A generalization of modified Bourget's functions

Sandra Quero[1] y Leda Galué[2]

[1]*Proyecto Thales (Laboratorio de Informática Educativa), Facultad de Humanidades y Educación, Universidad del Zulia. Maracaibo, Venezuela.*

[2]*Centro de Investigación de Matemática Aplicada (C.I.M.A), Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia, Apartado 526. Maracaibo, Venezuela. E-mail: lgalue@falcon.ing.luz.ve*

Abstract

In this paper we present a generalization of modified Bourget's functions and important properties of themselves, such as: generating function and recurrence relations. Further a differential equation of fourth order satisfied by the modified Bourget's functions in generalized way is built. The results given by N. Hayek and E. R. Negrin in 1989 are particular cases of these here obtained.

Key words: Modified Bourget's functions, generating function, recurrence relations.

Una generalización de las funciones modificadas de Bourget

Resumen

En este trabajo se presenta una generalización de las funciones modificadas de Bourget y se muestran propiedades importantes de las mismas, como lo son: la función generadora y varias relaciones de recurrencia. Además se construye una ecuación diferencial de cuarto orden la cual es satisfecha por las funciones modificadas de Bourget generalizadas. También se demuestra que las funciones modificadas de Bourget, dadas por N. Hayek y E.R. Negrin en 1989, se obtienen como caso particular de esta generalización.

Palabras clave: Funciones modificadas de Bourget, función generadora, relaciones de recurrencia.

Introducción

Las funciones modificadas de Bourget, son generalización de las funciones de Bessel pero con argumento imaginario, las cuales tienen aplicaciones en problemas de astronomía y en problemas de tipo físico-matemático [1]. Dichas funciones fueron definidas en 1989 por N. Hayek y E.R. Negrin [2], mediante las siguientes expresiones,

$$I_{n,k}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{t}{i}+\frac{i}{t}\right)^k \exp\left[\frac{z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right] t^{-n-1}dt = i^{-n}J_{n,k}(iz) \tag{1}$$

donde C es cualquier circulo centrado en el origen y

$$J_{n,k}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(2\cos\theta)^k \cos(n\theta - z sen\theta)d\theta, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} E_{n,k}(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{t}{i\sqrt{z}}+\frac{i\sqrt{z}}{t}\right)^k \exp\left(t+\frac{z}{t}\right) t^{-n-1}dt \\ &= z^{-\frac{n}{2}} I_{n,k}(2\sqrt{z}) \end{aligned} \tag{3}$$

La notación utilizada para la función modificada de Bourget, $I_{n,k}(z)$, está relacionada con la que originalmente se estableció para las funciones de Bessel con argumento imaginario, $I_\nu(z)$ [3]. En este trabajo se presenta una generalización de las funciones modificadas de Bourget y se muestran propiedades importantes de las mismas, como lo son: la función generadora y varias relaciones de recurrencia. Además se construye una ecuación diferencial de cuarto orden la cual es satisfecha por las funciones modificadas de Bourget generalizadas.

También se demuestra que las funciones modificadas de Bourget, dadas por N. Hayek y E.R. Negrín en 1989, se obtienen como caso particular de esta generalización.

Generalización de las Funciones Modificadas de Bourget

La expresión

$$\left[\left(\frac{t}{i}\right)^h + \left(\frac{i}{t}\right)^h\right]^k \exp\left[\frac{z}{2i}\left[\left(\frac{i}{t}\right)^m - \left(\frac{t}{i}\right)^m\right]\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{n,k}^{h,m}(z)\, t^n \quad (4)$$

con $t \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$ y $h,k,m \in \mathbb{N}$, es la función generadora de $I_{n,k}^{h,m}(z)$.

Como $\left[\left(\frac{t}{i}\right)^h + \left(\frac{i}{t}\right)^h\right]^k \exp\left[\frac{z}{2i}\left[\left(\frac{i}{t}\right)^m - \left(\frac{t}{i}\right)^m\right]\right]$ es analítica en todo su dominio, en el cual $t \neq 0$, entonces por el Teorema de Laurent tenemos:

$$I_{n,k}^{h,m}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left[\left(\frac{t}{i}\right)^h + \left(\frac{i}{t}\right)^h\right]^k \exp\left[\frac{z}{2i}\left[\left(\frac{i}{t}\right)^m - \left(\frac{t}{i}\right)^m\right]\right] \times t^{-n-1}dt. \quad (5)$$

Tomando a C como la circunferencia: $t(\theta) = ie^{i\theta}$, $\theta \in [0,2\pi]$, después de utilizar la identidad de Euler

$$I_{n,k}^{h,m}(z) = \frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi}[2\cos(h\theta)]^k[\cos(n\theta - izsen(m\theta)) - isen(n\theta - izsen(m\theta))]\,d\theta$$

dada la simetría del integrando alrededor del eje x,

$$I_{n,k}^{h,m}(z) = \frac{i^{-n}}{\pi}\int_0^{\pi}[2\cos(h\theta)]^k[\cos(n\theta - izsen(m\theta))]\,d\theta \quad (6)$$

esto es,

$$I_{n,k}^{h,m}(z) = i^{-n}J_{n,k}^{h,m}(iz) \quad (7)$$

donde

$$J_{n,k}^{h,m}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[2\cos(h\theta)]^k[\cos(n\theta - zsen(m\theta))]\,d\theta \quad (8)$$

es una generalización de la función de Bourget $J_{n,k}(z)$ dada en (2).

Relaciones de Recurrencia para $I_{n,k}^{h,m}(z)$

Si en la expresión (5) se aplica la Regla de Leibniz [4, p.503] para derivar con respecto de z, se separa en dos integrales y se utiliza de nuevo (5), se obtiene

$$2\left(I_{n,k}^{h,m}\right)'(z) = i^{m-1}I_{n+m,k}^{h,m}(z) - i^{-m-1}I_{n-m,k}^{h,m}(z). \quad (9)$$

Si la función generadora de $I_{n,k+1}^{h,m}(z)$ se deriva con respecto de t y se aplica nuevamente (4), queda

$$\frac{(k+1)h}{i^h}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{n,k}^{h,m}(z)\, t^{n+h-1} + (-1)^{h-1} \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{n,k}^{h,m}(z)\, t^{n-h-1}\right] + \frac{zm}{2i^{m-1}}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{n,k+1}^{h,m}(z)\, t^{n+m-1} + (-1)^m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{n,k+1}^{h,m}(z)\, t^{n-m-1}\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nt^{n-1}I_{n,k+1}^{h,m}(z). \quad (10)$$

Identificando coeficientes con potencias de t^{n-1}, resulta

$$(k+1)h\left[I_{n-h,k}^{h,m}(z) + (-1)^{h-1}I_{n+h,k}^{h,m}(z)\right] + \frac{1}{2}mzi^{h-m+1}\left[I_{n-m,k+1}^{h,m}(z) + (-1)^m I_{n+m,k+1}^{h,m}(z)\right] = i^h n\, I_{n,k+1}^{h,m}(z). \quad (11)$$

De (5),

$$I_{n,k+1}^{h,m}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left[\left(\frac{t}{i}\right)^h + \left(\frac{i}{t}\right)^h\right]^{k+1} \exp\left[\frac{z}{2i}\left[\left(\frac{i}{t}\right)^m - \left(\frac{t}{i}\right)^m\right]\right] \times t^{-n-1}dt, \quad (12)$$

la cual puede ser separada en dos integrales, y en ambas se puede aplicar nuevamente (5), llegando a la siguiente relación de recurrencia

$$i^h I_{n,k+1}^{h,m}(z) = I_{n-h,k}^{h,m}(z) + (-1)^h I_{n+h,k}^{h,m}(z). \quad (13)$$

Cambiando k por $k+l$ y z por $z+w$ en (5), se tiene

$$I_{n,k+l}^{h,m}(z+w)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\left(\frac{t}{i}\right)^h+\left(\frac{i}{t}\right)^h\right]^l\times$$
$$\exp\left[\frac{w}{2i}\left[\left(\frac{i}{t}\right)^m-\left(\frac{t}{i}\right)^m\right]\right]\left[\left(\frac{t}{i}\right)^h+\left(\frac{i}{t}\right)^h\right]^k\times$$
$$\exp\left[\frac{z}{2i}\left[\left(\frac{i}{t}\right)^m-\left(\frac{t}{i}\right)^m\right]\right]t^{-n-1}dt. \tag{14}$$

Utilizando (4) en esta expresión, intercambiando el orden entre la integral y la sumatoria, en base a la convergencia uniforme de la serie [5, Teorema 14-31, pág. 430], y aplicando (5), queda

$$I_{n,k+l}^{h,m}(z+w)=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}I_{r,k}^{h,m}(z)I_{n-r,l}^{h,m}(w). \tag{15}$$

Desarrollo en serie para $I_{n,k}^{h,m}(z)$

Se puede obtener una representación en serie de $I_{n,k}^{h,m}(z)$ escribiendo su representación integral (5), en la forma

$$I_{n,k}^{h,m}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\left(\frac{t}{i}\right)^h+\left(\frac{i}{t}\right)^h\right]^k\exp\left[\frac{z}{2i}\left(\frac{i}{t}\right)^m\right]\times$$
$$\exp\left[-\frac{z}{2i}\left(\frac{t}{i}\right)^m\right]t^{-n-1}dt. \tag{16}$$

Ahora bien, utilizando el desarrollo del binomio y el desarrollo en serie de la exponencial, (16) se transforma en

$$I_{n,k}^{h,m}(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\frac{(-1)^{hl}\binom{k}{l}\left(\frac{z}{2}\right)^s i^{hk+ms-s}}{s!}\times$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\exp\left[-\frac{z}{2i}\left(\frac{t}{i}\right)^m\right]t^{-(hk+ms+n-2hl+1)}dt, \tag{17}$$

donde hemos intercambiado el orden de la integral y las sumatorias [5, Teorema 14-31, p. 430].

Al efectuar en la integral un cambio de variable y en virtud del resultado conocido [6]

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_c e^t t^{-z}dt, \tag{18}$$

se tiene entonces

$$I_{n,k}^{h,m}(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{\frac{2hl-hk-n}{m}+hl-s}\binom{k}{l}i^{\frac{2hl-hk-n}{m}+2hl-2s-n}\times$$
$$\left(\frac{z}{2}\right)^{2s+\frac{hk+n-2hl}{m}}\frac{1}{ms!\,\Gamma\left(\frac{hk+ms+n-2hl}{m}+1\right)}, \tag{19}$$

la cual es el desarrollo en serie para $I_{n,k}^{h,m}(z)$.

Otra Representación de $I_{n,k}^{h,m}(z)$

Si en el resultado (5) se sustituye la exponencial por su desarrollo en serie, entonces

$$I_{n,k}^{h,m}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\left(\frac{t}{i}\right)^h+\left(\frac{i}{t}\right)^h\right]^k\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\left[\frac{z}{2i}\left[\left(\frac{i}{t}\right)^m-\left(\frac{t}{i}\right)^m\right]\right]^\nu}{\nu!}t^{-n-1}dt. \tag{20}$$

Tomando C como el circulo de radio 1, $t(\theta)=ie^{i\theta}$, se obtiene

$$I_{n,k}^{h,m}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2^{k+\nu-1}(-1)^\nu}{i^n\pi\nu!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^\pi\cos^k(h\theta)\,sen^\nu(m\theta)$$
$$[\cos(n\theta)-isen(n\theta)]d\theta, \tag{21}$$

Generalización de la Función Modificada de Bourget $E_{n,k}(z)$

La expresión

$$\left[\left(\frac{t}{i\sqrt{z}}\right)^h+\left(\frac{i\sqrt{z}}{t}\right)^h\right]^k\exp\left[i\sqrt{z}\left[\left(\frac{t}{i\sqrt{z}}\right)^m-\left(\frac{i\sqrt{z}}{t}\right)^m\right]\right]=$$
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E_{n,k}^{h,m}(z)t^n \tag{22}$$

para $t\neq 0$ y $z\neq 0$, donde $n\in\mathbb{Z}$ y $h,k,m\in\mathbb{N}$, es la función generadora de $E_{n,k}^{h,m}(z)$.

Por el Teorema de Laurent tenemos:

$$E_{n,k}^{h,m}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\left(\frac{t}{i\sqrt{z}}\right)^h+\left(\frac{i\sqrt{z}}{t}\right)^h\right]^k\times$$
$$\exp\left[i\sqrt{z}\left[\left(\frac{t}{i\sqrt{z}}\right)^m-\left(\frac{i\sqrt{z}}{t}\right)^m\right]\right]t^{-n-1}dt. \tag{23}$$

Al hacer en esta integral el cambio de variable $t=i\sqrt{z}e^{i\theta}$, y por un proceso similar al de la obtención de $I_{n,k}^{h,m}(z)$, se tiene

$$E_{n,k}^{h,m}(z) = \frac{i^{-n} z^{-\frac{n}{2}}}{\pi} \int_0^{\pi} [2\cos(h\theta)]^k \times$$
$$\cos(n\theta - 2i\sqrt{z} sen(m\theta))\, d\theta. \quad (24)$$

Relacionando esta expresión con (7) y (8) se obtiene

$$E_{n,k}^{h,m}(z) = z^{-\frac{n}{2}} i^{-n} J_{n,k}^{h,m}(2i\sqrt{z}) = z^{-\frac{n}{2}} I_{n,k}^{h,m}(2\sqrt{z}). \quad (25)$$

Al hacer $h = m = 1$ en cada una de estas expresiones, se obtienen los resultados dados por Hayek y Negrin [2].

Ecuación Diferencial satisfecha por $I_{n,k}^{h,m}(z)$

De (8)

$$J_{n,k-2}^{h,m}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [2\cos(h\theta)]^{k-2} \cos(n\theta - zsen(m\theta))\, d\theta, \quad (26)$$

derivando este resultado dos veces con respecto de z [4, p. 503], y aplicando (26), se obtiene

$$(J_{n,k-2}^{h,m})''(z) = -J_{n,k-2}^{h,m}(z) + F(z) \quad (27)$$

donde

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [2\cos(h\theta)]^{k-2} \cos^2(m\theta) \times$$
$$\cos(n\theta - zsen(m\theta))\, d\theta. \quad (28)$$

Al aplicar el operador diferencial ∇_n [1, p. 39]

$$\nabla_n = z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z\frac{d}{dz} + z^2 - n^2 \quad (29)$$

a (8) se obtiene

$$\nabla_n J_{n,k}^{h,m}(z) + n^2 J_{n,k}^{h,m}(z) =$$

$$\frac{z^2}{\pi} \int_0^{\pi} [2\cos(h\theta)]^k \cos(n\theta - zsen(m\theta)) \cos^2(m\theta)\, d\theta +$$
$$\frac{z}{\pi} \int_0^{\pi} [2\cos(h\theta)]^k sen(n\theta - zsen(m\theta))\, sen(m\theta)\, d\theta. \quad (30)$$

En virtud de que

$$\frac{1}{\pi m} \int_0^{\pi} [2\cos(h\theta)]^k \frac{d}{d\theta}\left[-\left(\frac{n}{m} + z\cos(m\theta)\right) \times \right.$$
$$\left. sen(n\theta - zsen(m\theta))\right] d\theta + \frac{n^2}{m^2} J_{n,k}^{h,m}(z) =$$

$$\frac{z^2}{\pi} \int_0^{\pi} [2\cos(h\theta)]^k \cos(n\theta - zsen(m\theta)) \cos^2(m\theta)\, d\theta +$$
$$\frac{z}{\pi} \int_0^{\pi} [2\cos(h\theta)]^k sen(n\theta - zsen(m\theta))\, sen(m\theta)\, d\theta. \quad (31)$$

al comparar (30) y (31), se deduce que

$$\nabla_n J_{n,k}^{h,m}(z) + \left(1 - \tfrac{1}{m^2}\right) n^2 J_{n,k}^{h,m}(z) =$$
$$\frac{1}{\pi m} \int_0^{\pi} [2\cos(h\theta)]^k \frac{d}{d\theta}\left[-\left(\frac{n}{m} + z\cos(m\theta)\right) \times\right.$$
$$\left. sen(n\theta - zsen(m\theta))\right] d\theta. \quad (32)$$

Integrando (32) por partes y utilizando la siguiente identidad

$$\frac{2hk}{\pi m^2} \int_0^{\pi} \frac{d}{d\theta}[\cos(n\theta - zsen(m\theta))]\, [2\cos(h\theta)]^{k-1} sen(h\theta)\, d\theta =$$
$$-\frac{2hkn}{\pi m^2} \int_0^{\pi} [2\cos(h\theta)]^{k-1} sen(n\theta - zsen(m\theta))\, sen(h\theta)\, d\theta +$$
$$\frac{2hk}{\pi m} z \int_0^{\pi} [2\cos(h\theta)]^{k-1} sen(n\theta - zsen(m\theta))\, sen(h\theta) \cos(m\theta)\, d\theta, \quad (33)$$

después de efectuar algunas operaciones (32) se transforma en

$$\nabla_n J_{n,k}^{h,m}(z) + \left(1 - \tfrac{1}{m^2}\right) n^2 J_{n,k}^{h,m}(z) =$$
$$\frac{2hk}{\pi m^2} \int_0^{\pi} \frac{d}{d\theta}[\cos(n\theta - zsen(m\theta))] \times$$
$$[2\cos(h\theta)]^{k-1} sen(h\theta)\, d\theta - \frac{2hk}{m} z \left(J_{n,k}^{h,m}\right)'(z) -$$
$$\frac{4hk}{\pi m} z \int_0^{\pi} [2\cos(h\theta)]^{k-1} sen(n\theta - zsen(m\theta)) \times$$
$$sen(h\theta - m\theta)\, d\theta. \quad (34)$$

Sea

$$I = \frac{2hk}{\pi m^2} \int_0^{\pi} \frac{d}{d\theta}[\cos(n\theta - zsen(m\theta))] \times$$
$$[2\cos(h\theta)]^{k-1} sen(h\theta)\, d\theta \quad (35)$$

integrando por partes se tiene

$$I = \frac{4k(k-1)h^2}{m^2 \pi} \int_0^{\pi} [2\cos(h\theta)]^{k-2} \times$$
$$sen^2(h\theta) \cos(n\theta - zsen(m\theta))\, d\theta -$$
$$\frac{2h^2 k}{\pi m^2} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - zsen(m\theta)) \times$$
$$[2\cos(h\theta)]^{k-1} \cos(h\theta)\, d\theta, \quad (36)$$

utilizando una identidad trigonométrica elemental en la primera integral, haciendo algunas simplificaciones y aplicando (8) la integral I queda expresada como

$$I = \frac{4k(k-1)h^2}{m^2} J^{h,m}_{n,k-2}(z) - \frac{h^2k^2}{m^2} J^{h,m}_{n,k}(z), \qquad (37)$$

sustituyendo (37) en (34), se obtiene

$$\nabla_n J^{h,m}_{n,k}(z) + \frac{2hk}{m} z\left(J^{h,m}_{n,k}\right)'(z) + \left(\frac{h^2k^2 + m^2n^2 - n^2}{m^2}\right) \times$$

$$J^{h,m}_{n,k}(z) - G(z) = \frac{4k(k-1)h^2}{m^2} J^{h,m}_{n,k-2}(z), \qquad (38)$$

donde

$$G(z) = -\frac{4hk}{\pi m} z\int_0^\pi [2\cos(h\theta)]^{k-1} sen\,(n\theta - z sen(m\theta)) \times$$

$$sen(h\theta - m\theta)\, d\,\theta. \qquad (39)$$

Aplicando $\left(\frac{d^2}{dz^2} + 1\right)$ en (38), y desarrollando todos los términos del primer miembro se obtienen los siguientes resultados

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + 1\right)\left(\nabla_n J^{h,m}_{n,k}(z)\right) =$$

$$z^2 (J^{h,m}_{n,k})^{iv}(z) + 5z\,(J^{h,m}_{n,k})'''(z) + (2z^2 - n^2 + 4) \times$$

$$(J^{h,m}_{n,k})''(z) + 5z(J^{h,m}_{n,k})'(z) + (z^2 - n^2 + 2) J^{h,m}_{n,k}(z), \qquad (40)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + 1\right)\frac{2hk}{m} z(J^{h,m}_{n,k})'(z) =$$

$$\frac{2hk}{m} z\,(J^{h,m}_{n,k})'''(z) + \frac{4hk}{m}(J^{h,m}_{n,k})''(z) + \frac{2hk}{m} z(J^{h,m}_{n,k})'(z), \qquad (41)$$

por lo tanto de (38), (40), (41) y (27), queda

$$z^2 (J^{h,m}_{n,k})^{iv}(z) + z(\tfrac{2hk}{m} + 5)(J^{h,m}_{n,k})'''(z) +$$

$$\left(2z^2 + (\tfrac{hk}{m} + 2)^2 - \frac{n^2}{m^2}\right)(J^{h,m}_{n,k})''(z) +$$

$$z(\tfrac{2hk}{m} + 5)(J^{h,m}_{n,k})'(z) + \left(z^2 + \tfrac{h^2k^2 - n^2}{m^2} + 2\right) J^{h,m}_{n,k}(z) =$$

$$\frac{4k(k-1)h^2}{m^2} F(z) + G''(z) + G(z). \qquad (42)$$

Finalmente, de (7) y (42) se obtiene la ecuación diferencial satisfecha por $I^{h,m}_{n,k}(z)$

$$z^2 (I^{h,m}_{n,k})^{iv}(z) + z(\tfrac{2hk}{m} + 5)(I^{h,m}_{n,k})'''(z) -$$

$$\left(2z^2 - (\tfrac{hk}{m} + 2)^2 + \frac{n^2}{m^2}\right)(I^{h,m}_{n,k})''(z) -$$

$$z(\tfrac{2hk}{m} + 5)(I^{h,m}_{n,k})'(z) + \left(z^2 - \tfrac{h^2k^2 - n^2}{m^2} - 2\right) I^{h,m}_{n,k}(z) +$$

$$i^{-n}\left[\frac{4k(k-1)h^2}{m^2} F(iz) + G''(iz) + G(iz)\right] = 0, \qquad (43)$$

donde

$$G''(z) = \frac{8hk}{m\pi} \int_0^\pi [2\cos(h\theta)]^{k-1} \cos(n\theta - z sen(m\theta)) \times$$

$$sen(h\theta - m\theta)\, sen(m\theta) d\,\theta +$$

$$\frac{4hk}{m\pi} z\int_0^\pi [2\cos(h\theta)]^{k-1} sen\,(n\theta - z sen(m\theta)) \times$$

$$sen(h\theta - m\theta)\, sen^2(m\theta) d\,\theta. \qquad (44)$$

Referencias Bibliográficas

1. Watson, G.N.: A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge University Press, 1966.
2. Hayek, N. and Negrin, E.R.: On modified Bourget's functions. Ganita Sandesh, Vol. 40, No. 1 (1989), 29-33.
3. Nicolás, J.: Étude des fonctions de Fourier (première et deuxième espèce). Ann. Sci. de l'École norm.sup. (2); XI; 1882, supplémen, pp. 3-90.
4. Piskunov, N.: Cálculo Diferencial e Integral. Montaner y Simón, Barcelona, 1978.
5. Apostol, T.M.: Análisis Matemático. Editorial Reverté, S.A. México, 1ª edición. 1960.
6. Lebedev, N.: Special Functions and Their Applications. Dover Publications Inc. New York, 1972.

Recibido el 13 de Octubre de 1997
En forma revisada el 22 de Abril de 1999