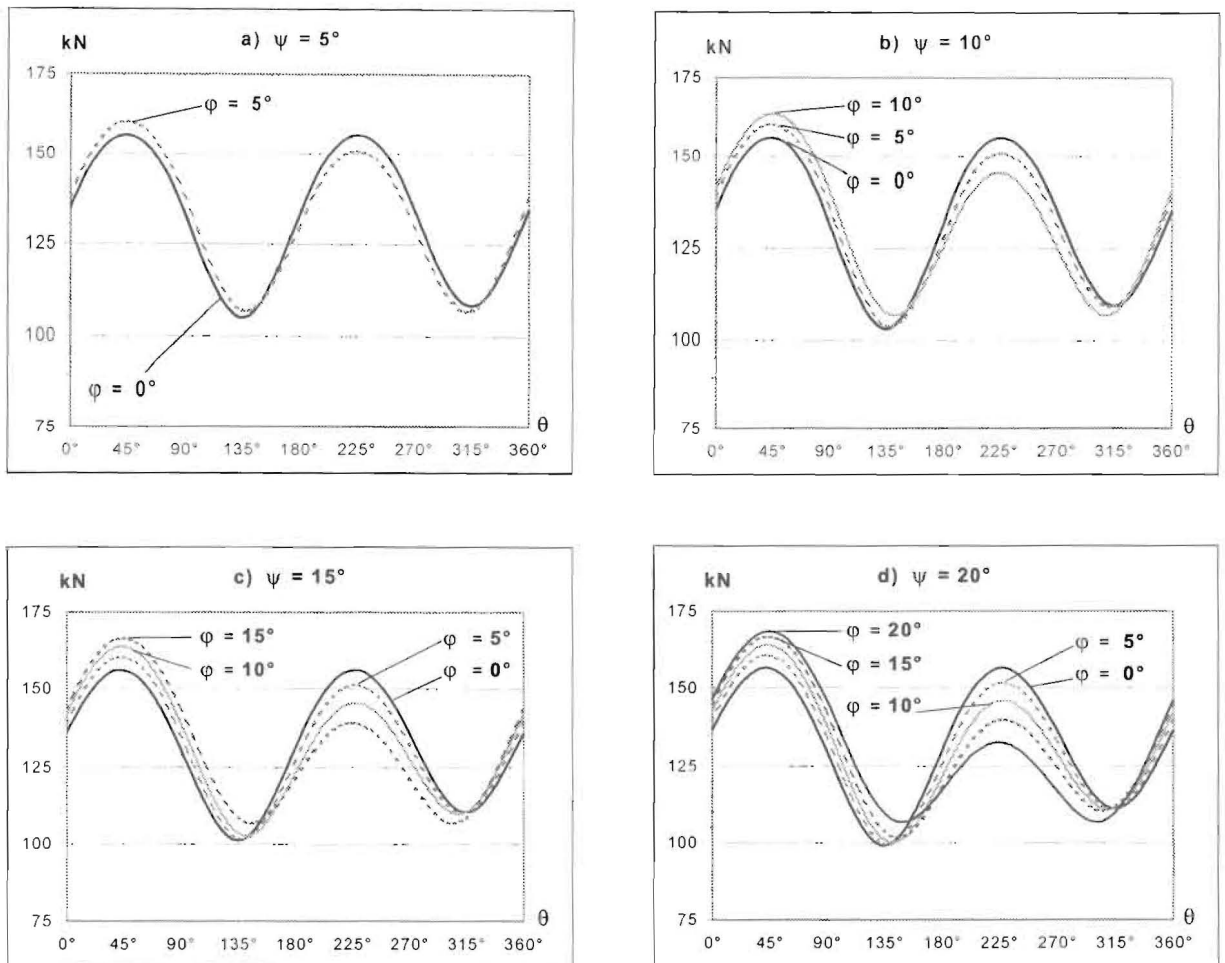


Figura 4. Respuesta según dirección $\{\theta, \varphi, \psi\}$ de aplicación de tres componentes sísmicas, con la restricción $\psi_{max} = 20^\circ$. Para $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0.65$ y $\gamma_3 = 0.5$.

las restricciones impuestas (155.83 kN vs. 168.45 kN).

Es importante anotar que el grado de diferencia entre los diversos métodos depende de las propiedades de la estructura: cercanía entre los periodos de distintos modos de vibración excitados por diferentes componentes y valores relativos de las respuestas r_x , r_y y r_z .

Conclusiones

Dentro del marco de referencia del método de análisis espectral para sistemas elásticos sujetos a tres componentes sísmicas de traslación se concluye lo siguiente:

a) Las respuestas críticas de una estructura, definidas como la respuesta máxima y res-

puesta mínima que pueden ocurrir cuando se consideran todas las direcciones posibles de incidencia de una componente sísmica en el espacio, están dadas por la raíz cuadrada de los autovalores máximo y mínimo de la matriz de respuestas \mathbf{R} . Los autovectores de esta matriz definen las tres direcciones de aplicación en el espacio de la componente sísmica que dan lugar a las respuestas máxima, mínima y una intermedia, las cuales no están correlacionadas entre sí.

b) Las respuestas críticas ante tres componentes sísmicas, definidas como la respuesta máxima y la mínima considerando todas las direcciones posibles de dichas componentes, se determinan mediante fórmulas sencillas en función de los autovalores de la matriz de respuesta y de las intensidades de cada componente sísmica. Estas fórmulas se verificaron mediante una com-

paración con resultados numéricos efectuados mediante barrido del conjunto de las variables.

c) Se obtuvo la cota máxima de la relación entre la respuesta máxima considerando todas las direcciones de incidencia de las tres componentes sísmicas y la respuesta obtenida con el criterio SRSS, para las intensidades espectrales dadas.

Agradecimientos

Los autores dejan constancia de su agradecimiento al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela y a la Coordinación de Investigación de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela, por su contribución a esta investigación.

Referencias Bibliográficas

1. Penzien, J. and Watabe, M.: "Characteristics of 3-dimensional earthquake ground motion", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 3 (1975), 365-374.
2. Chen, C.: "Definition of Statically Independent Time Histories", *Journal of the Struct. Div., ASCE*, Vol. 101, No. ST2 (1975), pp. 449-451.
3. Hadjian, A. H.: "On the Correlation of the Components of Strong Ground Motion", 2nd International Conference on Microzonation, Vol. III (1978), San Francisco.
4. National Geophysical Data Center: "Earthquake Strong Motion", (1996), Boulder, Colorado.
5. Marsan, P., Milana, G., Pugliese, A. and Sano, T.: "Local Amplification Effects recorded by a Local Strong Motion Network during the 1997 Umbria-Marche Earthquake", 12th World Conference on Earthquake Engineering (2000), New Zealand.
6. Smeby, W. and Der Kiureghian, A.: "Modal Combination Rules for Multicomponent Earthquake Excitation", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 13 (1985), p. 1-12.
7. Menun, C. and Der Kiureghian, A.: "A Replacement for the 30%, 40% and SRSS Rules for Multicomponent Seismic Analysis", *Earthquake Spectra*, 14, N° 1 (1998), p. 153-156.
8. Lopez, O. A., and Torres, R.: "The critical angle of seismic incidence and the maximum structural response." *Earthquake Engrg. and Struct. Dyn.*, 26 (1997), p. 881-894.
9. López O. A., Chopra A. K. and Hernández J. J.: "The significance of the direction on the structural response", 12th World Conference on Earthquake Engineering (2000), New Zealand.
10. López O. A., y Hernández J. J.: "Criterios para combinar respuestas ante dos componentes sísmicas", *Revista Técnica, Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia* (2001), Vol. 24, N° 3.
11. Hernández J. J., and López O. A.: "Response to Three-component Seismic Motion of Arbitrary Direction", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* (2001), accepted for publication.
12. López O. A., y Hernández J. J.: "Generalización del criterio CQC3 para incluir tres componentes sísmicas en cualquier dirección", *Revista Técnica, Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia* (2001), Vol. 24, N° 2.
13. Wilson, E. L., Der Kiureghian, A. and Bayo, E. P.: "A replacement for the SRSS method in seismic analysis", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 9 (1981), p. 87-194.
14. Newmark, N., Rosenblueth, E.: "Fundamentals of Earthquake Engineering", Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs (1971), N. J.
15. López O. A., Hernández, J. J y Raven, E.: "Algunas propiedades de las tres componentes sísmicas principales", en preparación (2001).
16. Bozorgnia, Y., Campbell, K. W. and Niazi, M.: "Observed spectral characteristics of vertical ground motion recorded during worldwide earthquakes from 1957 to 1995", *Proc. 12th World Conf. Earthq. Eng.*, 2671/4 (2000), New Zealand.

Recibido el 23 de Octubre de 2000

En forma revisada el 4 de Abril de 2001