A generalized radiation integral

Ana Isolina Prieto

Centro de Investigación de Matemática Aplicada (C.I.M.A.), Facultad de Ingeniería Universidad del Zulia, Apartado 10482. Maracaibo, Venezuela

Abstract

In the present investigation, we define a family of integral by

$$A_{m\ \mu}^{\left(\begin{smallmatrix} p,q \\ r,s \end{smallmatrix}\right)}\begin{bmatrix} a,b,c,d,\lambda \\ \alpha,(\alpha_p),(\beta_q) \\ (\rho_r),\gamma_s) \end{bmatrix} = \frac{\sigma a}{4\pi}\frac{\prod_{j=1}^{s}\Gamma(\gamma_j)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\rho_j)}(-d)^{-m\delta}\cdot\int_0^b x^{\lambda+m\delta}(x^m+c)^{-\alpha}\,{}_{p+1}F_q\left(\alpha,(\alpha_p);(\beta_q);-\frac{a^m}{x^m+c}\right)$$

$$\cdot\, G_{s+1,r}^{r\ \mu}\left(-\frac{x^m}{d^m}\middle|\begin{matrix}\delta+1,\delta+(\gamma_s) \\ \delta+(\rho_r)\end{matrix}\right)dx$$

where $a, b, c, d > 0$; $-1 - m\min\operatorname{Re}(\delta+ph) - m\operatorname{Re}(\delta) < \operatorname{Re}\lambda < m[\max\operatorname{Re}(\delta+1,\delta+\gamma_j)-1] - m\operatorname{Re}(\delta-\alpha) - m\min\operatorname{Re}(\beta_1) - 1, h = 1,\ldots r. j = 1,\ldots, u-1. m,p,q,r,u,s \in \mathbb{N}$, and the integrand is the profuct of an algebraic function the generalized hypergeometric function and a Meijer's *G*-function. We obtain special cases of this integral (*C* and *S*-integral). This integral is expressed in terms of Meijer's *G*-function.

Key words: Integrals, function the generalized hypergeometric, Meijer's G-function.

Una integral de radiación generalizada

Resumen

En esta investigación, definimos una familia de integrales por

$$A_{m\ \mu}^{\left(\begin{smallmatrix} p,q \\ r,s \end{smallmatrix}\right)}\begin{bmatrix} a,b,c,d,\lambda \\ \alpha,(\alpha_p),(\beta_q) \\ (\rho_r),\gamma_s) \end{bmatrix} = \frac{\sigma a}{4\pi}\frac{\prod_{j=1}^{s}\Gamma(\gamma_j)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\rho_j)}(-d)^{-m\delta}\cdot\int_0^b x^{\lambda+m\delta}(x^m+c)^{-\alpha}\,{}_{p+1}F_q\left(\alpha,(\alpha_p);(\beta_q);-\frac{a^m}{x^m+c}\right)$$

$$\cdot\, G_{s+1,r}^{r\ \mu}\left(-\frac{x^m}{d^m}\middle|\begin{matrix}\delta+1,\delta+(\gamma_s) \\ \delta+(\rho_r)\end{matrix}\right)dx$$

donde $a, b, c, d > 0$; $-1 - m\min\operatorname{Re}(\delta+ph) - m\operatorname{Re}(\delta) < \operatorname{Re}\lambda < m[\max\operatorname{Re}(\delta+1,\delta+\gamma_j)-1] - m\operatorname{Re}(\delta-\alpha) - m\min\operatorname{Re}(\beta_1) - 1, h = 1,\ldots r. j = 1,\ldots, u-1. m,p,q,r,u,s \in \mathbb{N}$, y el integrando es el producto de una función algebraica, la función hipergeométrica generalizada y la función *G* de Meijer. Obtenemos casos especiales de esta integral (*C* y *S*-integral). Esta integral es expresada en términos de la función *G* de Meijer.

Palabras clave: Integrales, función hipergeométrica generalizada, función *G* de Meijer.

Introducción

La integral de Hubbell [1] definida por la función

$$I\,(a,b) = \frac{\sigma}{4\pi}\int_0^b \arctan\frac{a}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \qquad (1)$$

$$a,b > 0;\ a = \frac{w}{h}, b = \frac{l}{h},$$

representa la respuesta de un detector de radiación unidireccional, ubicado a una altura *h* directamente sobre una de las esquinas, de una fuente plana isotrópica rectangular de longitud l, ancho w y densidad uniforme σ.

Kalla, Al-Saqabi y Conde [2] han generalizado la integral de fuente rectangular de Hubbell, de la siguiente forma:

$$H\begin{bmatrix} a, b, p, \lambda \\ \alpha, \beta, \gamma \end{bmatrix} = \frac{\sigma a}{4\pi} \int_0^b x^{\lambda}(x^2 + p)^{-\alpha}$$

$$\cdot\ {}_2F_1\left(\alpha, \beta, \gamma; -\frac{a^2}{x^2 + p}\right) dx \qquad (2)$$

$Re(\gamma) > Re(\beta) > 0$; $-1 < \lambda < 1$; $p, a, b, > 0$ y ${}_2F_1\ (\alpha, \beta; \gamma; t)$ es la función hipergeométrica de Gauss dada por la serie

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} z^k \qquad (3)$$

donde z es una variable real o compleja y $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$

Para valores particulares de los parámetros (2) se reduce a diferentes integrales con aplicaciones potenciales en problemas de campo de radiación, de configuración específica de fuente, barrera y detector.

Posteriormente, Galué [3] generalizó la integral H usando algunas expresiones algebraicas y la función hipergeométrica de Gauss definida en (3):

$$I\begin{bmatrix} a, b, p, \lambda, \mu \\ \alpha, \beta, \gamma \end{bmatrix} = \frac{\sigma a}{4\pi} \int_0^b x^{\lambda}(x^2 + p)^{-\alpha}(1 - x^2 / b^2)^{\mu}$$

$$\cdot\ {}_2F_1\left(\alpha, \beta; \gamma; -\frac{a^2}{x^2 + p}\right) dx \qquad (4)$$

donde $0 < a \leq b < \infty$; $p > 0$; $\mu > -1$; $-1 < \gamma < 2\alpha - 2\mu - 1$ y $Re\gamma > Re\beta > 0$.

Andrade de Fuenmayor [4] ha dado otra generalización de la integral H de Kalla, a través de la integral

$$C\begin{bmatrix} a, b, c, p, \lambda \\ \alpha, \beta, \gamma \\ \alpha', \beta', \gamma' \end{bmatrix} = \frac{\sigma a}{4\pi} \int_0^b x^{\lambda}(x^2 + p)^{-\alpha}$$

$$\cdot\ {}_2F_1\left(\alpha, \beta; \gamma; -\frac{a^2}{x^2 + p}\right)$$

$$\cdot\ {}_2F_1\left(\alpha', \beta'; \gamma'; \frac{c^2}{x^2}\right) dx \qquad (5)$$

Con $Re(\gamma) > Re(\beta) > 0$, $Re(\gamma') > Re(\beta') > 0$, $-1 < \lambda < 1$; $a, b, c, p > 0$ y ${}_2F_1$ es la función hipergeométrica de Gauss.

Por otro lado, Saigo y Srivastava [5], generalizan la integral H de Kalla; donde reemplaza la función hipergeométrica de Gauss por la función hipergeométrica generalizada [6].

Así,

$$S_m^{(p,q)}\begin{bmatrix} a, b, c, \lambda \\ \alpha, (\alpha_p), (\beta_q) \end{bmatrix} = \frac{\sigma a}{4\pi} \int_0^b x^{\lambda}(x^m + c)^{-\alpha}$$

$$\cdot\ {}_{p+1}F_q\left(\begin{matrix} \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_p; \\ \beta_1, \ldots, \beta_q; \end{matrix} -\frac{a^m}{x^m + c}\right) dx \qquad (6)$$

donde $\min(a, b, c) > 0$, $\lambda \in (-1, 1)$ y ${}_{p+1}F_q$ es la función hipergeométrica generalizada, definida por:

$$ {}_pF_q\begin{bmatrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_p; \\ \beta_1, \ldots, \beta_q; \end{bmatrix} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{p} (\alpha_i)_n}{\prod_{i=1}^{q} (\beta_i)_n} \frac{z^n}{n!} \qquad (7)$$

$\beta_i \neq 0, -1, -2, \ldots,\ i = 1, 2, \ldots, q.$

Las integrales de fuente rectangular referidas anteriormente se pueden calcular por métodos conocidos de integración numérica o por medio de las expansiones en serie, lo que representa un paso muy importante en aplicaciones físicas.

Recientemente otros investigadores tales como Prieto y Srivastava [7] y Galué y Prieto [8] han generalizado la función $S_m^{(p,q)}$ de Saigo y Srivastava (6) a través del uso de funciones hipergeométricas generalizadas (7) y la función G de Meijer [9] respectivamente.

En este trabajo definimos la siguiente integral que representa otra generalización de (6), como sigue:

$$A_{m\ \mu}^{\begin{pmatrix} p,q \\ r,s \end{pmatrix}}\begin{bmatrix} a, b, c, d, \lambda \\ \alpha, (\alpha_p), (\beta_q) \\ (\rho_r), (\gamma_s) \end{bmatrix} = \frac{\sigma a}{4\pi} \frac{\prod_{j=1}^{s} \Gamma(\gamma_j)}{\prod_{j=1}^{r} \Gamma(\rho_j)} (-d)^{-m\delta}$$

$$\cdot \int_0^b x^{\lambda + m\delta}(x^m + c)^{-\alpha}\ {}_{p+1}F_q\left[\alpha, (\alpha_p); (\beta_q); -\frac{a^m}{x^m + c}\right]$$

$$\cdot\ G_{s+1\ r}^{r\ \mu}\left(-\frac{x^m}{d^m}\middle| \begin{matrix} \delta + 1, \delta + (\gamma_s) \\ \delta + (\rho_r) \end{matrix}\right) dx \qquad (8)$$

donde $a,b,c,d > 0$; $-1-m\min\mathrm{Re}(\delta+\rho_h) - m\mathrm{Re}(\delta) < \mathrm{Re}\lambda < m[\max\mathrm{Re}(\delta+1,\delta+\gamma_j)-1] - m\mathrm{Re}(\delta-\alpha) - m\min\mathrm{Re}(\beta_1)-1$, $h = 1, \ldots r, j = 1, \ldots, u-1$. $m,p,q,r,u,s \in \mathbb{N}$, y $G^{m\,n}_{p,q}$ es la función G de Meijer [9], dada por

$$G^{m\,n}_{p,q}\left(z\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_c X(s)z^{-s}ds \tag{9}$$

donde $i = (-1)^{1/2}$, $z \neq 0$ y

$$X(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+s)} \tag{10}$$

donde $\log|z|$ denota el logaritmo natural de $|z|$, m,n,p y q son enteros $0 \le n \le p$, $0 \le m \le q$ y a_j $(j = 1,\ldots p)$, b_j $(j = 1,\ldots,q)$ son números complejos tales que $a_j - b_h \neq 0,1,2,\ldots$, $j = 1,2,\ldots, n$ y $h = 1,2,\ldots, m$.

Los parámetros tales que los puntos

$-s = (b_j + \nu)$, $(j = 1,\ldots,m.\nu = 0,1,\ldots)$*

y

$s = (a_j - \nu - 1)$, $(j = 1,\ldots,n.\nu = 0,1,\ldots)$* *

están separados. Un producto vacío se interpreta como uno.

El contorno C es el que recorre de $k - i\infty$ a $k + i\infty$ tal que los puntos de * se encuentran a la derecha y todos los puntos de ** al lado izquierdo de éstos.

La integral (9) converge absolutamente si $|\arg z| = (m + n - \frac{p}{2} - \frac{q}{2})\pi \geq 0$.

$A^{\left(\begin{smallmatrix}p,q\\ r,s\end{smallmatrix}\right)}_{m,u}$ en términos de la función G de Meijer

Usando la definición de la función G de Meijer dada por (9) en (8), se tiene:

$$A^{\left(\begin{smallmatrix}p,q\\ r,s\end{smallmatrix}\right)}_{m\,u}\left[\begin{matrix}a,b,c,d,\lambda\\ \alpha,(\alpha_p),(\beta_q)\\ (\rho_r),(\gamma_s)\end{matrix}\right] = \frac{\sigma a}{4\pi}\frac{\prod_{j=1}^{s}\Gamma(\gamma_j)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\rho_j)}(-d)^{-m\delta}$$

$$\cdot\int_0^b x^{\lambda+m\delta}(x^m+c)^{-\alpha}\,{}_{p+1}F_q\left(\alpha,(\alpha_p);(\beta_q);-\frac{a^m}{x^m+c}\right)$$

$$\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c X(t)\left(-\frac{x^m}{d^m}\right)^{-t}dtdx$$

donde

$$X(t) = \frac{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\delta+\rho_j+t)\,\Gamma(-\delta-t)\prod_{j=2}^{u-1}\Gamma(1-\delta-\gamma_j-t)}{\prod_{j=u+1}^{s}\Gamma(\delta+\gamma_j+t)} \tag{11}$$

Intercambiando el orden de integración (válido por su convergencia uniforme) y usando (6), resulta

$$A^{\left(\begin{smallmatrix}p,q\\ r,s\end{smallmatrix}\right)}_{m\,u} = \frac{\sigma a}{4\pi}\frac{\prod_{j=1}^{s}\Gamma(\gamma_j)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\rho_j)}(-d)^{-m\delta}$$

$$\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c X(t)(-d)^{mt}S^{(p,q)}_{m}\left[\begin{matrix}a,b,c,\lambda+m(\delta-t)\\ \alpha,(\alpha_p),(\beta_q)\end{matrix}\right]dt$$

De [5, p.2 (2.3)] y expresando en serie la función hipergeométrica de Gauss (7),

$$A^{\left(\begin{smallmatrix}p,q\\ r,s\end{smallmatrix}\right)}_{m\,u} = \left(\frac{\sigma a}{4\pi}\right)^2\frac{b^{\lambda+m\delta+1}}{c^{\alpha}}(-d)^{-m\delta}\frac{\prod_{j=1}^{s}\Gamma(\gamma_j)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\rho_j)}$$

$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n\prod_{j=1}^{p}(\alpha_j)_n}{\prod_{j=1}^{q}(\beta_j)_n n!}\left(-\frac{a^m}{c}\right)^n$$

$$\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c X(t)\left(-\frac{d}{b}\right)^{mt}\frac{1}{(\lambda+m(\delta-t)+1)}$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)_k(\frac{\lambda+1}{m}+\delta-t)_k}{(\frac{\lambda+1}{m}+\delta-t+1)_k k!}\left(-\frac{b^m}{c}\right)^k dt$$

$$=\left(\frac{\sigma a}{4\pi}\right)^2\frac{b^{\lambda+m\delta+1}}{mc^{\alpha}}(-d)^{-m\delta}\frac{\prod_{j=1}^{s}\Gamma(\gamma_j)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\rho_j)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n\prod_{j=1}^{p}(\alpha_j)_n}{\prod_{j=1}^{q}(\beta_j)_n n!}\left(-\frac{a^m}{c}\right)^n$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)_k}{k!}\left(-\frac{b^m}{c}\right)^k\frac{1}{2\pi i}\int_c X(t)\left(-\frac{b^m}{d^m}\right)^{-t}$$

$$\cdot \frac{\Gamma(\frac{\lambda+1}{m}+\delta-t+k)}{\Gamma(\frac{\lambda+1}{m}+\delta-t+k+1)}dt$$

De (9) y (11):

$$A_{m,u}^{\binom{p,q}{r,s}} = \left(\frac{\sigma a}{4\pi}\right)^2 \frac{b^{\lambda+m\delta+1}}{mc^{\alpha}}(-d)^{-m\delta} \frac{\prod_{j=1}^{s}\Gamma(\gamma_j)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\rho_j)}$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n \prod_{j=1}^{p}(\alpha_j)_n}{\prod_{j=1}^{q}(\beta_j)_n n!}\left(-\frac{a^m}{c}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)_k}{k!}\left(-\frac{b^m}{c}\right)^k$$

$$\cdot G_{s+2,r+1}^{r,u+1}\left(-\frac{b^m}{d^m}\middle| \begin{matrix} 1-\frac{\lambda+1}{m}-\delta-k, \delta+1, \delta+(\gamma_s) \\ \delta+(\rho_r), -\frac{\lambda+1}{m}-\delta-k \end{matrix}\right) \tag{12}$$

con $a,b,c,d > 0$; $-1-m\min\mathrm{Re}(\delta+ph)-m\mathrm{Re}(\delta) < \mathrm{Re}\lambda < -m[\max\mathrm{Re}\,(\delta+1,\delta+\gamma_j)-1]-m\mathrm{Re}(\delta-\alpha)-m\min\mathrm{Re}(\beta_1)-1$, $h = 1, \ldots r$, $j = 1, \ldots, u-1$. $m, p,q,r,u,s \in \mathbb{N}$, y $G_{p,q}^{m,n}$ es la función G de Meijer.

Casos Particulares de $A_{m,u}^{\binom{p,q}{r,s}}$

Si $u = 1$ en (12):

$$A_{m,1}^{\binom{p,q}{r,s}}\begin{bmatrix} a,b,c,d,\lambda \\ \alpha,(\alpha_p),(\beta_q) \\ (\rho_r),(\gamma_s)\end{bmatrix} = \left(\frac{\sigma a}{4\pi}\right)^2 \frac{\prod_{j=1}^{s}\Gamma(\gamma_j)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\rho_j)}(-d)^{-m\delta}$$

$$\cdot \int_0^b x^{\lambda+m\delta}(x^m+c)^{-\alpha}\, {}_{p+1}F_q\left(\alpha,(\alpha_p);(\beta_q);-\frac{a^m}{x^m+c}\right)$$

$$\cdot G_{s+1,r}^{r,1}\left(-\frac{x^m}{d^m}\middle| \begin{matrix} \delta+1, \delta+(\gamma_s) \\ \delta+(\rho_r) \end{matrix}\right)dx = \left(\frac{\sigma a}{4\pi}\right)^2 \frac{b^{\lambda+m\delta+1}}{mc^{\alpha}}(-d)^{-m\delta}$$

$$\cdot \frac{\prod_{j=1}^{s}\Gamma(\gamma_j)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\rho_j)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n \prod_{j=1}^{p}(\alpha_j)_n}{\prod_{j=1}^{q}(\beta_j)_n n!}\left(-\frac{a^m}{c}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)_k}{k!}\left(-\frac{b^m}{c}\right)^k$$

$$\cdot G_{s+2,r+1}^{r,2}\left(-\frac{b^m}{d^m}\middle| \begin{matrix} 1-\frac{\lambda+1}{m}-\delta-k, \delta+1, \delta+1, \delta+(\gamma_s) \\ \delta+(\rho_r), -\frac{\lambda+1}{m}-\delta-k \end{matrix}\right) \tag{13}$$

con $a,b,c,d, > 0$; $-1-m\min\mathrm{Re}(\delta+ph)-m\mathrm{Re}(\delta) < \mathrm{Re}\lambda < -m[\max\mathrm{Re}\,(\delta+1,\delta+\gamma_j)-1]-m\mathrm{Re}(\delta-\alpha)-m\min\mathrm{Re}(\beta_1)-1$, $h = 1, \ldots r$, $j = 1, \ldots, u-1$. $m, p,q,r,s \in \mathbb{N}$.

Usando en (13) el siguiente resultado [9, p. 61]

$$z^{\lambda}\, {}_pF_q(a_p;b_q;-z) = \frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j)} G_{q+1,p}^{p,1}\left(z^{-1}\middle| \begin{matrix} \lambda+1, \lambda+(b_q) \\ \lambda+(a_p) \end{matrix}\right), \tag{14}$$

$p \leq q$ ó $p = q+1$ y $|z| < 1$

resulta,

$$A_{m,1}^{\binom{p,q}{r,s}}\begin{bmatrix} a,b,c,d,\lambda \\ \alpha,(\alpha_p),(\beta_q) \\ (\rho_r),(\gamma_s)\end{bmatrix} = \frac{\sigma a}{4\pi}\int_0^b x^{\lambda}(x^m+c)^{-\alpha}$$

$$\cdot\ {}_{p+1}F_q\left(\alpha,(\alpha_p);(\beta_q);-\frac{a^m}{x^m+c}\right)$$

$$\cdot\ {}_rF_s\left((\rho_s);(\gamma_s);\frac{d^m}{x^m}\right)dx = \left(\frac{\sigma a}{4\pi}\right)^2 \frac{b^{\lambda+m\delta+1}}{mc^{\alpha}}(-d)^{-m\delta}$$

$$\cdot \frac{\prod_{j=1}^{s}\Gamma(\gamma_j)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\rho_j)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n \prod_{j=1}^{p}(\alpha_j)_n}{\prod_{j=1}^{q}(\beta_j)_n n!}\left(-\frac{a^m}{c}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)_k}{k!}\left(-\frac{b^m}{c}\right)^k$$

$$\cdot G_{s+2,r+1}^{r,2}\left(-\frac{b^m}{d^m}\middle| \begin{matrix} 1-\frac{\lambda+1}{m}-\delta-k, \delta+1, \delta+1, \delta+(\gamma_s) \\ \delta+(\rho_r), -\frac{\lambda+1}{m}-\delta-k \end{matrix}\right) \tag{15}$$

con $a,b,c,d, > 0$; $-1-m\min\mathrm{Re}(\delta+ph)-m\mathrm{Re}(\delta) < \mathrm{Re}\lambda < -m[\max\mathrm{Re}\,(\delta+1)-1]-m\mathrm{Re}(\delta-\alpha)-m\min\mathrm{Re}(\beta_1)-1$, $h = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, u-1$. $m, p,q,r,s \in \mathbb{N}$; $r \leq s$ ó $r = s+1$ y $\left|-\frac{d^m}{x^m}\right| < 1$.

Haciendo $\delta = 0$ en (13) y usando la siguiente relación [9, p. 5 (1.1.13)]

$$E(\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\beta_1,\ldots,\beta_q) = G_{q+1,p}^{p,1}\left(z\middle| \begin{matrix} 1,\beta_1,\ldots,\beta_q \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_p \end{matrix}\right) \tag{16}$$

se tiene,

$$A_{m,1}^{\binom{p,q}{r,s}}\begin{bmatrix} a,b,c,d,\lambda \\ \alpha,(\alpha_p),(\beta_q) \\ (\rho_r),(\gamma_s)\end{bmatrix} = \left(\frac{\sigma a}{4\pi}\right)\frac{\prod_{j=1}^{s}\Gamma(\gamma_j)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\rho_j)}$$

$$\int_0^b x^{\lambda}(x^m + c)^{-\alpha}\ {}_{p+1}F_q\left(\alpha,(\alpha_p);(\beta_q);-\frac{a^m}{x^m + c}\right)$$

$$\cdot\ E\left(\rho_1,\ldots,\rho_r;\gamma_1,\ldots,\gamma_s;-\frac{x^m}{d^m}\right)dx \qquad (17)$$

$a,b,c,d, > 0$; $-1-m\min\mathrm{Re}(\delta+ph)-m\mathrm{Re}(\delta) < \mathrm{Re}\lambda < -m\ [\max\mathrm{Re}(\delta+1)-1]-m\mathrm{Re}(\delta-\alpha)-m\min\mathrm{Re}(\beta_1)-1$, $h=1,\ldots,r$, $j=1,\ldots,u-1.m$, $p,q,r,s \in \mathbb{N}$; y $E(\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\beta_1,\ldots,\beta_q;z)$ denota la función E de Mac Robert.

Casos Especiales

Si $r = 2$ y $s = 1$ en (15):

$$A_{m,1}^{\binom{p,q}{2,1}}\begin{bmatrix} a,b,c,d,\lambda \\ \alpha,(\alpha_p),(\beta_q) \\ \rho_1,\rho_2,\gamma_1 \end{bmatrix} = \frac{\sigma a}{4\pi}\int_0^b x^{\lambda}(x^m + c)^{-\alpha}$$

$$\cdot\ {}_{p+1}F_q\left(\alpha,(\alpha_p);(\beta_q);-\frac{a^m}{x^m + c}\right){}_2F_1\left(\rho_1,\rho_2,\gamma_1;\frac{d^m}{x^m}\right)dx$$

$$= \left(\frac{\sigma a}{4\pi}\right)^2 \frac{b^{\lambda+m\delta+1}}{mc^{\alpha}}(-d)^{-m\delta}\frac{\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\rho_1)\Gamma(\rho_2)}$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n\prod_{j=1}^{p}(\alpha_j)_n}{\prod_{j=1}^{q}(\beta_j)_n n!}\left(-\frac{a^m}{c}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)_k}{k!}\left(-\frac{b^m}{c}\right)^k$$

$$\cdot\ G_{3,3}^{2,2}\left(-\frac{b^m}{d^m}\left|\begin{matrix}1-\frac{\lambda+1}{m}-\delta-k,\delta+1,\delta+\gamma, \\ \delta+\rho_r,\delta+-\frac{\lambda+1}{2}-\delta-k\end{matrix}\right.\right) \qquad (18)$$

$a,b,c,d, > 0$; $-1-m\min\mathrm{Re}(\delta+\rho_1\delta+\rho_2)-m\mathrm{Re}(\delta) < \mathrm{Re}\lambda < -m\ [\max\mathrm{Re}(\delta+1)-1]-m\mathrm{Re}(\delta-\alpha)-m\min\mathrm{Re}(\beta_1)-1$, $m,p,q \in \mathbb{N}$; $\gamma_1 \neq 0,-1,-2,\ldots$

Haciendo $m = 2$, $p = q = 1$ en (18):

$$A_{2,1}^{\binom{1,1}{2,1}} = \frac{\sigma a}{4\pi}\int_0^b x^{\lambda}(x^2 + c)^{-\alpha}\ {}_2F_1\left(\alpha,\alpha_1,\beta_1;\frac{a^2}{x^2 + c}\right)$$

$$\cdot\ {}_2F_1\left(\rho_1,\rho_2,\gamma_1;\frac{d^2}{x^2}\right)dx \qquad (19)$$

se obtiene la integral estudiada por Andrade de Fuenmayor [4].

Haciendo $d = 0$ en (18):

$$A_{m,1}^{\binom{p,q}{2,1}}\begin{bmatrix} a,b,c,0,\lambda \\ \alpha,(\alpha_p),(\beta_q) \\ \rho_1,\rho_2,\gamma_p \end{bmatrix} = S_{m,n}^{p,q}\begin{bmatrix} a,b,c,\lambda \\ \alpha,(\alpha_p),(\beta_q)\end{bmatrix},$$

donde $S_{m,n}^{p,q}$ es la integral de Saigo y Srivastava definida en (6).

Referencias Bibliográficas

1. Hubbell, J.H., Bach, R.L. and Lamkin, J.C.: Radiation field from a rectangular source. J. Res. Nat. Bur. Standards C: Engrg. and Instrument 64C (1960), 121.
2. Kalla, S.L.; Al-Saqabi, B.; Conde, S.: Some results related to radiation field problems. Hadronic J. 10 (1987), 221-230.
3. Galué, L.: Una generalización de la integral de Hubbell. Rev. Téc. Ing. Univ. del Zulia, 14, (1991), 153-160.
4. Andrade de Fuenmayor, C.: Una generalización de la función H [a,b,p,λ; α, b, γ] de Kalla. Rev. Acad. Canar. Cienc., 6, (1994), 19-27.
5. Saigo, M. and Srivastava R.: Some new results for radiation field problems. Fukuoka Univ. Sci.Rep. 20, (1990), 1-13.
6. Erdélyi, A.: Higher Transcendental Functions. Vol. 1, Mc Graw-Hill, New York, 1953.
7. Prieto, A.I. y Srivastava, H.M.: Una generalización de la función $S_m^{(p,q)}$ asociada con algunas familias de integrales de radiación. Rev. Acad. Canar. Cienc. 9(1) (1997), 65-74.
8. Galué, L. y Prieto, A.: Integrales Generalizadas de Radiación que Involucran la Función G de Meijer. Rev. Acad. Canar. Cienc. 9(1) (1997), 57-64.
9. Mathai A.M. and Saxena R.K.: Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1973.

Recibido el 13 de Abril de 1998
En forma revisada el 30 de Noviembre de 1998