Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. Vol. 24, Nº 2, 92-98, 2001

Some results on a new generalized incomplete gamma function

Josefina Matera

Centro de Investigación de Matemática Aplicada (CIMA), Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia, Apartado 10182. Maracaibo, Venezuela.

Abstract

Kobayashi (Jour. Phy. Soc. Japan 60 (1991), 1501, 1512) considered a gamma function generalization $\Gamma_m(u, v)$ is present in the difraction theory. Recently Al-Musallan and Kalla (Int. Trans. Sp. func. 7 (1998) 175-190 and Appl. Anal. 66 (1997), 173-187), considered a more general function involving the confluent hypergeometric function $F(a, b; c; z)$.

$$D\binom{a,b;c,p}{u,v} = v^{-a}\int_0^\infty t^{u-1}e^{-pt}F(a,b;c;-t/v)dt, \quad |\arg v| < \pi, \mathrm{Re}(u) > 0.$$

In this paper we consider a function involving the confluent hypergeometric function $\Phi(a, b, z)$.

$$D\binom{a;b,p}{u,v} = \int_0^\infty t^{u-1}e^{-pt}\Phi(a,b;vt)dt, \quad |\arg v| < \pi, \mathrm{Re}(u) > 0.$$

This function convert into a gamma function when $p = 1$ and $a = 0$. We calculate D for some parameter values. We also introduce the incomplete confluent gamma function and the complementary incomplete confluent gamma function associate with D and we study their properties and recurrence relations.

Key words: Asymptotic series, confluent gamma function, incomplete confluent gamma function.

Algunos resultados sobre una nueva generalización de la función gamma

Resumen

Kobayashi (Jour. Phy. Soc. Japan 60 (1991), 1501, 1512) consideró una generalización de la función gamma, $\Gamma_m(u, v)$, presente en la teoría de difracciones. Recientemente Al -Musallan y Kalla (Int. Trans. Sp. func. 7 (1998) 175-190 and Appl. Anal. 66 (1997), 173-187), considerando una función más general que envuelve a la función hipergeométrica de Gauss $F(a, b; c; z)$.

$$D\binom{a,b;c,p}{u,v} = v^{-a}\int_0^\infty t^{u-1}e^{-pt}F(a,b;c;-t/v)dt, \quad |\arg v| < \pi, \mathrm{Re}(u) > 0.$$

En este trabajo consideramos la función gamma confluentes que envuelve la función hipergeométrica confluente $\Phi(a, b, z)$.

$$D\binom{a;b,p}{u,v} = \int_0^\infty t^{u-1}e^{-pt}\Phi(a,b;vt)dt, \quad |\arg v| < \pi, \mathrm{Re}(u) > 0,$$

para la cual se hacen cálculos de D para algunos valores de sus parámetros y también son introducidas la función gamma confluente incompleta y la función gamma confluente incompleta complementaria asociadas con D, y estudiamos sus propiedades y relaciones de recurrencias.

Palabras clave: Series asintóticas, función gamma confluente, función gamma confluente incompleta.

1. Introducción

Unas de la funciones especiales más simples e importantes es la función gamma, de la cual sus propiedades son un pre-requisito para el estudio de otras funciones especiales, como la función cilíndrica y la función hipergeométrica. La función gamma es usada para definir algunas distribuciones de probabilidad [1], para evaluar integrales [2], entre otras.

Kobayashy [3] Consideró una generalización de la función gamma.

$$\Gamma_m(u, v) = \int_0^\infty \frac{t^{u-1}e^{-t}}{(t + v)^m} dt, \ |\arg v| < \pi, \mathrm{Re}(u) > 0, \quad (1)$$

donde m es un entero positivo y la función $\Gamma_m(u, v)$ es llamada la función gamma generalizada. Cuando $m = 0$ en (1), se reduce a la bien conocida función gamma.

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty t^{u-1}e^{-t}dt, \ \mathrm{Re}(u) > 0. \quad (2)$$

Recientemente Al-Musallan y Kalla [4, 5] considerando una integral más general que envuelve al afunción hipergeométrica de Gauss:

$$D\binom{a,b;c,p}{u,v} = v^{-a}\int_0^\infty t^{u-1}e^{-pt}F(a, b; c; -t / v)dt,$$
$$|\arg v| < \pi, \mathrm{Re}(u) > 0. \quad (3)$$

en donde si $b = c$ y $p = 1$ se obtiene (1). En dicho trabajo se establecieron algunas propiedades analíticas incluyendo, relaciones de recurrencia, cálculo de algunos valores de sus parámetros, la expansión asintótica para la función gamma confluente y la función gamma confluente incompleta asociada con D.

En este trabajo se considera una función que envuelve la función hipergeométrica confluente $\Phi(a, b, z)$, y además se introduce la función gamma confluente incompleta complementaria asociada con D con sus respectivas propiedades y relaciones de recurrencia.

2. La Función Gamma Confluente

Tomamos

$$W_v = \{v \in C: |\arg v| < \pi\} \text{ y } W_u = \{u \in C: \mathrm{Re}(u) > 0\}$$

Definición 1

Sea a, b y p números complejos, con $b \neq 0$ y $\mathrm{Re}(p) > 0$, se define

$$D\binom{a;b,p}{u,v} = \int_0^\infty t^{u-1}e^{-pt}\Phi(a, b; vt)dt, \ u \in W_u, v \in W_v \quad (4)$$

donde $\Phi(a, b, vt)$ es la función hipergeométrica confluente [6,p.260(9.9.1)].

Si $a = 0$ y $p = 1$ en (4) y usando el desarrollo en serie de Φ, obtenemos (2).

Teorema

D es analítica en el dominio W_v y W_u.

Prueba:

La integral en la definición de D puede ser escrita como:

$$\int_1^\infty t^{-u-1}e^{-\frac{p}{t}}\Phi(a, b; \frac{v}{t})dt + \int_1^\infty t^{u-1}e^{-pt}\Phi(a, b; vt)dt$$

Para la prueba analítica de D es suficiente mostrar que cada una de las integrales arriba son uniformemente convergentes sobre subsecciones compactas del dominio W_v y W_u, visto que $t^{-u-1}e^{-\frac{p}{t}}\Phi(a, b; \frac{v}{t})$ y $t^{u-1}e^{-pt}\Phi(a, b; vt)$ son continuas sobre $[1, \infty) \times W_u$ y $[1, \infty) \times W_v$ y analíticas en el dominio W_v y W_u para cada $t \geq 1$. Para tal fin sea Δ_u y Δ_v una sección compacta de W_v y W_u respectivamente y sea:

$$K = \max_{v\in\Delta_v}\{|v|, |v^a|\}, \quad u_1 = \max_{u\in\Delta_u} Re(u),$$

$$u_2 = u_1 - \min\{Re(a)\} \text{ y } L = \min_{v\in\Delta_v}|v|.$$

Tenemos para valores grandes de $|z|$ que,

$$\Phi(a, b; z) = \lambda z^{-a} + O(z^{-a-1})$$

en donde λ es una constante.

Entonces podemos escoger un número real $M > 0$ y un número real $d > 1$ y $d > \frac{2}{L}$ de modo que si $t > d$

$$|\Phi(a, b; vt)| \leq |\lambda| \frac{|v^a|}{t^{\mathrm{Re}(a)}} + M\frac{|v^{a+1}|}{t^{\mathrm{Re}(a)+1}}$$

$$\leq \left(|\lambda| + M\frac{|v|}{t}\right)\frac{|v^a|}{t^{\mathrm{Re}(a)}}$$

$$\leq \left(|\lambda| + M\frac{K}{t}\right)\frac{K}{t^{\mathrm{Re}(a)}}$$

$$\leq (|\lambda| + MK)\frac{K}{t^{\mathrm{Re}(a)}}$$

entonces

$$|t^{u-1}e^{-pt}\Phi(a,b;vt)| \le (t^{\mathrm{Re}(u)-1}e^{-\mathrm{Re}(p)t})(|\lambda| + MK)\frac{K}{t^{\mathrm{Re}(a)}}$$

$$\le K(|\lambda| + MK)t^{u_2-1}e^{-\mathrm{Re}(p)t}$$

para $t > d$.

Dado que el dado derecho obtenido es independiente de la ubicación de u y de v en Δ_u y Δ_v respectivamente y dado que $\int_1^\infty t^{u_2-1}e^{-\mathrm{Re}(p)t}dt < \infty$ vemos que $\int_1^\infty t^{u-1}e^{-pt}\Phi(a,b;vt)dt$ es uniformemente convergente sobre Δ_u y Δ_v.

Por otro lado, si $t > d$ entonces $\left|\frac{t}{v}\right| \ge tL > dL > 2$, con lo cual

$$\left|t^{-u-1}e^{-\frac{p}{t}}\Phi\left(a,b;\frac{v}{t}\right)\right| = \left|t^{-u-1}e^{-\frac{p}{t}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!(b)_n}\left(\frac{v}{t}\right)^n\right|$$

$$\le t^{-u_1-1}e^{-\frac{\mathrm{Re}(p)}{t}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(|a|)_n}{2^n(n!)(|b|)_n}$$

$$= t^{-u_1-1}e^{-\frac{\mathrm{Re}(p)}{t}}\Phi(|a|,|b|;\frac{1}{2})$$

entonces

$$\int_1^\infty t^{-u_1-1}e^{-\frac{\mathrm{Re}(p)}{t}}dt = \int_1^\infty t^{-u_1-1}e^{-\mathrm{Re}(p)t}dt < \infty$$

sucede que $\int_1^\infty t^{-u-1}e^{-\frac{p}{t}}\Phi(a,b;\frac{v}{t})dt$ es uniformemente convergente. Esto completa la prueba.

Proposición

Sean a, b y p, entonces D tiene la representación:

$$D\begin{pmatrix} a;b,p \\ u,v \end{pmatrix} = v^{-u}\int_0^\infty t^{u-1}e^{-\left(\frac{p}{v}\right)t}\Phi(a,b;vt)dt$$

Prueba:

Sea $v > 0$ y haciendo el cambio $s = vt$, se tiene:

$$D\begin{pmatrix} a;b,p \\ u,v \end{pmatrix} = \int_0^\infty\left(\frac{s}{v}\right)^{u-1}e^{-\left(\frac{p}{v}\right)s}\Phi(a,b;s)ds$$

de lo cual resulta

$$D\begin{pmatrix} a;b,p \\ u,v \end{pmatrix} = v^{-u}\int_0^\infty s^{u-1}e^{-\left(\frac{p}{v}\right)s}\Phi(a,b;s)ds$$

dado que la integral de la derecha define una función analítica en u y v en el dominio W_u y W_v y coincide con D en el dominio $v > 0$ y W_u, el resultado se sigue del principio de continuación analítica.

3. Cálculo de *D* para algunos valores de sus parámetros

Usando valores particulares de a y de b en D y algunos casos especiales de Φ tenemos:

i) Si $b = a$ en (4)

$$D\begin{pmatrix} a;a,p \\ u,v \end{pmatrix} = \int_0^\infty t^{u-1}e^{-pt}\Phi(a,a;vt)dt \tag{5}$$

usando el resultado [6,p.271], y efectuando el cambio de variable $x = (p-v)t$ resulta:

$$D\begin{pmatrix} a;a,p \\ u,v \end{pmatrix} = \frac{1}{(p-v)^u}\Gamma(u) \tag{6}$$

ii) Si $a = 1$ y $b = 2$ en (4), y usando el siguiente caso particular dela función Φ [6,p.271] se tiene:

$$D\begin{pmatrix} 1;2,p \\ u,v \end{pmatrix} = \int_0^\infty t^{u-1}e^{-pt}\left(\frac{e^{vt}-1}{vt}\right)dt$$

$$D\begin{pmatrix} 1;2,p \\ u,v \end{pmatrix} = v^{-1}\left[\int_0^\infty t^{u-2}e^{-(p-v)t}dt - \int_0^\infty t^{u-2}e^{-pt}dt\right]$$

realizando el cambio $(p-v)t = x$ y escribiendo $u - 2 = (u-1) - 1$, resulta:

$$D\begin{pmatrix} 1;2,p \\ u,v \end{pmatrix} = v^{-1}\left[\frac{1}{(p-v)^{u-1}}\Gamma(u-1) - \frac{1}{p^{u-1}}\Gamma(u-1)\right]$$

$$D\begin{pmatrix} 1;2,p \\ u,v \end{pmatrix} = v^{-1}\Gamma(u-1)\left[\frac{1}{(p-v)^{u-1}} - \frac{1}{p^{u-1}}\right] \tag{7}$$

iii) Si $a = 1/2$ y $b = 3/2$ en (4) resulta:

$$D\begin{pmatrix} \frac{1}{2};\frac{3}{2},p \\ u,v \end{pmatrix} = \int_0^\infty t^{u-1}e^{-pt}\Phi\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2};vt\right)dt \tag{8}$$

del resultado [6,p.272(9.13.1)], se tiene:

$$\Phi\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},-z^2\right)=\frac{Er\,f(z)}{z} \tag{9}$$

en donde $Er\,f(z)$ es la función Error.

Comparando (9) con la función hipergeométrica confluente en (4), y efectuando el cambio $vt = -s$.

$$D\begin{pmatrix}\frac{1}{2};\frac{3}{2},p\\ u,v\end{pmatrix}=\frac{(-1)^{u-2}}{v^u}\int_0^\infty s^{u-1}e^{\frac{ps}{v}}\Phi\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},-s\right)ds \tag{10}$$

Tomando $s = t^2$ en (10)

$$D\begin{pmatrix}\frac{1}{2};\frac{3}{2},p\\ u,v\end{pmatrix}=\frac{2(-1)^{u-2}}{v^u}\int_0^\infty t^{2u-1}e^{\frac{pt^2}{v}}\Phi\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2};-t^2\right)dt$$

en donde a sustituir (9) se obtiene:

$$D\begin{pmatrix}\frac{1}{2};\frac{3}{2},p\\ u,v\end{pmatrix}=\frac{2(-1)^{u-2}}{v^u}\int_0^\infty t^{2u-2}e^{\frac{pt^2}{v}}Er\,f(t)dt \tag{11}$$

iv) Si $a = -n$ y $b = 1/2$ en (4), siguiendo un procedimiento similar al anterior y usando el resultado [6,p.273(9.13.8)], se obtiene:

$$D\begin{pmatrix}-n;\frac{1}{2},p\\ u,v\end{pmatrix}=\frac{2n!}{v^u(-1)^n(2n)!}\int_0^\infty t^{2u-1}e^{-\frac{pt^2}{v}}H_{2n}(t)dt \tag{12}$$

en donde $H_{2n}(t)$ es el polinomio de Hermite de orden par.

Si en (4) hacemos $a = -n$ y $b = 3/2$ y usando [6,p.273] se tiene:

$$D\begin{pmatrix}-n;\frac{3}{2},p\\ u,v\end{pmatrix}=\frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}\int_0^\infty t^{2u-2}e^{-\frac{pt^2}{v}}H_{2n+1}(t)dt \tag{13}$$

en donde $H_{2n+1}(t)$ es el polinomio de Hermite de orden impar.

v) Haciendo $a = -n$ y $b = \alpha + 1$ y usando [6,p.273(9.13.10)], resulta:

$$D\begin{pmatrix}-n;\alpha+1,p\\ u,v\end{pmatrix}=\frac{n!}{(\alpha+1)_n}\int_0^\infty t^{u-1}e^{-pt}L_n^\alpha(vt)dt \tag{14}$$

en donde $L_n^\alpha(vt)$ es el polinomio de Laguerre.

vi) Usando el resultado [7,p.434(5)] en (4) con $z = vt$:

$$D\begin{pmatrix}a;b,p\\ u,v\end{pmatrix}=v^{\frac{b}{2}}\int_0^\infty t^{\frac{u-b}{2}-1}e^{-\left(\frac{p-v}{2}\right)t}\mathcal{M}_{p,\sigma}(vt)dt \tag{15}$$

en donde $\mathcal{M}_{p,\sigma}(vt)$ es la función de Whittaker.

vii) De [8,p.253(637)] es sabido que:

$$\Phi(a,c,x)=e^x\Phi(c-a,c;-x) \tag{16}$$

la cual es conocida como la transformación de Kummer.

Si $c = b$ en (4) resulta:

$$D\begin{pmatrix}a;b,p\\ u,v\end{pmatrix}=\int_0^\infty t^{u-1}e^{-(p-v)t}\Phi(b-a,b;-vt)dt \tag{17}$$

viii) Si $a = 1/2 + \nu$, $b = 1 + 2\nu$ y usando [8,p.265(9)] se tiene:

$$D\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\nu;1+2\nu,p\\ u,v\end{pmatrix}=2^{2\nu}\left(\frac{\nu}{i}\right)^{-\nu}\Gamma(\nu+1)\int_0^\infty t^{u-\nu-1}e^{-\left(\frac{p-v}{2}\right)t}J_\nu\left(\frac{vt}{2i}\right)dt \tag{18}$$

ix) Si $a = 1/2 + \nu$, $b = 1 + 2\nu$ y usando [8,p.265(10)], resulta:

$$D\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\nu;1+2\nu,p\\ u,v\end{pmatrix}=2^{2\nu}v^{-\nu}\Gamma(\nu+1)\int_0^\infty t^{u-\nu-1}e^{-\left(\frac{p-v}{2}\right)t}I_\nu\left(\frac{vt}{2}\right)dt \tag{19}$$

4. La función gamma confluente incompleta generalizada y la función gamma confluente incompleta complementaria generalizada

En la generalización (1), introducimos, para $w > 0$, la función:

$$D_o^w\begin{pmatrix}a;b,p\\ u,v,w\end{pmatrix}=\int_0^w t^{u-1}e^{-pt}\Phi(a,b;vt)dt$$

$$\mathrm{Re}(p)>0,\ \mathrm{Re}(u)>0,\ |\arg v|<\pi \tag{20}$$

la cual es llamada la función gamma incompleta generalizada y su función complementaria.

$$D_{w}^{\infty}\begin{pmatrix} a; b, p \\ u, v, w \end{pmatrix} = \int_{w}^{\infty} t^{u-1} e^{-pt} \Phi(a, b; vt) dt$$

$$\mathrm{Re}(p) > 0, \mathrm{Re}(u) > 0, |\arg v| < \pi \qquad (21)$$

y es llamada la función gamma incompleta complementaria generalizada, de lo cual sigue:

$$D\begin{pmatrix} a; b, p \\ u, v \end{pmatrix} = D_{o}^{w}\begin{pmatrix} a; b, p \\ u, v, w \end{pmatrix} + D_{w}^{\infty}\begin{pmatrix} a; b, p \\ u, v, w \end{pmatrix} \qquad (22)$$

Si $p = 1$ y $a = 0$ las ecuaciones (20) y (21) se reducen a la función gamma incompleta y la función gamma complementaria respectivamente [8,p.133]

$$\gamma(u, w) = \int_{o}^{w} t^{u-1} e^{-t} dt \qquad (23)$$

$$\Gamma(u, w) = \int_{w}^{\infty} t^{u-1} e^{-t} dt \qquad (24)$$

Tenemos entonces a continuación algunas propiedades y relaciones de recurrencia de D_{o}^{w} y D_{w}^{∞}.

Teorema

Las siguientes ecuaciones son válidas:

$$D_{0}^{w}(u+1) = -\frac{w^{u}}{p} e^{-pw} \Phi(a, b; vw) + \frac{u}{p} D_{0}^{w} + \frac{va}{pb} D_{0}^{w}\begin{pmatrix} a+1; b+1, p \\ u+1, v, w \end{pmatrix} \qquad (25)$$

$$D_{w}^{\infty}(u+1) = \frac{w^{u}}{p} e^{-pw} \Phi(a, b; vw) + \frac{u}{p} D_{w}^{\infty} + \frac{va}{pb} D_{w}^{\infty}\begin{pmatrix} a+1; b+1, p \\ u+1, v, w \end{pmatrix} \qquad (26)$$

$$\frac{d}{dw}\left[w^{-u} D_{w}^{\infty}\right] = -pw^{-u-1}\left[D_{w}^{\infty}(u+1) - \frac{va}{pb} D_{w}^{\infty}\begin{pmatrix} a+1; b+1, p \\ u+1, v, w \end{pmatrix}\right] \qquad (27)$$

$$\frac{d}{dw}\left[e^{pw} D_{w}^{\infty}\right] = pe^{pw} D_{w}^{\infty} - w^{u-1} \Phi(a, b; vw) \qquad (28)$$

$$\frac{d}{dw} D_{0}^{w} = -\frac{d}{dw} D_{w}^{\infty} \qquad (29)$$

$$\frac{d}{dw}\left[w^{-u} D_{0}^{w}\right] = -pw^{-u-1}\left[D_{0}^{w}(u+1) - \frac{va}{pb} D_{0}^{w}\begin{pmatrix} a+1; b+1, p \\ u+1, v, w \end{pmatrix}\right] \qquad (30)$$

$$\frac{d}{dw}\left[e^{pw} D_{0}^{w}\right] = pe^{pw} D_{0}^{w} + w^{u-1} \Phi(a, b; vw) \qquad (31)$$

Prueba

Si u es sustituido por $u + 1$ en (20), resulta:

$$D_{0}^{w}(u+1) = \int_{0}^{w} t^{u} e^{-pt} \Phi(a, b; vt) dt$$

integrando por partes y usando el resultado [6,p.261(9.94)]:

$$D_{0}^{w}(u+1) = -\frac{w^{u}}{p} e^{-pw} \Phi(a, b; vw) + \frac{u}{p} \int_{0}^{w} t^{u-1} e^{-pt} \Phi(a, b; vt) dt + \frac{va}{pb} \int_{0}^{w} t^{u} e^{-pt} \Phi(a+1, b+1; vt) dt$$

lo cual se puede escribir como (25).

Para probar (26) en (25) cambiamos D_{0}^{w} por $D - D_{w}^{\infty}$ y $D_{0}^{w}(u+1)$ por $D(u+1) - D_{w}^{\infty}(u+1)$ de lo cual resulta:

$$D(u+1) - D_{w}^{\infty}(u+1) = -\frac{w^{u}}{p} e^{-pw} \Phi(a, b; vw) + \frac{u}{p}(D - D_{w}^{\infty}) + \frac{va}{pb}\left[D\begin{pmatrix} a+1; b+1, p \\ u+1, v \end{pmatrix} - D_{w}^{\infty}\begin{pmatrix} a+1; b+1, p \\ u+1, v, w \end{pmatrix}\right]$$

entonces:

$$D_{w}^{\infty}(u+1) = \frac{w^{u}}{p} e^{-pw} \Phi(a, b; vw) + \frac{u}{p} D_{w}^{\infty} + \frac{va}{pb} D_{w}^{\infty}\begin{pmatrix} a+1; b+1, p \\ u+1, v, w \end{pmatrix} + D(u+1) - \frac{u}{p} D - \frac{va}{pb} D\begin{pmatrix} a+1; b+1, p \\ u+1, v \end{pmatrix} \qquad (32)$$

Por otro lado, si hacemos $u = u + 1$ en (4) e integramos por partes, obtenemos:

$$D\begin{pmatrix} a; b, p \\ u+1, v \end{pmatrix} = \frac{1}{p}\Big[\int_0^\infty t^{u-1} e^{-pt}\Phi(a, b; vt)dt +$$
$$+v\frac{a}{b}\int_0^\infty t^u e^{-pt}\Phi(a+1, b+1; vt)dt\Big]$$

lo cual podemos escribir como:

$$\frac{u}{p}D\begin{pmatrix} a; b, p \\ u, v \end{pmatrix} = -\frac{va}{pv}D\begin{pmatrix} a+1, b+1, p \\ u+1, v \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} a; b, p \\ u+1, v \end{pmatrix} \tag{33}$$

y usando (33) en (32) obtenemos el resultado (26).

Para probar (27), (28), (29), (30) y (31) usamos la regla de Leibnitz para derivar bajo el signo integral. Haciendo $a = 0$ y $p = 1$ en (25), (26), (27), (28), (29), (30) y (31), obtenemos los siguientes casos particulares:

$$\gamma(u+1, w) = u\gamma(u, w) - w^u e^w \tag{34}$$

$$\Gamma(u+1, w) = w^u e^w + u\Gamma(u, w) \tag{35}$$

$$\frac{d}{dw}\left[w^{-u}\Gamma(u, w)\right] = -w^{-u-1}\Gamma(u+1, w) \tag{36}$$

$$\frac{d}{dw}\left[e^{pw}\Gamma(u, w)\right] = e^w\Gamma(u, w) - w^{u-1} \tag{37}$$

$$\frac{d}{dw}\gamma(u, w) = -\frac{d}{dw}\Gamma(u, w) \tag{38}$$

$$\frac{d}{dw}\left[\omega^{-v}\gamma(u, w)\right] = -w^{-u-1}\gamma(u+1, w) \tag{39}$$

$$\frac{d}{dw}\left[e^{pw}\gamma(u, w)\right] = e^w\Gamma(u, w) + w^{u-1} \tag{40}$$

5. Serie asintótica para $D\begin{pmatrix} a; b, p \\ u, v \end{pmatrix}$, $D_o^w\begin{pmatrix} a; b, p \\ u, v \end{pmatrix}$ y $D_w^\infty\begin{pmatrix} a; b, p \\ u, v \end{pmatrix}$

La expansión en serie para la función hipergeométrica confluente es

$$\Phi(a, b, z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{k!(b)_k}(z)^k, \quad \forall z \in C. \tag{41}$$

Al sustituir (41) en (4) resulta:

$$D\begin{pmatrix} a; b, p \\ u, v \end{pmatrix} = \int_0^\infty t^{u-1} e^{-pt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{k!(b)_k}(vt)^k dt$$

lo cual se puede escribir por la convergencia uniforme [10,p.43] como:

$$D\begin{pmatrix} a; b, p \\ u, v \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k v^k}{k!(b)_k}\int_0^\infty t^{u-1+k} e^{-pt}dt \tag{42}$$

usando [9,p.317] en (42), se tiene:

$$D\begin{pmatrix} a; b, p \\ u, v \end{pmatrix} = p^{-u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{k!(b)_k}\left(\frac{v}{p}\right)^k\Gamma(u+k) \tag{43}$$

Siguiendo un procedimiento similar al anterior y usando (20), resulta:

$$D_0^w\begin{pmatrix} a; b, p \\ u, v, w \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k v^k}{k!(b)_k}\int_0^w t^{u-1+k} e^{-pt}dt \tag{44}$$

usando [9,p.317] en (44):

$$D_0^w\begin{pmatrix} a; b, p \\ u, v, w \end{pmatrix} = p^{-u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{k!(b)_k}\left(\frac{v}{p}\right)^k\gamma(u+k, pw) \tag{45}$$

Análogamente usando (21):

$$D_w^\infty\begin{pmatrix} a; b, p \\ u, v, w \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k v^k}{k!(b)_k}\int_w^\infty t^{u-1+k} e^{-pt}dt \tag{46}$$

de [9,p.317] se concluye:

$$D_w^\infty\begin{pmatrix} a; b, p \\ u, v, w \end{pmatrix} = p^{-u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{k!(b)_k}\left(\frac{v}{p}\right)^k\Gamma(u+k, pw) \tag{47}$$

Agradecimiento

Este trabajo forma parte de un proyecto financiado por el CONDES de la Universidad del Zulia. Agradecemos el apoyo brindado.

Referencias Bibliográficas

1. Agarwal, S.k. and S.L., Kalla; A generalized gamma distribution and its application in reliability. Commun. Statist-Teory Meth., 25(1), 201-201 (1996).
2. Al-Zamel, S.L., Kalla; and L., Galué, On a relation between integral transforms and the

Kobre operator of fractional integration. Hadronic Journal 18(1995), 363-575.5.

3. Kobayashi, K.; On generalized gamma functions occurring in diffraction theory. Journal of the Physical Society of Japan. Vol.60, Nº.5, pp.1501–1512.
4. Al Musallan, F. and S.L., Kalla; Further results on a generalized gamma function occurring in diffraction theory. Integral Transforms and Special Function. Vol. 7. Nº 3-4, pp. 175–190 (1996).
5. Al Musallan, F. and S.L., Kalla; Asymptotic expansions for generalized gamma functions. Applicable Analysis. Vol. 66, pp. 173–187 (1997)
6. Lebedev, N.N.; Special Functions and Their Applications. Dover Publications; Inc. New York,. (1972).
7. Prudnikov, A.; Brychov, Y. and Marichev, O.; Integrals and Series. Vol. III. Gordon and Breach Science Publication (1990).
8. Erdelyi, A. (Ed); Higher Transcendental Functions. Vol. I y Vol. II, Mc Grawwhill, New York.
9. Grdshteyn, I.,S.; Table of Integrals, Series and Products. Academic Press. New York (1965).
10. Apostol, T.; Análisis Matemático. Editorial Reverté, S.A. México, 1ª Edición, 1940.

Recibido el 26 de Julio de 1999
En forma revisada el 27 de Marzo de 2001