Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. Vol. 21, Nº 1, 85-92, 1998

Determination of field distortion of astronomical telescopes by means of the simultaneous adjustment method

María Jeanette Stock Leyton*, Jurgen Stock** and Ras Patnaik***

**Departamento de Física, Facultad Experimental de Ciencias, Universidad del Zulia Maracaibo, Venezuela. E-mail: jstock@solidos.ciens.luz.ve*

***Centro de Investigaciones de Astronomía, Mérida-Venezuela, e-mail: stock@cida.ve*

****División de Postgrado de la Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia Apartado 526. Maracaibo, Venezuela*

Abstract

There are three ways to determine the field distortion produced by astronomical telescopes: a) the direct comparison of measured coordinates with theoretical coordinates derived of an astrometrical catalog of high precision; b) the analysis of the residuals obtained from the linear reduction of a set of plates as a function of the coordinates in an area which correspond to the size of the plates and c) the a priori application of a series of tentative corrections based on a mathematical model of the distortion in the form of a polynomial, determining empirically the parameters which gives the best adjustment. This last process is considerably strengthened by the simultaneous adjustment of a set of plates with adequate overlap. This work proves the correct performing of the last method by a numerical simulation.

Key words: Field distortion, block adjustment, astrometry.

Determinación de la distorsión de campo de telescopios astronómicos por medio del método de ajuste simultáneo

Resumen

Existen tres vías para la determinación de la distorsión de campo producida por telescopios astronómicos: a) la comparación directa de las coordenadas medidas con coordenadas teóricas obtenidas a partir de un catálogo astrométrico de alta precisión; b) el análisis de los residuos obtenidos a partir de una reducción lineal de un conjunto de placas, como función de las coordenadas sobre un área correspondiente al tamaño de las placas en consideración y c) la aplicación a priori de una serie de correcciones tentativas basadas en un modelo matemático de la distorsión en forma de un polinomio, buscando empíricamente los parámetros que dan el mejor ajuste. Este último proceso se ve considerablemente reforzado al hacer uso de un ajuste simultáneo de un conjunto de placas que se traslapan entre sí. En este trabajo se demuestra el correcto funcionamiento del último método a través de una simulación numérica.

Palabras clave: Distorsión de campo, ajuste simultáneo, astrometría.

Introducción

El propósito fundamental de la Astrometría es la determinación de coordenadas de objetos sobre la esfera celeste a partir de las imágenes producidas sobre una placa fotográfica o que han sido digitalizadas por medio de un CCD (Charge Coupled Device). Este proceso se conoce como *Reducción de Placas.*

Si bien la fotografía en la astrometría está siendo desplazada cada vez más por la utilización de los CCD, las informaciones presentes en todas las placas existentes de épocas remotas contienen una gran y valiosa cantidad de datos que pueden ser recalculados utilizando las nuevas técnicas de reducción.

En el proceso de la proyección de una parte de la esfera celeste sobre una placa fotográfica o un CCD, sean éstos planos o curvos, interviene una geometría cuya forma exacta depende de la naturaleza del sistema óptico. Principalmente existen dos tipos de geometría que se consideran para telescopios astronómicos. La primera es la llamada proyección tangencial que contempla un plano tangente a la esfera celeste. La segunda, es la proyección concéntrica que contempla una forma esférica de la superficie focal concéntrica a la esfera celeste y, en estos casos, el detector (normalmente una placa fotográfica), se dobla durante la exposición para adaptarse a la esfera focal. La proyección concéntrica considera el mecanismo a través del cual la placa asume la forma esférica y, posteriormente, vuelve a su forma plana. La proyección real o verdadera podría diferir ligeramente de la proyección supuesta. La diferencia entre la proyección supuesta y la real se denomina comúnmente *distorsión*, aun cuando esta definición requiere una modificación que se mencionará más adelante.

El estudio de la *Distorsión de Campo* es un problema básico de cualquier trabajo astronómico que implique la utilización de un telescopio y que se traduce en una deformación sistemática del campo fotografiado. Esta deformación no sólo se debe a los efectos que puede causar la propia óptica del telescopio, sino también a causas externas tales como el efecto de la refracción atmosférica.

Es necesario eliminar esta deformación cuyo efecto en la determinación de las coordenadas se vuelve cada vez más significativo en la medida en que mejora la precisión de las mediciones.

En vista que la distorsión del campo produce un efecto común a todas las placas que se toman con un mismo telescopio, un método de reducción simultánea ofrece grandes ventajas para su determinación debido a que todos los objetos comunes a más de una placa contribuyen a la solución. Por esta razón se utiliza el *Método de Ajuste Simultáneo*, desarrollado por Stock [1].

En principio, existen dos vías para determinar la distorsión común a un conjunto de placas:

1. Describir la distorsión a través de un modelo matemático e introducir sus parámetros como incógnitas en las ecuaciones de reducción.
2. Reducir el conjunto de placas según la proyección escogida, analizando luego los residuos finales como función de la ubicación en el campo de las placas [2, 3].

En el primer caso se debe asumir de antemano la forma de la distorsión, y generalmente se suelen usar polinomios para describir su efecto. Además, el sistema, que se vuelve no lineal, debe ser resuelto de manera iterativa tal que, deben tenerse aproximaciones iniciales para cada una de las incógnitas.

En el segundo caso es necesaria la presencia de un gran número de estrellas de referencia para poder detectar la presencia de algún patrón sistemático.

Como una alternativa al segundo método, en este trabajo se propone utilizar una corrección supuesta a priori y aplicarla a las coordenadas medidas, para luego llevar a cabo una reducción lineal del conjunto de placas donde la suma de los cuadrados de los residuos será una medida de la eficiencia de la corrección. Este método no dependerá de un número grande de estrellas de referencia.

Para comprobar la factibilidad y efectividad del método propuesto, se utilizan datos artificiales creados a través de una simulación numérica. Esto tiene la ventaja que los datos se pueden adaptar con mayor facilidad a diferentes situaciones tales como la escasez o abundancia de objetos de referencia, la distribución de éstos sobre el campo fotografiado, el número de imágenes presentes en las placas, y la superficie de traslapo entre las placas.

Parte Experimental

La simulación numérica de los datos

Se generó un campo estelar de 20° x 20° distribuyéndose los objetos sobre éste de manera aleatoria. En la generación de los campos fotografiados, se utilizaron parámetros que se correspondían con los de un telescopio verdadero, esto incluye la distancia focal, el tipo de proyección y el tamaño de las placas. Como estrellas de referencia se escogió una selección aleatoria de los objetos sobre cada placa, variando cada vez sólo la densidad y ubicación de éstas sobre el campo. La superficie de traslapo entre las placas fue de 2.5° en cada coordenada.

La reducción de placas y el método de ajuste simultáneo

Los pasos que comprenden el proceso de *Reducción de Placas* se pueden esquematizar de la siguiente manera:

1. Medición de las placas con la finalidad de obtener coordenadas cartesianas (x,y) para cada una de las imágenes que aparecen sobre ella. En el caso de un CCD, las coordenadas se derivan a partir de la ubicación de los pixeles dentro del chip [4].
2. Identificación de los objetos comunes a un catálogo de posiciones de referencia. La función principal de estos objetos es definir el sistema al cual estarán referidas todas las coordenadas medidas sobre la placa.
3. Expresar mediante un modelo matemático la relación entre las coordenadas (x,y), medidas sobre la placa y las coordenadas celestes, ascensión recta (α) y declinación (δ), del mismo objeto. Esta relación permitirá la transformación de un sistema a otro, es decir

$$(\alpha,\delta) = f(x,y) \tag{1}$$

Una vez conocida esta función, evidentemente se puede realizar la conversión de las coordenadas medidas a coordenadas celestes o viceversa.

Normalmente este proceso de conversión consiste de dos partes:

1) La conversión de las coordenadas esféricas (α,δ) a las coordenadas teóricas tridimensionales (ξ,η,ζ) sobre una esfera unitaria a través de las relaciones:

$$\xi = \operatorname{sen}\alpha\cos\delta \tag{2}$$

$$\eta = \cos\alpha\cos\delta \tag{3}$$

$$\zeta = \operatorname{sen}\delta \tag{4}$$

mientras que las coordenadas medidas (x,y) se convierten a las coordenadas tridimensionales (u,v,w) sobre la misma esfera, por medio de las siguientes ecuaciones de proyección

Proyección Tangencial	**Proyección Concéntrica**	
$\tan\rho = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{F}$	$\rho = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{F}$	(5)
$u = \frac{x\cos\rho}{F}$	$u = \frac{x\operatorname{sen}\rho}{\rho F}$	(6)
$v = \frac{y\cos\rho}{F}$	$v = \frac{y\operatorname{sen}\rho}{\rho F}$	(7)
$w = \cos\rho$	$w = \cos\rho$	(8)

Detalles de la geometría de proyección se pueden ver en la referencia [7].

Para el caso de un objeto i presente en la placa m y en el catálogo de referencia, la conversión de un sistema a otro se lleva a cabo a través de una matriz de transformación según las relaciones:

$$\begin{aligned} a_{11}^m u_i^m + a_{12}^m v_i^m + a_{13}^m w_i^m &= \xi_i + \varepsilon_{\xi i} \\ a_{21}^m u_i^m + a_{22}^m v_i^m + a_{23}^m w_i^m &= \eta_i + \varepsilon_{\eta i} \\ a_{31}^m u_i^m + a_{32}^m v_i^m + a_{33}^m w_i^m &= \zeta_i + \varepsilon_{\zeta i} \end{aligned} \tag{9}$$

y para un objeto i cuya imagen está sobre la placa m y sobre la placa n, se utilizan las relaciones

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{\xi i} &= a_{11}^m u_i^m + a_{12}^m v_i^m + a_{13}^m w_i^m - a_{11}^n u_i^n - a_{12}^n v_i^n - a_{13}^n w_i^n \\ \Delta\varepsilon_{\eta i} &= a_{21}^m u_i^m + a_{22}^m v_i^m + a_{23}^m w_i^m - a_{21}^n u_i^n - a_{22}^n v_i^n - a_{23}^n w_i^n \\ \Delta\varepsilon_{\zeta i} &= a_{31}^m u_i^m + a_{32}^m v_i^m + a_{33}^m w_i^m - a_{31}^n u_i^n - a_{32}^n v_i^n - a_{33}^n w_i^n \end{aligned} \tag{10}$$

En ambos casos $\varepsilon_{\xi i}, \varepsilon_{\eta i}, \varepsilon_{\zeta i}$ representan los errores provenientes tanto de las mediciones como del catálogo mientras que $\left(a_{ij}^m\right)$ y $\left(a_{ij}^n\right)$ son las matrices de transformación de las placas m y n, respectivamente, y sus elementos se conocen como *constantes de placa*.

2) Se adopta una función correctora cuyos parámetros deberán describir la diferencia entre la proyección escogida y lo que el telescopio en realidad reproduce sobre la placa. Estos parámetros incluyen, además de los que representan efectos lineales (ej. la escala, una traslación del origen o una rotación, entre otros), aquellos que representan deformaciones de orden mayor. Son estos últimos los que definimos como *distorsión*. Es de notar que evidentemente esta distorsión no depende solamente del telescopio sino también de cual tipo de proyección se ha utilizado en la función de transformación.

Los métodos existentes como por ejemplo los utilizados por Günther y Kox [5] y Abad [6] requieren de un gran número de objetos de referencia, lo que generalmente representa un inconveniente dada la baja densidad de objetos en estos catálogos. Esta dificultad se puede solventar al hacer uso del método de ajuste simultáneo. Con la finalidad de probar el método que se propondrá en este trabajo, vamos a considerar una distorsión del tipo radial, cosa muy común en los telescopios astronómicos.

Para el caso de una distorsión del tipo radial, el desplazamiento de las imágenes en la dirección del radio, R, es de la forma:

$$\Delta R = \sum_i q_i R^i \tag{11}$$

donde

$$R = \sqrt{u'^2 + v'^2} \tag{12}$$

En esta relación, u' y v' representan las coordenadas que se obtienen directamente de las coordenadas medidas (x,y) a través de las ecuaciones (5)-(8).

Las componentes de este desplazamiento radial en las coordenadas u y v vienen dadas por

$$\Delta u = \frac{u'}{R}\Delta R \tag{13}$$

$$\Delta v = \frac{v'}{R}\Delta R \tag{14}$$

En la práctica, para el tamaño de las placas en consideración, el efecto de la distorsión sobre la coordenada w es despreciable.

Por otra parte, llamaremos (u,v,w) a las coordenadas libres del efecto de la distorsión. De modo que:

$$u = u' - \Delta u \tag{15}$$

$$v = v' - \Delta v \tag{16}$$

$$w = \sqrt{1 - u^2 - v^2} \tag{17}$$

En este trabajo se estudiará el efecto de una distorsión proporcional a la tercera potencia del radio. Este efecto es bastante común en la práctica y se conoce por *coma del sistema óptico*.

Para este caso particular se tiene que:

$$\Delta R = qR^3 \tag{18}$$

$$u = u' - u' qR^2 \tag{19}$$

$$v = v' - v' qR^2 \tag{20}$$

$$w = w' \tag{21}$$

En lugar de resolver las ecuaciones no lineales que resultan al sustituir las ecuaciones (15)-(17) en las relaciones (9) y (10), se propone corregir a priori las coordenadas medidas según las ecuaciones (15)-(17) para algún valor estimado del coeficiente de distorsión q. Luego se resuelven las ecuaciones de reducción en su forma lineal. Obviamente, los residuos de esta reducción han de reflejar todo aquello que los coeficientes lineales no han absorbido; en este caso, el efecto de la distorsión. Repitiendo este proceso para una serie de valores de q, se puede establecer una relación entre la suma de los cuadrados de los residuos de la solución (sq), y los valores de q, buscando aquel que minimice la función $sq(q)$. En la simulación de los datos se utilizó un valor del coeficiente de distorsión igual a 0.03 cuando las coordenadas se expresan en radianes.

Resultados y Discusión

El análisis de los resultados obtenidos persigue, básicamente, los siguientes fines:

1. Verificar que el valor obtenido del coeficiente de distorsión, q, corresponda al impuesto a los datos.
2. Determinar las condiciones bajo las cuales el Método de Ajuste Simultáneo funciona correctamente.

Tabla 1
Pruebas realizadas variando el promedio de estrellas por placa y el número de estrellas de referencia

Prueba	Promedio de Estrellas por Placa	Número de Estrellas de Referencia
1	620	4164
2	620	97
3	620	10
4a	620	3 *
4b	620	3 **
5	71	475
6	71	88
7	71	10
8a	71	3 *
8b	71	3 **
9	15	95
10	15	11
11a	15	3 *
11b	15	3 **

En ambos casos, se analizó la dependencia de los resultados obtenidos con respecto al número de enlaces, bien sea entre placas o entre placas y el catálogo; y, en este último caso, también con la distribución de las estrellas de referencia.

Se llevaron a cabo un total de 14 pruebas cuyas características se dan en la Tabla 1. Estas pruebas se dividieron en tres grupos: uno que contempla un número muy abundante de estrellas por placa, uno con un número moderado y uno con relativamente escasas estrellas. Las pruebas 1 a la 4b forman el grupo 1, de la 5 a la 8b forman el grupo 2 y de la 9 a la 11b forman el grupo 3.

Las pruebas 4a, 4b, 8a, 8b, 11a y 11b se llevaron a cabo con tres estrellas de referencia cada una, radicando la diferencia en la distribución de éstas. En las pruebas marcadas con (*), los objetos formaron un triángulo sobre el campo; mientras que, en aquellas marcadas con (**), éstos fueron alineados en declinación.

En la Tabla 2 se muestran los valores del coeficiente de distorsión q, obtenido para cada una de las pruebas. También se calculó εq, el error en la determinación de q, y su contribución máxima en micrones al error de la coordenada corregida x; o sea, en el borde de la placa.

Tabla 2
Valor obtenido para q, ε_q, y su contribución máxima al error en x

Prueba	q 10^{-2}	ε_q 10^{-2}	Efecto en ε_x µm	Enlaces con catálogo	Enlaces entre placas
1	2.95840	0.01747	0.08	9898	10268
2	2.93666	0.01734	0.08	252	10268
3	2.93671	0.01932	0.09	25	10268
4a	2.93177	0.01087	0.10	10	10268
4b	3.23202	0.45709	2.11	8	10268
5	2.80499	0.01775	0.08	1137	1179
6	2.81936	0.01761	0.08	214	1179
7	2.77978	0.01705	0.08	29	1179
8a	2.77441	0.01752	0.08	5	1179
8b	3.31256	0.62589	2.88	12	1179
9	3.51893	0.02031	0.09	237	250
10	3.50754	0.02007	0.09	31	250
11a	3.62077	0.02444	0.11	10	250
11b	3.58632	0.04658	0.21	8	250

En la Tabla 2 se puede observar que el valor de q obtenido en las distintas pruebas oscila alrededor del valor verdadero (0.03) con un error prácticamente constante, salvo en los casos donde las estrellas de referencia están alineadas en una coordenada. Se observa también que, aún en los casos más desfavorables (escasez de estrellas de referencia y/o pocos enlaces entre las placas), el efecto de este error en la corrección de las coordenadas medidas no alcanza el valor del error cuadrático medio de las mismas (que es en promedio, del orden de 5 μm por placa). En las últimas dos columnas se observa que el número de enlaces entre placas es, en cualquier caso, superior al número de enlaces con el catálogo de referencia y son precisamente estas relaciones las que refuerzan la solución. Este hecho evidencia claramente en aquellos casos donde los enlaces con el catálogo son pocos. La precisión final de las coordenadas α y δ calculadas depende, no sólo de la precisión con que se corrigen las coordenadas medidas, sino también de la precisión con que se determinan los coeficientes de la transformación.

En vista que el efecto de la distorsión ha sido prácticamente eliminado, los errores en las coordenadas finales deben ser solamente una función de la precisión con que se han determinado las constantes de placa y, de la distribución de errores accidentales en las coordenadas medidas. Obviamente, por su carácter aleatorio, estos últimos no pueden ser eliminados de las coordenadas. De modo que, una comparación entre la distribución de los errores de las coordenadas finales (s_α, s_δ) y la distribución de errores accidentales (s_x, s_y) proporcionará una medida, en términos generales, de la precisión con que se han determinado las constantes de placa.

Los resultados de esta comparación se dan en las Tablas 3, 4 y 5 donde,

$$\Delta s_\alpha = s_\alpha - s_x \tag{22}$$

Tabla 3
Diferencias entre el error cuadrático medio de las posiciones calculadas y el error cuadrático medio de los errores accidentales para el grupo 1

	Prueba 1		Prueba 2		Prueba 3		Prueba 4a		Prueba 4b	
Placa	Δs_α μm	Δs_δ μm	Δs_α μm	Δs_δ μm	Δs_α μm	Δs_δ μm	Δs_α μm	Δs_δ μm	Δs_α μm	Δs_δ μm
1	0.0	0.0	0.2	0.1	0.0	0.8	0.1	0.2	228.6	437.4
2	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.6	0.0	0.0	205.8	435.7
3	0.1	0.0	0.1	0.0	0.1	0.2	0.1	0.0	181.1	430.8
4	0.0	0.0	0.3	0.0	0.1	0.1	0.2	0.1	155.3	425.5
5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.2	0.6	122.2	228.4
6	0.0	0.1	0.0	0.1	0.0	0.5	0.2	0.2	109.9	227.1
7	0.1	0.0	0.1	0.0	0.2	0.1	0.1	0.1	95.9	223.0
8	0.0	0.0	0.1	0.0	0.2	0.2	0.1	0.2	81.7	221.1
9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.2	0.2	1.4	64.6	110.6
10	0.1	0.0	0.1	0.0	0.3	0.3	0.2	0.7	58.6	110.0
11	0.0	0.0	0.0	0.1	0.5	0.3	0.1	0.2	52.1	109.6
12	0.0	0.1	0.0	0.1	1.0	0.2	0.1	0.1	45.9	109.4
13	0.1	0.0	0.1	0.0	0.4	0.4	0.2	1.9	140.3	214.0
14	0.2	0.1	0.2	0.2	0.7	0.6	0.3	1.1	129.9	214.8
15	0.1	0.1	0.2	0.2	1.4	0.6	0.2	0.5	117.8	216.0
16	0.1	0.0	0.2	0.1	2.5	0.3	0.4	0.5	105.0	219.2