Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. Vol. 21, N° 2, 131-137, 1998

Some results on the logistic equation with harvesting

Francisco Montes de Oca and José Sarabia

Departamento de Matemáticas, Decanato de Ciencias
Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado UCLA. Apartado Postal 400
Barquisimeto, Venezuela

Abstract

This paper considers the effects of harvesting on population model described by the Logistic Differential Equation, in no bisecant cases. Conditions for the existence of two bounded solutions on $\Re$ are given.

Key words: Harvesting, Logistic Equation.

Algunos resultados sobre la ecuación logística con cosecha

Resumen

Este trabajo considera los efectos de la cosecha sobre un modelo poblacional descrito por la ecuación diferencial logística, en los casos no bisecantes. Son dadas condiciones para la existencia de soluciones acotadas sobre $\Re$.

Palabras clave: Cosecha, ecuación logística.

Introducción

En este trabajo consideramos la ecuación diferencial

$$x'(t) = x(t)[a(t) - b(t)x(t)] - h(t) \quad (1)$$

donde $a(t)$, $b(t)$ y $h(t)$ son funciones continuas y acotadas por encima y por debajo, por constantes positivas (en este caso diremos que a, b y h están en C_+). Para $f \in C_+$, denotamos por:

$$f_L = \inf\{f(t): t \in \Re\}, \text{ y } f_M = \sup\{f(t): t \in \Re\}$$

La ecuación (1) representa el modelo matemático, donde $x(t)$ es la población en el instante t, $a(t)$ es la rata de crecimiento, $b(t)$ el efecto inhibidor y $h(t)$ la rata de cosecha. Denotaremos por I_x el intervalo maximal de existencia de una solución $x(t)$ de una ecuación diferencial. La ecuación (1) en el caso constante ha sido estudiada por varios autores: un análisis del caso autónomo se puede encontrar en [1, pp. 45-48], así mismo en [2] y [3]. Ahmad obtiene algunos resultados en el caso autónomo sin cosecha. Del análisis de ella se tiene:

A) Si $0 < h < a^2/(4b)$ entonces hay dos puntos de equilibrio α_1 y α_2 con $0 < \alpha_2 < \alpha_1$ y el comportamiento cualitativo de la solución $x(t)$ depende de la condición inicial.

A.1) Si $x(0) > \alpha_1$, entonces $I_x = (\beta, \infty)$ con $\beta < 0$, y

$$\lim_{t \to \beta^+} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t \to +\infty} x(t) = \alpha_1$$

A.2) Si $\alpha_2 < x(0) < \alpha_1$, entonces $I_x = \Re$ y además:

$$\lim_{t \to -\infty} x(t) = \alpha_2, \quad \lim_{t \to +\infty} x(t) = \alpha_1$$

A.3) Si $x(0) < \alpha_2$, entonces $I_x = (-\infty, \beta)$ con $\beta > 0$ y

$$\lim_{t \to \beta^-} x(t) = -\infty, \quad \lim_{t \to -\infty} x(t) = \alpha_2$$

B) Si $h = a^2/(4b)$, entonces hay un punto de equilibrio α, y si $x(0) > \alpha$, entonces $x(t)$ se comporta como en A.1); mientras que si $x(0) < \alpha$ entonces $x(t)$ se comporta como en A.3).

C) Si $h > a^2/(4b)$, la población se extingue en un tiempo finito, cualquiera que sea la población inicial, siendo $I_x = (T_1, T_2)$ con:

$$\lim_{t \to T_1^+} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t \to T_2^+} x(t) = -\infty$$

Es importante estudiar la ecuación (1), por su aplicabilidad a modelos poblacionales, por ejemplo humanos, con un proceso emigratorio positivo, a fin de preveer, inclusive proceso de disminución o exterminio de poblaciones. En [2], Montes de Oca y Sarabia, estudiaron la ecuación diferencial (1) bajo la condición:

$$h_M < \frac{a_L^2}{4b_M}, \text{ (caso bisecante)} \tag{2}$$

En dicho trabajo se determinó que la población tiene el siguiente comportamiento dinámico: Existen dos soluciones $X_1(t)$ y $X_2(t)$, definidas y acotadas en $\Re$, tales que $X_1(t) > X_2(t)$, para cada $t \in \Re$ y existe una constante $k > 0$ tal que $\mathrm{dist}(X_1, X_2) \geq k > 0$. Además si $x(t)$ es solución de (1) bajo la condición (2), se tiene:

i) Si $x(0) > X_1(0)$, entonces $I_x = (\beta, \infty)$ con $\beta < 0$,

$$\lim_{t \to \beta^+} x(t) = +\infty \text{ y } \lim_{t \to +\infty} [x(t) - X_1(t)] = 0$$

ii) Si $X_2(0) < x(0) < X_1(0)$, entonces $I_x = \Re$,

$$\lim_{t \to +\infty} [X_1(t) - x(t)] = 0 \text{ y } \lim_{t \to -\infty} [x(t) - X_2(t)] = 0$$

iii) Si $x(0) < X_2(0)$, entonces $I_x = (-\infty, \beta)$ con $\beta > 0$,

$$\lim_{t \to \beta^-} x(t) = -\infty \text{ y } \lim_{t \to -\infty} [X_2(t) - x(t)] = 0$$

El propósito de este trabajo es el estudio de (1) bajo otras condiciones:

$$h_M = \frac{a_L^2}{4b_M}, \; h_L < \frac{a_M^2}{4b_L} \text{ (tangente-secante)} \tag{3}$$

$$h_M > \frac{a_L^2}{4b_M}, \; h_L < \frac{a_M^2}{4b_L} \text{ (externo-secante)} \tag{4}$$

$$h_M > \frac{a_L^2}{4b_M}, \; h_L = \frac{a_M^2}{4b_L} \text{ (externo-tangente)} \tag{5}$$

$$h_L > \frac{a_M^2}{4b_L} \text{ (biexterno)} \tag{6}$$

El caso tangente-secante

En este caso tenemos casi los mismos resultados expresados en el teorema 3.1 de [5], excepto que ahora no se puede asegurar que $\mathrm{dist}(X_1, X_2) > 0$. En este sentido damos ejemplos donde $\mathrm{dist}(X_1, X_2) = 0$, así mismo establecemos condiciones suficientes para que $\mathrm{dist}(X_1, X_2) > 0$. Definamos las siguientes ecuaciones diferenciales de Riccati:

$$x' = x(a_M - b_L x) - h_L \text{ (superior)} \tag{7}$$

$$x' = x(a_L - b_M x) - h_M \text{ (inferior)} \tag{8}$$

Bajo la condición (3), tenemos que (7) tiene dos puntos de equilibrio: α_{M_1} y α_{M_2} (con $0 < \alpha_{M_2} < \alpha_{M_1}$), mientras que (8) tiene un solo punto de equilibrio α_L.

Además: $0 < \alpha_{M_2} < \alpha_L < \alpha_{M_1}$.

Los siguientes lemas serán utilizados para la demostración de los principales resultados.

Lema 1

Sea $x(t)$ una solución de (1) tal que $x(0) > 0$. Si $x_M(t)$ y $x_L(t)$ son soluciones de (7) y (8), respectivamente, tales que: $x_L(0) = x(0) = x_M(0)$. Entonces:

(i) $x(t) \leq x_M(t)$ *en* $J_M^+ = I_x \cap I_{x_M} \cap [0, \infty)$

(ii) $x_L(t) \leq x(t)$ *en* $J_L^+ = I_x \cap I_{x_L} \cap [0, \infty)$

(iii) $x(t) \leq x_L(t)$ *en* $J_L^- = I_x \cap I_{x_L} \cap (-\infty, 0]$

(iv) $x_M(t) \leq x(t)$ *en* $J_M^- = I_x \cap I_{x_M} \cap (-\infty, 0]$

Demostración: vea [1, p.p. 27-28].

Así mismo, procediendo en forma similar a los lemas 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5 en [5], tenemos el siguiente lema.

Lema 2

Bajo la condición (3):

a) *Existe una solución $x_1(t)$ de (1) tal que: $\alpha_L \leq x_1(t) \leq \alpha_{M_1}$ definida en todo $\Re$.*

b) *Existe una solución $x_2(t)$ de (1) tal que: $\alpha_{M_2} \leq x_2(t) \leq \alpha_L$ en $\Re$.*

c) *Si $x(t)$ es una solución de (1) tal que: $x(0) > \alpha_{M_1}$, entonces $I_x = (\beta,\infty)$ con $\beta < 0$ y $\lim_{t\to\beta^+} x(t) = +\infty$*

d) *Si $x(t)$ es una solución de (1) tal que: $x(0) < \alpha_{M_2}$, entonces $I_x = (-\infty,\beta)$ con $\beta > 0$ y $\lim_{t\to\beta^-} x(t) = -\infty$*

e) *Si $x(t)$ es una solución de (1) tal que: $\alpha_{M_2} \leq x(0) \leq \alpha_{M_1}$, entonces $\alpha_{M_2} \leq x(t) \leq \alpha_{M_1}$, para cada $t \in \Re$.*

Sean $\left\{\xi_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ y $\left\{\alpha_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en $\Re$ tales que: $\xi_n \to 0$ y $\alpha_n \to \alpha_0$, cuando $n \to \infty$. Consideramos la familia de problemas:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) - b(t)[x(t)]^2 - h(t) + \xi_n;\quad x(0) = \alpha_n \qquad (9)$$

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) - b(t)[x(t)]^2 - h(t);\quad x(0) = \alpha_0 \qquad (10)$$

En [4, p.p. 39-41] se demuestra el siguiente lema que relaciona las soluciones de (10) con las de (9).

Lema 3

Si ϕ_n es la solución de (9) y ϕ es la solución de (10), entonces la sucesión $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a ϕ en cualquier subintervalo compacto contenido en I_ϕ.

Teorema 1

Dada la ecuación (1) bajo la condición (3), existen soluciones $X_1(t)$ y $X_2(t)$ definidas y acotadas en todo $\Re$, tales que $X_2(t) < X_1(t)$ en $\Re$. Además si $x(t)$ es una solución de (1) cumpliendo con

a) $x(0) > X_1(0)$, *entonces* $I_x = (\beta,\infty)$, *con* $\beta < 0$,

$$\lim_{t\to\beta^+} x(t) = +\infty \text{ y } \lim_{t\to+\infty}[x(t) - X_1(t)] = 0$$

b) $X_2(0) < x(0) < X_1(0)$, entonces $I_x = \Re$,

$$\lim_{t\to-\infty}[x(t) - X_2(t)] = 0 \text{ y } \lim_{t\to+\infty}[X_1(t) - x(t)] = 0$$

c) $x(0) < X_2(0)$, entonces $I_x = (-\infty, \beta)$ con $\beta > 0$,

$$\lim_{t\to\beta^-} x(t) = -\infty \text{ y } \lim_{t\to-\infty}[X_2(t) - x(t)] = 0$$

Demostración: Sea Ω el conjunto de las soluciones de (1) tales que $I_x = \Re$. Por el lema 2, tenemos que $\Omega \neq \phi$ y $\Omega_0 = \{x(0): x \in \Omega\}$ está acotado superior e inferiormente. Sean $\Omega_{0L} = \inf \Omega_0$, $\Omega_{0M} = \sup \Omega_0$, $X_1(t)$ la solución de (1) tal que $X_1(0) = \Omega_{0M}$ y $X_2(t)$ la solución de (1) tal que $X_2(0) = \Omega_{0L}$. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de soluciones en Ω tales que $x_n(0) \to \Omega_{0M}$, luego por el lema 3, $\{x_n\}$ converge uniformemente hacia X_1 en intervalos compactos de I_{X_1} y como las x_n están acotadas por α_{M_2} y α_{M_1}, entonces es claro que X_1 está definida en todo $\Re$. Luego $X_1 \in \Omega$ y $\Omega_{0M} \in \Omega_0$. Similarmente probamos que $\Omega_{0L} \in \Omega_0$. Además por el lema 2, tenemos que: $\alpha_{M_2} \leq X_2(t) < X_1(t) \leq \alpha_{M_1}$, para cada $t \in \Re$.

a) Sea $x(t)$ una solución de (1) con $x(0) = a > \Omega_{0M}$ y sean $x_M(t)$ y $x_L(t)$ soluciones de (7) y (8), respectivamente, tales que:

$$x_L(0) = x(0) = a = x_M(0)$$

Como x_L y x_M están definidas sobre $[0,\infty)$, también lo estará $x(t)$ y además:

$$x_L(t) \leq x(t) \leq x_M(t), \quad \forall t \in [0,\infty).$$

Así mismo, como $x(0) > \Omega_{0M}$, tenemos que $I_x = (\beta, +\infty)$ con $-\infty < \beta < 0$ y ya que: $\alpha_{M_2} \leq x(t)$ entonces $\lim_{t\to\beta^+} x(t) = +\infty$.

Si $X_1(t)$ y $X_2(t)$ son soluciones de la ecuación (1) que es de Riccati, entonces cualquier otra solución $x(t)$ de (1) se puede escribir así:

$$x(t) = \frac{X_1(t) - \upsilon(t)X_2(t)}{1 - \upsilon(t)} \qquad (11)$$

donde $\upsilon(t) = k\exp\left[-\int_0^t b(s)[X_1(s) - X_2(s)]ds\right]$ y $k = \dfrac{a - \Omega_{0M}}{a - \Omega_{0L}}$

En este caso $0 < k < 1$.

Luego:

$$x(t) - X_1(t) = \frac{\upsilon(t)}{1-\upsilon(t)}\left[X_1(t) - X_2(t)\right] \tag{12}$$

Si $\int_0^t \left[X_1(s) - X_2(s)\right]ds = L < \infty$, entonces:

$$0 < \frac{k}{e^{b_M L} - k} \le \frac{\upsilon(t)}{1-\upsilon(t)} \le \frac{k}{1-k} \text{ y } \lim_{t\to\infty}\left[X_1(t) - X_2(t)\right] = 0$$

Por lo tanto de (12) tenemos:

$$\lim_{t\to\infty}\left[x(t) - X_1(t)\right] = 0$$

Por otra parte, si $\int_0^t \left[X_1(s) - X_2(s)\right]ds = +\infty$, entonces

$$|\upsilon(t)| \le k\exp\left[-b_L \int_0^t \left[X_1(s) - X_2(s)\right]ds\right] \to 0, \text{ cuando}$$

$t \to \infty$

y como: $0 < X_1(t) - X_2(t) < \alpha_{M_1}$, de nuevo tenemos:

$$\lim_{t\to\infty}\left[x(t) - X_1(t)\right] = 0$$

b) Sea $x(t)$ una solución de (1) tal que: $X_2(0) < x(0) < X_1(0)$. De acuerdo a (11), $k < 0$ y $\upsilon(t) < 0$, luego $x(t)$ está definida en todo $\Re$. Repitiendo el razonamiento hecho en (a), tenemos que:

$$\lim_{t\to\infty}\left[X_1(t) - x(t)\right] = \lim_{t\to\infty}\frac{-\upsilon(t)}{1-\upsilon(t)}\left[X_1(t) - X_2(t)\right] = 0$$

Para probar que $\lim_{t\to-\infty}\left[x(t) - X_2(t)\right] = 0$, observemos que para $t < 0$, la solución $x(t)$ se puede escribir en la forma:

$$x(t) = \frac{X_2(t) + \omega(t)X_1(t)}{1+\omega(t)} \tag{13}$$

donde $\omega(t) = H\exp\left[-\int_t^0 b(s)\left[X_1(s) - X_2(s)\right]ds\right]$ y $H = \frac{a - \Omega_{0L}}{\Omega_{0M} - a}$, con $H > 0$.

Por lo tanto:

$$x(t) - X_2(t) = \frac{\omega(t)}{1+\omega(t)}\left[X_1(t) - X_2(t)\right] \tag{14}$$

Si $\int_{-t}^0 \left[X_1(s) - X_2(s)\right]ds = L < \infty$, entonces $\lim_{t\to-\infty}\left[X_1(t) - X_2(t)\right] = 0$ y además:

$$0 < \frac{H}{e^{b_M L} + H} \le \frac{\omega(t)}{1+\omega(t)} \le \frac{H}{1+H}, \quad \forall t < 0.$$

Por lo tanto de (14), tenemos:

$$\lim_{t\to-\infty}\left[x(t) - X_2(t)\right] = 0.$$

Así mismo si $\int_{-t}^0 \left[X_1(s) - X_2(s)\right]ds = +\infty$, entonces $\lim_{t\to-\infty}\omega(t) = 0$ y por lo tanto de (14) tenemos que también en este caso resulta que:

$$\lim_{t\to-\infty}\left[x(t) - X_2(t)\right] = 0$$

c) Sea $x(t)$ una solución de (1) tal que $x(0) < \Omega_{0L}$, entonces $(-\infty, 0] \subset I_x$, y como no está definida en todo $\Re$, concluimos que $I_x = (-\infty, \beta)$ con $\beta > 0$. Además $x(t) \le \alpha_{M_1}$, luego $\lim_{t\to\beta^-} x(t) = -\infty$.

Finalmente que $\lim_{t\to-\infty}\left[X_2(t) - x(t)\right] = 0$, se prueba en forma similar a los casos anteriores.

En [2] se probó que $d(X_1,X_2) \ge \alpha_{L_1} - \alpha_{L_2} > 0$ (caso bisecante), sin embargo bajo la condición (3), $d(X_1,X_2)$ no necesariamente es positiva. En lo que sigue daremos condiciones suficientes para que $dist(X_1,X_2) = 0$, a pesar de tener $X_2(t) < X_1(t)$, $\forall t \in \Re$ y condiciones suficientes para que $dist(X_1,X_2) > 0$.

En lo que sigue denotaremos $x_M(\infty) = \limsup_{t\to\infty} x(t)$ y $x_L(\infty) = \liminf_{t\to\infty} x(t)$

Teorema 2

Dada la ecuación (1) bajo la condición (3), con $a,b,h \in C_+$;

$$\lim_{t\to+\infty} a(t) = a_L;\ \lim_{t\to+\infty} b(t) = b_M;\ \lim_{t\to+\infty} h(t) = h_M.$$

Entonces para cada $x \in \Omega$, se cumple $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \alpha_L$ y $dist(X_1,X_2)=0$.

Demostración: Sea $x \in \Omega$, luego $\alpha_{M_2} \le x(t) \le \alpha_{M_1}$, $\forall t \in \Re$. Además como $x(t)$ es diferenciable en $\Re$, por el corolario 1.2 en [6], existen sucesiones $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $t_n \to +\infty$, $\tau_n \to +\infty$. $\dot{x}(t_n) \to 0, x(t_n) \to x_M(\infty)$; $\dot{x}(\tau_n) \to 0, x(\tau_n) \to x_L(\infty)$. Luego en (1) tenemos:

$$\dot{x}(t_n) = x(t_n)[a(t_n) - b(t_n)x(t_n)] - h(t_n) \qquad (15)$$

$$\dot{x}(\tau_n) = x(\tau_n)[a(\tau_n) - b(\tau_n)x(\tau_n)] - h(\tau_n) \qquad (16)$$

Haciendo $n \to \infty$ en (15) y (16), resulta:

$$0 = x_M(\infty)[a_L - b_M x_M(\infty)] - h_M = -b_M\left[x_M(\infty) - \frac{a_L}{2b_M}\right]^2$$

$$0 = x_L(\infty)[a_L - b_M x_L(\infty)] - h_M = -b_M\left[x_L(\infty) - \frac{a_L}{2b_M}\right]^2$$

Por lo tanto:

$$x_L(\infty) = x_M(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t) = \alpha_L = \frac{\alpha_L}{2b_M}$$

En particular, para X_1 y X_2 del teorema 1, tenemos que: $\lim_{t\to\infty}[X_1(t) - X_2(t)] = 0$, luego $\mathrm{dist}(X_1, X_2) = 0$.

El teorema 2 tiene una versión análoga para $t \to -\infty$. Por ejemplo para:

$$\dot{x} = x(2 - 0.5x) - \frac{2t^2+1}{t^2+1}, \qquad (17)$$

se cumple que: $\lim_{t\to\pm\infty}[X_1(t) - X_2(t)] = 0$

Teorema 3

Dada la ecuación (1) bajo la condición (3), con a, b, h continuas, T-periódicas y positivas, entonces $X_1(t)$ y $X_2(t)$ del teorema 2, son las únicas soluciones periódicas de (1) y además: $\mathrm{dist}(X_1,X_2) > 0$

Demostración: Sea $x(t)$ una solución de (1) tal que $x(0) > \alpha_{M_1}$. Luego $x(t)$ es acotada en $[0,\infty)$ y $I_x = (\beta, +\infty) \neq \Re$, por lo tanto $x(t)$ no es periódica. Por otra parte, debe tenerse que $x(0) > x(T)$, luego $\{x(kT)\}_{k=1}^{\infty}$ constituye una sucesión decreciente, convergiendo a un cierto $\gamma \in \Re$.

Además $x_k(t) = x(t + kT)$ es una solución de (1) con $I_{x_k} \neq \Re$, luego $x(kT) > \Omega_{0M}$ y por lo tanto: $\gamma \geq \Omega_{0M}$. Si $\gamma > \Omega_{0M}$, como $x(t;0,\gamma)$ es T-periódica (Vea teorema 4.11 en [7,p.116], tendríamos una solución definida en todo $\Re$ con $x(0;0,\gamma) = \gamma > \Omega_{0M}$, lo cual contradice el teorema 1. Luego $\gamma = \Omega_{0M}$, y por lo tanto $x(t;0,\gamma) = X_1(t)$, $\forall t \in \Re$. De manera similar demostramos que $X_2(t)$ también es T-periódica. Como $X_1 \neq X_2$, de acuerdo al teorema 9.6 en [7, p.p. 102-103], concluimos que (1) tiene exactamente dos soluciones periódicas, siendo éstas X_1 y X_2. Además al ser $A_1 = X_1([0,T])$ y $A_2 = X_2([0,T])$ son compactos disjuntos, luego tenemos que: $d(X_1,X_2) = d(A_1,A_2) > 0$.

Otros casos de la ecuación logística con cosecha

En lo que sigue, consideraremos la ecuación (1) bajo las condiciones (4), (5) o (6)

Lema 4

Consideramos la ecuación (1), con a, b, $h \in C_+$, no todas constantes. Si (1) acepta por lo menos una solución acotada, entonces:

$$h_L < \frac{a_M^2}{4b_L}$$

Demostración: Sea $x(t)$ una solución acotada de (1). Por corolario 1.3 en [6], existe $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\Re$ tal que: $\lim_{n\to\infty} x(t_n) = x_M$; $\lim_{n\to\infty} x(t_n) = 0$. Luego en (1), tenemos:

$$\dot{x}(t_n) = x(t_n)[a(t_n) - b(t_n)x(t_n)] - h(t_n)$$
$$\leq x(t_n)[a_M - b_L x(t_N)] - h_L .$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$, resulta:

$$0 \leq x_M(a_M - b_L x_M) - h_L = -b_L\left(x_M - \frac{a_M}{2b_L}\right)^2 + \frac{a_M^2}{4b_L} - h_L$$

Luego: $h_L \leq \dfrac{a_M^2}{4b_L}$.

Si $h_L = \frac{a_M^2}{4b_L}$, entonces $x_M = \frac{a_M}{2b_L}$. Aplicando de nuevo el corolario 1.3 de [6], existe $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\Re$ tal que: $x(\tau_n) \to x_L$ y $\dot{x}(\tau_n) \to 0$.

Repitiendo el razonamiento anterior, tenemos que: $x_L = \frac{a_M}{2b_L}$. O sea $x(t) = \frac{a_M}{2b_L}$, $\forall t \in \Re$.

En consecuencia, tendríamos que a, b y h serían constantes, contrario a lo supuesto. Luego $h_L < \frac{a_M^2}{4b_L}$.

Teorema 4

Dada la ecuación (1), con $a, b, c \in C_+$, no todas constantes y cumpliendo la condición (5) o (6), entonces (1) no acepta soluciones acotadas definidas en todo $\Re$. Además cumpliendo la condición (6), para cada solución $x(t)$ de (1) se tiene que: $I_x = (\beta_1, \beta_2)$ con $-\infty < \beta_1 < \beta_2 < +\infty$

Demostración: La primera parte es inmediata del lema 4.

Si se cumple la condición (6), por el lema 1 tenemos que si $x(t)$ es una solución de (1), existen β_1, β_2 tales que $-\infty < \beta_1 < \beta_2 < +\infty$ y $I_x = (\beta_1, \beta_2)$.

En lo que sigue daremos una condición suficiente para asegurar que (1) bajo la condición (4) no tenga soluciones acotadas en $\Re$.

Teorema 5

La ecuación (1) con $a, b \in \Re^+$ y $h \in C_+$, h periódica de período T, no tiene soluciones acotadas definidas en todo $\Re$ si $\tilde{h} \geq \frac{a^2}{4b}$, donde $\tilde{h} = \frac{1}{T}\int_0^T h(t)\,dt$

Demostración: Supongamos que (1) acepte una solución acotada $x(t)$ definida en todo $\Re$, entonces por el teorema 4.11 en [7, p.116], tenemos que existe una solución T-periódica $X(t)$. En (1) haciendo $X(t) = \omega(t) + \frac{a}{2b}$, resulta:

$$\dot{\omega}(t) = -b\omega^2 + \frac{a^2}{4b} - h(t) \tag{18}$$

Integrando (18) entre 0 y T, resulta:

$$\omega(T) - \omega(0) = 0 = -b\int_0^T \omega^2(t)dt + \frac{a^2 T}{4b} - \int_0^T h(t)dt$$

Luego: $\tilde{h} < \frac{a^2}{4b}$, pues $X(t)$ no es constante.

Por lo tanto, bajo las condiciones impuestas, (1) no puede tener soluciones acotadas en su intervalo maximal de existencia.

Observación:

En la ecuación (1) bajo la condición (4) pueden presentarse tres casos, relativo al número de soluciones acotadas en $I_x = \Re$.

a) Al menos dos soluciones acotadas;

b) Exactamente una solución acotada; y

c) Ninguna solución acotada.

Los siguientes ejemplos ilustran estas situaciones.

a) La ecuación:

$$\dot{x}(t) = ax - bx^2 + \frac{1}{b}\left(\operatorname{sen}^2(t) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) - \cos(t) + \frac{1}{16}\right) - \frac{a^2}{4b} \tag{19}$$

con $a > 2\sqrt{2}$, b > 0 cumple con la condición (4).

Haciendo $z(t) = b\,x(t) - (a/2)$ en (19), obtenemos:

$$\dot{z}(t) = -z^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) - \cos(t) + \frac{1}{16} \tag{20}$$

$z_1(t) = -\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{4}$ es una solución 2π-periódica de (19).

Otra solución viene dada por:

$$z_2(t) = -\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{4} + \frac{1}{\omega(t)},$$

donde $\omega(t)$ es una solución de

$$\omega' = 2\left(-\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{4}\right)\omega + 1. \tag{21}$$

Como: $\int_0^{2\pi} 2\left(-\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{4}\right)dt \neq 0$, entonces (21) acepta una solución 2π-periódica (y sólo una), y por lo tanto $z_2(t)$ es 2π-periódica, si tomamos $\omega(t)$ periódica. De manera que $X_i(t) = \frac{1}{b}z_i(t) + \frac{a}{2b}$, ($i = 1,2$) son dos soluciones 2π-periódicas de (19). Finalmente de acuerdo al teorema 9.6 en [7, p.97], la ecuación (19) tiene exactamente dos soluciones periódicas, luego tiene por lo menos dos soluciones acotadas definidas en $\Re$.

b) La ecuación:

$$\dot{x}(t) = ax - bx^2 - \frac{a^2}{4b} + \frac{\operatorname{sen}^2(t) - \cos(t)}{b}, \quad (22)$$

con $b > 0$ y $a > \sqrt{5}$ tiene exactamente una solución definida en $\Re$, acotada. En efecto, haciendo $z(t) = b\left(x(t) - \frac{a}{2}\right)$ en (22), obtenemos:

$$\dot{z}(t) = -z^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) - \cos(t) \quad (23)$$

Una solución de (22) es: $z(t)$ = -sen(t), evidentemente 2π-periódica (y por lo tanto acotada en $\Re$).

Si $Z(t)$ es solución de (23) tal que $Z(0) > 0$, entonces de acuerdo a la teoria sobre la ecuación de Riccati, $Z(t) = z(t) + (1/\omega(t))$ es otra solución de (23), donde $\omega(t)$ es una solución de: $\omega'(t) = -2\operatorname{sen}(t)\omega(t) + 1$ y $\omega(0) = \frac{1}{Z(0)} > 0$.

O sea:

$$\omega(t) = e^{2\cos(t)}\left[\omega(0) + \int_0^t e^{-2\cos(s)}ds\right],$$

la cual se anula en un cierto $\beta_1 < 0$, luego $Z(t) = -\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{\omega(t)}$ tiene asíntota vertical en β_1, y por lo tanto no es acotada en I_Z.

Lo mismo sucede si $Z(0) < 0$, o sea existe $\beta_2 > 0$ tal que $t = \beta_2$ es asíntota vertical de $Z(t)$. Luego, la única solución acotada definida en $\Re$, de (23) es: $Z(t)$ = -sen(t), por lo tanto, $x(t) = -\frac{1}{b}\operatorname{sen}(t) + \frac{a}{2b}$ es la única solución de (22), acotada sobre $\Re$. Obviamente, esto prueba que (22) tiene una sola solución periódica, cumpliendo la condición (4).

c) La ecuación:

$$\dot{x}(t) = x(t) - x^2(t) - \frac{1 + \operatorname{sen}^2(t)}{6}, \quad (24)$$

por el teorema 5 no tiene soluciones acotadas, pues:

$$\tilde{h} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1 + \operatorname{sen}^2(t)}{6} dt = \frac{1}{4} = \frac{a^2}{4b}.$$

Observe que $h_L = \frac{1}{6}$ y $h_M = \frac{1}{3}$.

d) La ecuación:

$$\dot{x}(t) = 3x(t) - 2x^2(t) - \frac{2t^2 + 1}{t^2 + 1}, \quad (25)$$

tampoco tiene soluciones acotadas, inclusive ninguna solución tiene $I_x = \Re$.

References

1. T.P. Dreyer, *Modelling with Ordinary Differential Equations* CRC. Press 1993.
2. S. Ahmad, Convergence and ultimate bounds of solutions of the nonautonomous Volterra-Lotka competition equation, J. Math. Anal. Appl., 127, 1987, 377-387.
3. S. Ahmad, On the nonautonomous Volterra-Lotka competition equations, Proceedings of the American Mathematical Society, 117 Nº 1, 1993, 199-204.
4. F. Montes de Oca, *Dinámica Poblacional de una Especie* II. encuentro Nacional de Estudiantes de Matemática, Decanato de Ciencias, UCLA, 1996.
5. F. Montes de Oca y J. Sarabia, The Logistic Differential Equation subject to Harvesting. Dynamic Systems and Applications. Vol. 5 (1996) 303-310.
6. A. Tineo, Asymptotic Behaviour of Positive Solutions of The Nonautonomous Lotka-Volterra Competition Equations, Diff. and Integral Equations, Vol. 6, Nº 2, (1993) 449-457.
7. J. Hale y H. Kocak, *Dynamics and Bifurcations* Springer Verlag, New York, 1991.

Recibido el 30 de Julio de 1996
En forma revisada el 10 de Julio de 1998