Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. Vol. 21, N° 2, 138-145, 1998

A new generalization of elliptic type integrals

Beatriz Molina* y Leda Galué**

**Escuela de Informática, Facultad Ciencias de la Informática*
Universidad Rafael Belloso Chacín. Maracaibo - Venezuela.
***Centro de Investigación de Matemática Aplicada (C.I.M.A.), Facultad de Ingeniería*
Universidad del Zulia, Apartado 526. Maracaibo, Venezuela

Abstract

The integrals of elliptic type appear in several problems of physical radiation; they have many applications in problems of illumination and heat exchange, in studies of civil defense to predict the radiation field produced by nuclear accidents and the irradiation technology in medicine, agriculture and industry.These integrals have been studied and generalized by several authors.

In this paper we define a new generalization of elliptic type integrals, giving for this particular cases, recurrence relations, representations in series, differential recurrence relations and evaluation of some integrals.

Key words: Elliptic type integrals, recurrence relations, representations in series.

Una nueva generalización de integrales tipo elípticas

Resumen

Las integrales tipo elípticas aparecen en ciertos problemas de radiación física; tienen diversas aplicaciones en problemas de iluminación e intercambio de calor, en estudios de defensa civil para predecir el campo de radiación ocasionado por accidentes nucleares y en tecnología de irradiación en el campo de la medicina, la agricultura y la industria. Estas integrales han sido estudiadas y generalizadas por diversos autores.

En este trabajo se define una nueva generalización de las integrales tipo elípticas presentando para ésta, casos particulares, relaciones de recurrencia, representaciones en serie, relaciones de recurrencia diferencial y evaluación de algunas integrales.

Palabras clave: Integrales tipo elípticas, relaciones de recurrencia, representaciones en serie.

Introducción

Las integrales tipo elípticas aparecen en ciertos problemas de radiación física; tienen diversas aplicaciones en problemas de iluminación e intercambio de calor, en estudios de defensa civil para predecir el campo de radiación ocasionado por accidentes nucleares y en tecnología de irradiación en el campo de la medicina, la agricultura y la industria. Estas integrales han sido estudiadas y generalizadas por diversos autores [1]. Así se tiene que Epstein y Hubbell (1963) [2], estudiaron la familia de integrales tipo elípticas

$$\Omega_j(k) = \int_0^{\pi} (1-k^2\cos\theta)^{-j-\frac{1}{2}} d\theta, \tag{1}$$

$(0 \le k < 1;\ j = 0,\ 1,\ 2, \ldots..)$.

S.L. Kalla y Al-Saqabi (1984) [3] consideraron una forma modificada de la integral (1) de la siguiente manera

$$\Omega_\mu(k) = \int_0^{\pi} \left(1-k^2\cos\theta\right)^{-\mu-\frac{1}{2}} d\theta, \tag{2}$$

$(\mathrm{Re}(\mu) > -1/2, 0 \le k < 1)$.

En 1984, Kalla [4] estudió una generalización de $\Omega_\mu(k)(\mu \in C)$ en la forma

$$S_\mu(k,\nu) = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^{2\nu}\theta}{(1-k^2\cos\theta)^{\mu+\frac{1}{2}}}d\theta, \tag{3}$$

$$\left(0 \le k < 1, \operatorname{Re}(\mu), \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}\right).$$

En 1986, Kalla, Conde y Hubbell [5], estudiaron una familia de integrales de la forma

$$R_\mu(k,\alpha,\gamma) = \int_0^\pi \frac{\cos^{2\alpha-1}(\theta/2)\operatorname{sen}^{2\gamma-2\alpha-1}(\theta/2)}{(1-k^2\cos\theta)^{\mu+\frac{1}{2}}}d\theta, \tag{4}$$

$$\left(0 \le k < 1, \operatorname{Re}(\gamma) > \operatorname{Re}(\alpha) \ge 0, \operatorname{Re}(\mu) > -\frac{1}{2}\right).$$

Kalla y Al-Saqabi (1986) [6], estudiaron una familia de integrales de la forma

$$K_\mu(k,m) = \int_0^\pi \frac{\cos^{2m}\theta}{(1-k^2\cos\theta)^{\mu+\frac{1}{2}}}d\theta, \tag{5}$$

$$(0 \le k < 1; \mu \in C, m \in No = N \cup \{0\}).$$

Al-Saqabi (1987) [7], definió una interesante unificación de estas familias de integrales (3) y (5), en la forma siguiente:

$$B_\mu(k,m,\nu) = \int_0^\pi \frac{\cos^{2m}\theta\operatorname{sen}^{2\nu}\theta}{(1-k^2\cos\theta)^{\mu+\frac{1}{2}}}d\theta, \tag{6}$$

$$\left(0 \le k < 1; m \in No, \mu \in C, \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}\right).$$

Otras familias de integrales tipo elípticas fueron definidas y consideradas por Das [8], Bushell [9], Björkberg y Kristensson [10], Mohamed [11] y Bromberg [12].

Podemos observar otra familia de integrales tipo elípticas, estudiada por Siddiqi [13], en la forma:

$$\Lambda_\nu(\alpha,k) = \int_0^\pi \frac{\exp\left[\alpha\operatorname{sen}^2(\theta/2)\right]}{(1-k^2\cos\theta)^{\nu+\frac{1}{2}}}d\theta, \tag{7}$$

$$(0 \le k < 1, \alpha, \nu \in \Re).$$

Al hacer un análisis de cada una de las familias de integrales elípticas consideradas anteriormente, es obvio que hay tres generalizaciones independientes que son:

i) $R_\mu(k,\alpha,\gamma)$ *ii)* $B_\mu(k,m,\nu)$ *iii)* $\Lambda_\nu(\alpha,k)$.

Una unificación (y generalización) de estas tres familias de integrales tipo elípticas fue dada por H.M. Srivastava y R.N. Siddiqi [14] en la forma siguiente:

$$\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta)}(\rho,k) = \int_0^\pi \cos^{2\alpha-1}\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^{2\beta-1}\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\left[1-\rho\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{-\lambda}}{\left[1-k^2\cos\theta\right]^{\mu+\frac{1}{2}}}d\theta, \tag{8}$$

$(0 \le k < 1; \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0; \lambda, \mu \in C; |\rho| < 1)$, donde se asume tácitamente que $\rho \in C$ si $\lambda = -m$ ($m \in No$).

L. Galué [15] y otros [16] han considerado también una generalización de la integral (8) de Srivastava-Siddiqi.

En este trabajo consideramos una generalización de la integral tipo elíptica (8) mediante la expresión [17]:

$$\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k) = (1+k^2)^{-\mu-\frac{1}{2}}\int_0^\pi \cos^{2\alpha-1}\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^{2\beta-1}\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

$$\frac{\left[1-\rho\operatorname{sen}^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{-\lambda}}{\left[1-\left(\frac{2k^2}{1+k^2}\right)\cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{\mu+\frac{1}{2}}}d\theta, \tag{9}$$

$$(0 \le k < 1; \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0; \lambda, \mu \in C; |\rho| < 1, n \in N).$$

Y para esta generalización se presentan: casos particulares, relaciones de recurrencia, representaciones en serie, relaciones de recurrencia diferencial y evaluación de algunas integrales.

Casos Particulares

Si en (9) hacemos $n = 1$, obtenemos:

$$\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,1)}(\rho;k) = \Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta)}(\rho;k) \tag{10}$$

entonces todas las otras integrales tipo elípticas, consideradas en este trabajo, son obviamente casos especiales adicionales de la integral (8) de Srivastava-Siddiqi. Así

(i) $\Lambda_{0,\mu}^{(\alpha,\gamma-\alpha,1)}(\rho;k) = \Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\gamma-\alpha,1)}(0;k) = R_\mu(k,\alpha,\gamma)$, (11)

$$(0 \le k < 1; \operatorname{Re}(\gamma) > \operatorname{Re}(\alpha) > 0; \mu \in C).$$

$$(ii)\ \Lambda_{-2m,\mu}^{\left(\nu+\frac{1}{2},\nu+\frac{1}{2},1\right)}(2;k)=2^{-2\nu}\,\mathrm{B}_{\mu}(k,m,\nu), \tag{12}$$

$$\left(0\leq k<1;m\in\mathrm{N}o;\mu\in\mathrm{C};\mathrm{Re}(\nu)>-\frac{1}{2}\right).$$

$$(iii)\ \lim_{\lambda\to\infty}\left\{\Lambda_{\lambda,\mu}^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)}\left(\frac{\rho}{\lambda};k\right)\right\}=\Lambda_{\mu}(\rho;k) \tag{13}$$

$$(0\leq k<1;\rho,\mu\in\mathrm{C}).$$

$$(iv)\ \Pi(\alpha^2;k)=\frac{1}{(1-\alpha^2)\sqrt{2(2-k^2)}}\Lambda_{1,0}^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1};\frac{k}{\sqrt{2-k^2}}\right) \tag{14}$$

$$(k^2<1;-\infty<\alpha^2<+\infty;\alpha^2\neq 1)$$

donde $\Pi(\alpha,k)$es la integral elíptica de tercera clase definida por Byrd y Friedman [18].

Relaciones de Recurrencia

Partiendo directamente de la definición (9) se obtienen relaciones de recurrencia para la integral tipo elíptica $\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)$, haciendo un reacomodo en el integrando y utilizando identidades trigonométricas elementales. Así,

$$\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha+1,\beta,n)}(\rho;k)+\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta+1,n)}(\rho;k). \tag{15}$$

$$\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha-1,\beta,n)}(\rho;k)-\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha-1,\beta+1,n)}(\rho;k). \tag{16}$$

$$\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta-1,n)}(\rho;k)-\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha+1,\beta-1,n)}(\rho;k). \tag{17}$$

$$\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=\Lambda_{\lambda+1,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)-\rho\Lambda_{\lambda+1,\mu}^{(\alpha,\beta+n,n)}(\rho;k). \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=\ &\Lambda_{\lambda+1,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)-\rho\Lambda_{\lambda+1,\mu}^{(\alpha,\beta+n-1,n)}(\rho;k)+\\&\rho\Lambda_{\lambda+1,\mu}^{(\alpha+1,\beta+n-1,n)}(\rho;k).\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=\ &\Lambda_{\lambda,\mu+1}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)+k^2\big[\ \Lambda_{\lambda,\mu+1}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)-\\&\Lambda_{\lambda,\mu+1}^{(\alpha+n,\beta,n)}(\rho;k)-\Lambda_{\lambda,\mu+1}^{(\alpha+n-1,\beta,n)}(\rho;k)+\\&\Lambda_{\lambda,\mu+1}^{(\alpha+n-1,\beta+1,n)}(\rho;k)\ \big].\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=\ &\Lambda_{\lambda,\mu+1}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)-\\&k^2\big[2\Lambda_{\lambda,\mu+1}^{(\alpha+n,\beta,n)}(\rho;k)-\Lambda_{\lambda,\mu+1}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)\ \big].\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=\ &\Lambda_{\lambda,\mu+1}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)-k^2\big[2\Lambda_{\lambda,\mu+1}^{(\alpha+n-1,\beta,n)}(\rho;k)-\\&2\Lambda_{\lambda,\mu+1}^{(\alpha+n-1,\beta+1,n)}(\rho;k)-\Lambda_{\lambda,\mu+1}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)\ \big].\end{aligned} \tag{22}$$

Integrando por partes la definición (9) se obtienen otras relaciones de recurrencia para la integral tipo elíptica $\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)$ las cuales listamos a continuación:

$$\begin{aligned}\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=\ &(1+k^2)\Lambda_{\lambda,\mu+1}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)-k^2\Lambda_{\lambda,\mu+1}^{(\alpha+n-1,\beta,n)}(\rho;k)-\\&(2\alpha+2n-3)k^2\Lambda_{\lambda,\mu+1}^{(\alpha+n-1,\beta+1,n)}(\rho;k)+\\&(2\beta-1)k^2\Lambda_{\lambda,\mu+1}^{(\alpha+n,\beta,n)}(\rho;k)+\\&2n\lambda\rho k^2\Lambda_{\lambda+1,\mu+1}^{(\alpha+n,\beta+n,n)}(\rho;k)-\\&2n(2\mu+3)k^4\Lambda_{\lambda,\mu+2}^{(\alpha+2n-1,\beta+1,n)}(\rho;k).\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}&nk^2(2\mu-1)\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)+(\alpha-n)\Lambda_{\lambda,\mu-1}^{(\alpha-n,\beta,n)}(\rho;k)-\\&(\beta-1)\Lambda_{\lambda,\mu-1}^{(\alpha-n+1,\beta-1,n)}(\rho;k)-n\lambda\rho\Lambda_{\lambda+1,\mu-1}^{(\alpha-n+1,\beta+n-1,n)}(\rho;k)=0.\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}n\rho(\lambda-1)\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=\ &(\alpha-1)\Lambda_{\lambda-1,\mu}^{(\alpha-1,\beta-n+1,n)}(\rho;k)-\\&(\beta-n)\Lambda_{\lambda-1,\mu}^{(\alpha,\beta-n,n)}(\rho;k)+(2\mu+1)k^2n\Lambda_{\lambda-1,\mu+1}^{(\alpha+n-1,\beta-n+1,n)}(\rho;k).\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\alpha\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=\ &(\beta-1)\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha+1,\beta-1,n)}(\rho;k)+n\rho\lambda\Lambda_{\lambda+1,\mu}^{(\alpha+1,\beta+n-1,n)}(\rho;k)-\\&n(2\mu+1)k^2\Lambda_{\lambda,\mu+1}^{(\alpha+n,\beta,n)}(\rho;k).\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\beta\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=\ &(\alpha-1)\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha-1,\beta+1,n)}(\rho;k)-\\&n\lambda\rho\Lambda_{\lambda+1,\mu}^{(\alpha,\beta+n,n)}(\rho;k)+\\&n(2\mu+1)k^2\Lambda_{\lambda,\mu+1}^{(\alpha+n-1,\beta+1,n)}(\rho;k);\end{aligned} \tag{27}$$

en todas las relaciones de recurrencia se asume que los parámetros son tales que cada integral generalizada tipo elíptica está definida.

Representaciones en Serie

Usando en (9) la identidad

$$\left[\cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]=\left[\cos^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{n}=\left[1-\mathrm{sen}^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{n},$$

después de un cambio de variable resulta:

$$\begin{aligned}\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=\ &2(1+k^2)^{-\mu-\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\alpha-1}\omega\,\mathrm{sen}^{2\beta-1}\omega\,.\\&\left[1-\rho\,\mathrm{sen}^{2n}\omega\right]^{-\lambda}\left[1-\left(\frac{2k^2}{1+k^2}\right)\left(1-\mathrm{sen}^2\omega\right)^n\right]^{-\mu-\frac{1}{2}}d\omega.\end{aligned} \tag{28}$$

En vista de que

$$\left[1-\rho\,\mathrm{sen}^{2n}\omega\right]^{-\lambda}=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(\lambda)_m}{m!}\rho^m\,\mathrm{sen}^{2nm}\omega$$

y

$$\left[1-\left(\frac{2k^2}{1+k^2}\right)\left(1-\mathrm{sen}^2\omega\right)^n\right]^{-\mu-\frac{1}{2}}=\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_r}{r!}\left(\frac{2k^2}{1+k^2}\right)^r\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-nr)_p}{p!}\mathrm{sen}^{2p}\omega,$$

al sustituir estas expresiones en (28) y cambiar el orden de la integral y las sumatorias, en base a la convergencia absoluta, se obtiene:

$$\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=(1+k^2)^{-\mu-\frac{1}{2}}\sum_{m,r=0}^{+\infty}\frac{(\lambda)_m}{m!}\frac{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_r}{r!}\cdot\rho^m\left(\frac{2k^2}{1+k^2}\right)^r\cdot$$

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-nr)_p}{p!}\left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\alpha-1}\omega\,\mathrm{sen}^{2(\beta+p+nm)-1}\omega\,d\omega\right]. \tag{29}$$

Utilizando la integral Euleriana (beta):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\alpha-1}\theta\,\mathrm{sen}^{2\beta-1}\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \tag{30}$$

$(\mathrm{Re}(\alpha)>0;\mathrm{Re}(\beta)>0)$

en (29), resulta:

$$\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)(1+k^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}\sum_{m,r=0}^{+\infty}\frac{(\lambda)_m\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_r(\beta)_{nm}}{(\alpha+\beta)_{nm}}\frac{\rho^m}{m!}$$

$$\left(\frac{2k^2}{1+k^2}\right)^r\frac{1}{r!}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(\beta+nm)_p(-nr)_p}{(\alpha+\beta+nm)_p}\frac{1}{p!}, \tag{31}$$

y de la definición de la función hipergeométrica de Gauss y el Teorema de Gauss [19] (30) equivale a:

$$\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=\frac{B(\alpha,\beta)}{(1+k^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}\sum_{m,r=0}^{+\infty}\frac{(\lambda)_m\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_r(\beta)_{nm}}{(\alpha+\beta)_{nm}}\frac{\rho^m}{m!}\left(\frac{2k^2}{1+k^2}\right)\frac{1}{r!}\cdot$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+nm)(\alpha)_{nr}}{\Gamma(\alpha+\beta+nm+nr)}, \tag{32}$$

de la aplicación de los teoremas de multiplicación de Gauss [20]

$$(\lambda)_{mn}=m^{mn}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\lambda+j-1}{m}\right)_n,\quad (n=0,1,2,\ldots\ldots) \tag{33}$$

y

$$\Gamma(mz)=(2\pi)^{\frac{1}{2}(1-m)}m^{mz-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(z+\frac{j-1}{m}\right), \tag{34}$$

$$\left(z\neq 0,-\frac{1}{m},-\frac{2}{m},\ldots\ldots,m=1,2,3,\ldots\ldots\right)$$

se obtiene después de hacer operaciones y simplificar la expresión

$$\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=\frac{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}{(1+k^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}\cdot$$

$$\sum_{m,r=0}^{+\infty}\frac{(\lambda)_m\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\beta+j-1}{n}\right)_m\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_r}{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha+\beta+j-1}{n}\right)_{m+r}}\cdot$$

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha+j-1}{n}\right)\frac{\rho^m}{m!}\left(\frac{2k^2}{1+k^2}\right)^r\frac{1}{r!},$$

la cual en términos de la función Kampé de Fériet [20] equivale a

$$\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=\frac{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}{(1+k^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}\cdot$$

$$F_{n:0;0}^{0:n+1;n+1}\left[\begin{matrix}\text{———}:\lambda,\left(\frac{\beta+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n};\mu+\frac{1}{2},\left(\frac{\alpha+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n};\\ \left(\frac{\alpha+\beta+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n}:\text{———};\text{———};\end{matrix}\ \rho,\frac{2k^2}{1+k^2}\right] \tag{35}$$

$(0\leq k<1,\mathrm{Re}(\alpha)>0,\mathrm{Re}(\beta)>0,\lambda,\mu\in\mathrm{C},|\rho|<1,n\in\mathrm{N})$.

Recordamos que la función Kampé de Fériet $F_{h:m;n}^{p:q;k}\left[\begin{matrix}(a_p):(b_q);(c_k);\\(\alpha_h):(\beta_m);(\gamma_n);\end{matrix}\ x,y\right]$ converge en los siguientes casos [20]:

i) $p+q<h+m+1,\quad p+k<h+n+1,\quad |x|<\infty,|y|<\infty$

ó

ii) $p+q=h+m+1,\quad p+k=h+n+1,\quad y$

$$\begin{cases}|x|^{1/(p-h)}+|y|^{1/(p-h)}<1, & si\ p>h,\\ max\{|x|,|y|\}<1, & si\ p\leq h.\end{cases}$$

El resultado (35) puede escribirse también como

$$\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=\frac{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}{(1+k^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}\cdot$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\binom{\lambda+m-1}{m}\frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\beta+j-1}{n}\right)_m}{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha+\beta+j-1}{n}\right)_m}\rho^m\cdot$$

$${}_{n+1}F_n\left[\mu+\frac{1}{2},\left(\frac{\alpha+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n};\left(\frac{\alpha+\beta+j-1}{n}+m\right)_{j=1}^{n};\left(\frac{2k^2}{1+k^2}\right)\right] \tag{36}$$

$(0\leq k<1;\mathrm{Re}(\alpha)>0,\mathrm{Re}(\beta)>0;\lambda,\mu\in\mathrm{C};|\rho|<1;n\in\mathrm{N})$,

$$\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=\frac{B(\alpha,\beta)}{(1+k^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(\lambda)_m\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\beta+j-1}{n}\right)_m}{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha+\beta+j-1}{n}\right)_m}\,.$$

$${}_{n+1}F_n\left[\mu+\frac{1}{2},\left(\frac{\alpha+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n};\left(\frac{\alpha+\beta+j-1}{n}+m\right)_{j=1}^{n};\frac{2k^2}{1+k^2}\right]\frac{\rho_m}{m!} \quad (37)$$

$(0\le k<1;\mathrm{Re}(\alpha)>0,\mathrm{Re}(\beta)>0;\lambda,\mu\in C;|\rho|<1;n\in N)$.

Mediante un procedimiento similar se obtuvieron los resultados dados a continuación:

$$\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=\frac{B(\alpha,\beta)}{(1+k^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}\,.$$

$$F_{n:0:0}^{0:n+1;n+1}\left[\begin{array}{l} \text{———} : \lambda,\left(\frac{\beta+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n};\mu+\frac{1}{2},\left(\frac{\alpha+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n}; \\ \left(\frac{\alpha+\beta+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n}:\text{———};\text{———}; \end{array}\rho,\frac{2k^2}{1+k^2}\right] \quad (38)$$

$(0\le k<1;\mathrm{Re}(\alpha)>0,\mathrm{Re}(\beta)>0;\mu,\lambda\in C;|\rho|<1;n\in N)$

$$\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=B(\alpha,\beta)\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\frac{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_m}{m!}k^{2m}\,.$$

$$F_{n:0;0}^{0:n+1;n+1}\left[\begin{array}{l} \text{———} : -m,\left(\frac{\alpha+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n};\lambda,\left(\frac{\beta+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n}; \\ \left(\frac{\alpha+\beta+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n}:\text{———};\text{———}; \end{array}2,\rho\right] \quad (39)$$

$(0\le k<1;\mathrm{Re}(\alpha)>0,\mathrm{Re}(\beta)>0;\mu,\lambda\in C;|\rho|<1,n\in N)$

suponiendo que $F_{n:0;0}^{0:n+1;n+1}$ es finita.

$$\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=B(\alpha,\beta)\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_m}{m!}(-k^2)^m\,.$$

$$F_{n:0;0}^{0:n+1;n+1}\left[\begin{array}{l} \text{———} : -m,\left(\frac{\alpha+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n};\lambda,\left(\frac{\beta+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n}; \\ \left(\frac{\alpha+\beta+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n}:\text{———};\text{———}; \end{array}2,\rho\right] \quad (40)$$

$(0\le k<1;\mathrm{Re}(\alpha)>0,\mathrm{Re}(\beta)>0;\mu,\lambda\in C;|\rho|<1,n\in N)$

suponiendo que $F_{n:0;0}^{0:n+1;n+1}$ es finita.

$$\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)=\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(1-n)}\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\alpha+j-1}{n}\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\beta+j-1}{n}\right)}{n^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+j-1}{n}\right)}\,.$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_m}{m!}(-k^2)^m\,.$$

$$F_{n:0;0}^{0:n+1;n+1}\left[\begin{array}{l} \text{———} : -m,\left(\frac{\alpha+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n};\lambda,\left(\frac{\beta+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n}; \\ \left(\frac{\alpha+\beta+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n}:\text{———};\text{———}; \end{array}2,\rho\right] \quad (41)$$

$(0\le k<1;\mathrm{Re}(\alpha)>0,\mathrm{Re}(\beta)>0;\lambda,\mu\in C;|\rho|<1;n\in N)$,

suponiendo que $F_{n:0;0}^{0:n+1;n+1}$ es finita.

Muchos casos particulares interesantes se deducen de estos resultados al considerar por ejemplo: $\rho=2,\beta=\alpha,\lambda=-2t$ ($t\in No$), etc.

Relaciones de Recurrencia Diferencial

De (9)

$$\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}\left(\rho;\frac{k}{\sqrt{2-k^2}}\right)=\int_0^{\pi}\cos^{2\alpha-1}\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{sen}^{2\beta-1}\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\left[1-\rho\,\mathrm{sen}^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{-\lambda}}{\left[1-\left(\frac{k^2}{2-k^2}\right)\left(2\cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)-1\right)\right]^{\mu+\frac{1}{2}}}d\theta, \quad (42)$$

entonces:

$$k(2-k^2)^{\mu+\frac{3}{2}}\frac{d}{dk}\left\{(2-k^2)^{-\mu-\frac{1}{2}}\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}\left(\rho;\frac{k}{\sqrt{2-k^2}}\right)\right\}=$$

$$(2\mu+1)\left[2\int_0^{\pi}\cos^{2\alpha-1}\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{sen}^{2\beta-1}\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\left[1-\rho\,\mathrm{sen}^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{-\lambda}}{\left[1-\left(\frac{k^2}{2-k^2}\right)\left(2\cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)-1\right)\right]^{\mu+\frac{3}{2}}}d\theta-\right.$$

$$(2-k^2)\int_0^{\pi}\cos^{2\alpha-1}\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^{2\beta-1}\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\left[1-\rho\operatorname{sen}^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{-\lambda}}{\left[1-\left(\frac{k^2}{2-k^2}\right)\left(2\cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)-1\right)\right]^{\mu+\frac{1}{2}}}d\theta\Bigg],$$

esto es

$$k(2-k^2)^{\mu+\frac{3}{2}}\frac{d}{dk}\left\{(2-k^2)^{-\mu-\frac{1}{2}}\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}\left(\rho;\frac{k}{\sqrt{2-k^2}}\right)\right\}=$$

$$(2\mu+1)\left[2\Lambda_{\lambda,\mu+1}^{(\alpha,\beta,n)}\left(\rho;\frac{k}{\sqrt{2-k^2}}\right)-(2-k^2)\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}\left(\rho;\frac{k}{\sqrt{2-k^2}}\right)\right]. \tag{43}$$

Análogamente se tiene que:

$$k\frac{d}{dk}\left\{\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)\right\}=(2\mu+1)\left[\Lambda_{\lambda,\mu+1}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)-\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)\right]. \tag{44}$$

$$k^{1-\nu}(2-k^2)^{\frac{3}{2}-\sigma}\frac{d}{dk}\left\{k^{\nu}(2-k^2)^{\sigma-\frac{1}{2}}\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}\left(\rho;\frac{k}{\sqrt{2-k^2}}\right)\right\}=$$

$$2(2\mu+1)\Lambda_{\lambda,\mu+1}^{(\alpha,\beta,n)}\left(\rho;\frac{k}{\sqrt{2-k^2}}\right)-$$

$$\left[2(2\mu-\nu+1)+k^2(2\sigma+\nu-1)\right]\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}\left(\rho;\frac{k}{\sqrt{2-k^2}}\right). \tag{45}$$

Integrales que involucran a $\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k)$

Consideremos la integral

$$\int_0^1 k^{\sigma}\Theta(zk)\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k')dk \tag{46}$$

con

$$k'=\sqrt{1-k^2} \tag{47}$$

y

$$\Theta(z)=\sum_{t=0}^{+\infty}\omega_t z^t, \quad |z|<1 \tag{48}$$

entonces sustituyendo (39), (47) y (48) en (46):

$$\int_0^1 k^{\sigma}\Theta(zk)\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k')dk=$$

$$\int_0^1 k^{\sigma}\sum_{t=0}^{+\infty}\omega_t z^t k^t \mathrm{B}(\alpha,\beta)\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_m}{m!}(1-k^2)^m.$$

$$F_{n:0;0}^{0:n+1;n+1}\left[\begin{array}{l} \text{—} : -m, \left(\frac{\alpha+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n}; \lambda, \left(\frac{\beta+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n}; \\ \left(\frac{\alpha+\beta+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n} : \text{—} ; \text{—} ; \end{array} \; 2,\rho\right]dk$$

intercambiando el orden de la integral y la sumatoria en el segundo miembro

$$\int_0^1 k^{\sigma}\Theta(zk)\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k')dk=$$

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)\sum_{m,t=0}^{+\infty}(-1)^m\omega_t z^t\frac{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_m}{m!}.$$

$$F_{n:0;0}^{0:n+1;n+1}\left[\begin{array}{l} \text{—} : -m, \left(\frac{\alpha+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n}; \lambda, \left(\frac{\beta+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n}; \\ \left(\frac{\alpha+\beta+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n} : \text{—} ; \text{—} ; \end{array} \; 2,\rho\right].$$

$$\int_0^1 k^{\sigma+t}(1-k^2)^m dk \tag{49}$$

evaluando la integral del lado derecho [21, pag.13, ec. 1.5.2], resulta

$$\int_0^1 k^{\sigma}\Theta(zk)\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k')dk=\frac{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}{2}\sum_{m,t=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_m}{\left(\frac{\sigma+t+1}{2}\right)_{m+1}}\omega_t.$$

$$F_{n:0;0}^{0:n+1;n+1}\left[\begin{array}{l} \text{—} : -m, \left(\frac{\alpha+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n}; \lambda, \left(\frac{\beta+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n}; \\ \left(\frac{\alpha+\beta+j-1}{n}\right)_{j=1}^{n} : \text{—} ; \text{—} ; \end{array} \; 2,\rho\right]z^t \tag{50}$$

$(0\le k<1, \mathrm{Re}(\alpha)>0, \mathrm{Re}(\beta)>0, \mu,\lambda\in \mathrm{C}, \mathrm{Re}(\sigma)>-1,$ $|\rho|\le 1, |z|<1, n\in \mathrm{N})$

suponiendo que $F_{n:0;0}^{0:n+1;n+1}$ es finita.

De (50) se tiene que,

$$\int_0^1 k^{2\sigma}\,{}_pF_q\left[\begin{array}{l} a_1,\ldots,a_p; \\ b_1,\ldots,b_q; \end{array} zk^2\right]\Lambda_{\lambda,\mu}^{(\alpha,\beta,n)}(\rho;k')dk=$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{B}(\alpha,\beta)\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_m}{\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)_{m+1}}\,{}_{p+1}F_{q+1}\left[\begin{array}{l} a_1,\ldots,a_p, \quad \sigma+\frac{1}{2}; \\ b_1,\ldots,b_q,\sigma+m+\frac{3}{2}; \end{array} z\right].$$

$$F^{0:n+1;n+1}_{n:0;0}\left[\begin{matrix} \text{———} : -m, \left(\frac{\alpha+j-1}{n}\right)^{n}_{j=1}; \lambda, \left(\frac{\beta+j-1}{n}\right)^{n}_{j=1}; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2, \rho \\ \left(\frac{\alpha+\beta+j-1}{n}\right)^{n}_{j=1} : \text{———} ; \text{———} ; \end{matrix}\right] \tag{51}$$

$(0 \le k < 1; \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \mathrm{Re}(\beta) > 0, \lambda, \mu \in C, \mathrm{Re}(\sigma) > -\frac{1}{2};$
$|\rho| < 1; |z| < \infty$ si $p \le q; |z| < 1$ si $p = q+1; |z| = 1$ si $p = q+1$
y Re $\omega > 0, n \in N)$

donde $\omega = \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{j=1}^{p} a_j$,

suponiendo que $F^{0:n+1;n+1}_{n:0,0}$ es finita.

Similarmente de (37) y (47)

$$\int_0^1 (1+k^2)^{-\mu-\frac{1}{2}} (1-k^2)^{\nu} k^{\sigma}\, \Theta(zk) \Lambda^{(\alpha,\beta,n)}_{\lambda,\mu}\left(\rho; \sqrt{\frac{1-k^2}{1+k^2}}\right) dk =$$

$$\frac{B(\alpha,\beta)}{2^{\mu+\frac{3}{2}}} \sum_{m,r=0}^{+\infty} \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\beta+j-1}{n}\right)_m \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha+j-1}{n}\right)_r (\lambda)_m \left(\mu+\frac{1}{2}\right)_r}{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha+\beta+j-1}{n}\right)_{m+r}} \frac{\rho^m}{m!}\frac{1}{r!} \cdot$$

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \omega_q B\left(\nu+r+1; \frac{\sigma+q+1}{2}\right) z^q \tag{52}$$

$(0 \le k < 1, \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \mathrm{Re}(\beta) > 0, \mathrm{Re}(\sigma) > -1, \mathrm{Re}(\nu) >$
$-1, |\rho| < 1, |z| < 1, \lambda, \mu \in C, n \in N),$

de aquí se deduce que

$$\int_0^1 (1+k^2)^{-\mu-\frac{1}{2}} (1-k^2)^{\nu} k^{2\sigma}\, {}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1,\dots\dots,a_p; \\ \qquad\qquad zk^2 \\ b_1,\dots\dots,b_q; \end{matrix}\right] \cdot$$

$$\Lambda^{(\alpha,\beta,n)}_{\lambda,\mu}\left(\rho; \sqrt{\frac{1-k^2}{1+k^2}}\right) dk =$$

$$\frac{B(\alpha,\beta)}{2^{\mu+\frac{3}{2}}} \sum_{m,r=0}^{+\infty} \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\beta+j-1}{n}\right)_m \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha+j-1}{n}\right)_r (\lambda)_m \left(\mu+\frac{1}{2}\right)_r}{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha+\beta+j-1}{n}\right)_{m+r}} \frac{\rho^m}{m!}\frac{1}{r!}$$

$$B\left(\nu+r+1; \sigma+\frac{1}{2}\right) {}_{p+1}F_{q+1}\left[\begin{matrix} a_1,\dots\dots,a_p, \quad \nu+\frac{1}{2}; \\ \qquad\qquad\qquad z \\ b_1,\dots\dots,b_q, \nu+\sigma+r+\frac{3}{2}; \end{matrix}\right] \tag{53}$$

$(0 \le k < 1, \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \mathrm{Re}(\beta) > 0, \lambda, \mu \in C, |\rho| < 1, \mathrm{Re}(\sigma) >$
$-\frac{1}{2}, \mathrm{Re}(\nu) > -1; |z| < \infty$ si $p \le q$; $|z| < 1$ si $p = q+1$;
$|z| = 1$ si $p = q + 1$ y Re $\omega > 0, n \in N)$

donde $\omega = \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{j=1}^{p} a_j$.

Intercambiando el orden de los parámetros en la función hipergeométrica generalizada de (36) y usando (48) se tiene,

$$\int_0^1 (2-k^2)^{-\mu-\frac{1}{2}} (1-k^2)^{\nu} k^{\sigma}\, \Theta(zk) \Lambda^{(\alpha,\beta,n)}_{\lambda,\mu}\left(\rho; \frac{k}{\sqrt{2-k^2}}\right) dk =$$

$$\frac{B(\alpha,\beta)}{2^{\mu+\frac{3}{2}}} \sum_{m,r=0}^{+\infty} \binom{\lambda+m-1}{m} \binom{\mu+r-\frac{1}{2}}{r} \cdot$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha+j-1}{n}\right)_r \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\beta+j-1}{n}\right)_m}{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha+\beta+j-1}{n}\right)_{m+r}} \rho^m \sum_{h=0}^{+\infty} \omega_h B\left(\nu+1, r+\frac{\sigma+h+1}{2}\right) z^h \tag{54}$$

$0 \le k < 1, \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \mathrm{Re}(\beta) > 0, \mu, \lambda \in C, |\rho| < 1, \mathrm{Re}(\nu) >$
$-1, \mathrm{Re}(\sigma) > -\frac{1}{2}, n \in N$,

y de (54),

$$\int_0^1 (2-k^2)^{-\mu-\frac{1}{2}} (1-k^2)^{\nu} k^{2\sigma}\, {}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1,\dots\dots,a_p; \\ \qquad\qquad zk^2 \\ b_1,\dots\dots,b_q; \end{matrix}\right] \Lambda^{(\alpha,\beta,n)}_{\lambda,\mu}\left(\rho; \frac{k}{\sqrt{2-k^2}}\right) dk =$$

$$\frac{B(\alpha,\beta)}{2^{\mu+\frac{3}{2}}} \sum_{m,r=0}^{+\infty} \binom{\lambda+m-1}{m} \binom{\mu+r-\frac{1}{2}}{r} \cdot$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha+j-1}{n}\right)_r \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\beta+j-1}{n}\right)_m}{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha+\beta+j-1}{n}\right)_{m+r}} \rho^m \cdot$$

$$B\left(\nu+1, \sigma+r+\frac{1}{2}\right) {}_{p+1}F_{q+1}\left[\begin{matrix} a_1,\dots\dots,a_p, \quad \sigma+r+\frac{1}{2}; \\ \qquad\qquad\qquad z \\ b_1,\dots\dots,b_q, \nu+\sigma+r+\frac{3}{2}; \end{matrix}\right] \tag{55}$$

$(0 \le k < 1, \mathrm{Re}(\nu) > -1, \mathrm{Re}(\sigma) > -\frac{1}{2}, \mathrm{Re}(\alpha) > 0; \mathrm{Re}(\beta) > 0, |\rho| < 1;$
$\lambda, \mu \in C; |z| < \infty$ si $p \le q$; $|z| < 1$ si $p = q+1$; $|z| = 1$ si $p = q + 1$ y $\mathrm{Re}(\omega + \nu) > -1, n \in N)$

donde $\omega = \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{j=1}^{p} a_j$.

Para n=1 los resultados corresponden a aquellos dados por Srivastava y Siddiqi [14].

Agradecimiento

L. Galué agradece al CONDES por el soporte financiero para la realización de este trabajo.

Referencias Bibliográficas

1. Al-Zamel, A. and Kalla, S.: Epstein-Hubbell elliptic-type integrals and its generalizations. Applied Math. Comp. 77 (1996), 9-32.
2. Epstein, L.F. and Hubbell, J.H.: Evaluation of a generalized elliptic-type integral. J. Res. Nat. Bur. Standards B: Math. and Math. Phys. 67B (1963), 1-17.
3. Kalla, S.L. and Al-Saqabi, B.: Some results for a class of generalized elliptic-type integrals. Resultate Math. 20 (1984), 507-516.
4. Kalla, S.L.: Results on generalized elliptic-type integrals, in Matematical Structures: computational Mathematics-Mathematical Modelling. Bulgarian Academy of Sciences Vol.2 (1984), 216-219.
5. Kalla, S.L., Conde, S. and Hubbell, J.H.: Some results on generalized elliptic -type integrals. Appl. Anal. 22 (1986), 273-287.
6. Kalla, S.L. and Al-Saqabi, B.: On a generalized elliptic-type integral. Rev. Bra. Fís.16 (1986), 145-156.
7. Al-Saqabi, B.: A generalization of elliptic-type integrals. Hadronic Journal 10 (1987), 331-337.
8. Das, J.: A generalization of elliptic integrals, Bull. Calcutta Math. Soc. (1987), 73-82.
9. Bushell, P. J.: On a generalization of Barton's integral and related integrals of complete elliptic integrals. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 101 (1987),1-5.
10. Björkberg J. and Kristensson G.: Electromagnetic scattering by a perfectly conducting elliptic disk. Canad. J. Phys. 65 (1987), 723-734.
11. Mohamed-Murid, A.H.: Numerical Computation of Some Complete Elliptic Integrals of the First and Second Kinds, M. S. Thesis, Iowa State University of Science and Technology, Ames, Iowa, 1986.
12. Bromberg, S.: Resultados sobre una integral elíptica generalizada, Revista Técnica de Ingeniería. Universidad del Zulia, Vol. 15, No.1 (1992), 29-35.
13. Siddiqi, R.N.: On a class of generalized elliptic-type integrals, Rev. Brasileira Fís. 19 (1989), 137-147.
14. Srivastava,H.M. and Siddiqi, R.N.:A unified presentation of certain families of elliptic -type integrals related to radiation field problems. Radiat. Phys. Chem. 4C (1995), 303-315.
15. Galué, L.: On a new generalization of families of elliptic-type integrals. Algebras Groups and Geometries 14 (1997), 83-105.
16. Kalla, S.L. and Tuan, V.K.: Asymptotic formulas for generalized elliptic-type integrals. Computers Math. Applic. Vol. 32, No. 4 (1996), 49-55.
17. Molina, B.: Sobre una nueva generalización de integrales tipo elípticas, Tesis de Grado, División de Estudios para Graduados. Fac. de Ing. Universidad del Zulia, 1997.
18. Byrd, P.F. and Friedman, M.D.: Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists. Second Edition (Revised), Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 67, Springer-Verlag, New York, 1971.
19. Erdélyi, A. and Bateman H.: Higher Transcendental Functions, McGraw-Hill, Vol..1, New York, 1953.
20. Srivastava, H.M. and Karlsson, P.W.: Multiple Gaussian Hypergeometric Series. Ellis Horwood Limited, New York, 1985.
21. Lebedev, N.N.: Special Functions and Their Applications. Prentice-Hall, New York, 1965.

Recibido el 13 de Octubre de 1997
En forma revisada el 6 de Julio de 1998