

## Optimal structure in interconnected dynamical systems (I)

**Fausto Posso R.**

*Departamento de Ciencias, Núcleo Táchira, Universidad de Los Andes  
San Cristóbal, Venezuela. E-mail: coordinw@nutula.tach.vla.ve.*

### Abstract

In this paper we study the modeling of interconnected dynamical systems (SDI), under the structural approximation "Component-Connection Model" (CCM). It tries specially the existence of the composite model and his relation with CCM. It has been found that certain structures of connection of SDI, so called "hierarchical structures" predict "a priori" the existence of the composite model and also it is possible to obtain important simplifications both conceptual and numerical on the solution phase of the model. We propose and develop an algorithm to obtain a hierarchical structure based on an arbitrary connection structure. This algorithm is based on graph theory and it is applied with success on two bibliographical examples.

**Key words:** Interconnected dynamical systems, component connection model, hierarchical structures, graph theory.

## Estructuras óptimas en sistemas dinámicos interconectados (I)

### Resumen

Se estudia el modelado de sistemas dinámicos interconectados (SDI), bajo la aproximación estructural Modelo Componente-Conexión (MCC), en especial se trata el problema de existencia del modelo compuesto y su relación con el MCC. Se conoce que la presencia de ciertas estructuras de conexión del SDI, las llamadas *estructuras jerárquicas*, aseguran "a priori" la existencia del modelo compuesto así como también permiten obtener importantes simplificaciones tanto conceptuales como numéricas en la fase de solución del mismo. Se propone y desarrolla un algoritmo de obtención de una estructura jerárquica a partir de una estructura de conexión arbitraria, este algoritmo está basado en Teoría de Grafos y se aplica exitosamente a dos casos tomados de la bibliografía.

**Palabras clave:** Sistemas dinámicos interconectados, modelo componente-conexión, estructuras jerárquicas, teoría de grafos.

### Introducción

Actualmente, la mayoría de los procesos científicos y tecnológicos de relevancia se conciben como una red de unidades interconectadas mediante flujos de materia, energía y/o información. Estos procesos se pueden modelar y simular eficientemente si se consideran como sistemas dinámicos interconectados, SDI [1], aproximación estructural que trata al sistema como for-

mado por la interconexión de subsistemas más sencillos. Se ha demostrado [2] que mediante este enfoque las tareas de modelado y simulación se simplifican apreciablemente.

Dentro de las formulaciones basadas en esta concepción, destaca el **Modelo Componente-Conexión (MCC)** [3], donde se propone un *modelo dinámico de primer orden (lineal o no) para los subsistemas componentes y un modelo algebraico lineal para las conexiones entre los mis-*

mos. De esta manera tanto la estructura como las características dinámicas del SDI están determinadas en forma única por el comportamiento de los subsistemas y cómo se relacionan. En esencia, se trata de desacoplar la información sobre los componentes de la estructura de conexión, algo no contemplado en los enfoques tradicionales. El MCC ha sido estudiado tanto en sus formulaciones básicas [4], como en sus propiedades estructurales [5-7] y aplicaciones [8]. Además se ha diseñado un ayuda computarizada para PC que ejecuta eficientemente las tareas de modelado y simulación de SDI, vía MCC [9].

Un aspecto importante de esta formulación es la relación entre el MCC y el modelo del sistema compuesto. Se ha demostrado [3] que tal relación es una función exclusiva del agregado del modelo de los componentes y de la matriz de interconexión entre los mismos. Además, se conoce [4, 5] que ciertas estructuras de interconexión muy particulares aseguran "a priori" la existencia del modelo compuesto además de producir importantes simplificaciones conceptuales y numéricas en la fase de solución del modelo. Tales estructuras, llamadas *estructuras jerárquicas* [10], se obtienen mediante un reordenamiento óptimo de los componentes utilizando técnicas grafo-teóricas basadas en asociar al sistema interconectado con un digrafo en el cual los nodos corresponden a los subsistemas y los lados a las interconexiones. Este ordenamiento se realiza por medio de operaciones binarias resultando un grafo numerado de tal manera que su matriz de adyacencia es triangular (estrictamente o por bloques). Todo esto sugiere el desarrollo de un algoritmo que construya una estructura jerárquica de un SDI a partir de una estructura de conexión arbitraria, por los beneficios ya mencionados. En [3] se expresan las ventajas de tal algoritmo más no se desarrolla. En consecuencia el propósito de este artículo es proponer, desarrollar y aplicar un algoritmo de obtención de estructuras óptimas para SDI mediante técnicas grafo-teóricas. El algoritmo propuesto se validará con varios ejemplos tomados de la bibliografía.

Este reordenamiento se realiza mediante operaciones binarias resultando un grafo numerado de tal manera que su matriz de adyacencia es triangular (estrictamente o por bloques).

## Fundamentos sobre grafos

Un grafo lineal (o simplemente un grafo),  $G=(V,E)$ , consiste de un conjunto finito no vacío de  $n$  objetos,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , llamados *vértices* en unión de un conjunto  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_l\}$  de elementos llamados *lados* tal que cada lado  $e_k$  está identificado con un par no ordenado  $(v_i, v_j)$  de vértices. Un grafo es *maximal* con respecto a una propiedad particular si:

- El grafo posee la propiedad y,
- La adición de un lado cancela la propiedad.

Un lado entre los vértices  $i$  y  $j$  puede considerarse como una línea dirigida desde el vértice  $i$  al vértice  $j$ . Los grafos cuyos lados son líneas dirigidas entre todo par de vértices se denominan *grafos dirigidos* o *digrafos*. Formalmente, un *digrafo* consiste de un conjunto de vértices  $V=\{v_1, v_2, v_3, \dots\}$ , un conjunto de lados  $E=\{e_1, e_2, \dots\}$  y un mapeo  $M$  que mapea todo lado sobre un par ordenado de vértices  $(v_i, v_j)$ .

Un *camino dirigido*, desde el vértice  $v_i$  hasta el vértice  $v_j$ , es una secuencia alternante de vértices y lados, empezando en  $v_i$  y terminando en  $v_j$ , tal que cada lado está orientado desde el vértice que le precede hasta el vértice que le sigue.

Un grafo no dirigido se denomina *conectado* si existe al menos un camino entre todo par de vértices. En un digrafo existen dos tipos de conectividad, a saber: un digrafo  $G$  se dice *fuertemente conectado* si al menos existe un camino dirigido desde cada vértice a todos los demás. Por el contrario, un digrafo se dice ser *débilmente conectado* si su correspondiente grafo no dirigido es conectado pero no fuertemente. Cada subgrafo máximamente conectado de un digrafo  $G$  se llama un *componente*, pero dentro de cada componente de  $G$ , todo subgrafo fuertemente conectado máximo se llama un *fragmento* (o fragmento fuertemente conectado) de  $G$ .

La *condensación* de un digrafo  $G$  es otro digrafo  $G_C$ , en el cual cada fragmento fuertemente conectado es reemplazado por un vértice y todo lado dirigido desde un fragmento fuertemente conectado a otro es reemplazado por un lado dirigido simple.

Los vértices de un digrafo  $G$  se dice que están en un *orden topológico* si están numerados

1,2,3,...,n; tal que para todo lado (i,j) en G se tiene que  $i < j$ .

La matriz de adyacencia,  $M=[m_{ij}]$  de un digrafo con  $n$  vértices y sin lados paralelos es una matriz  $n \times n$ , donde  $m_{ij}=1$ , si existe un lado dirigido desde el vértice  $j$  al vértice  $i$  o  $m_{ij}=0$  si no existe tal camino.

### Modelo Componente-Conexión

Físicamente, un componente puede tomar una gran cantidad de formas según sea el fenómeno en estudio. Matemáticamente, los componentes son simplemente mapeos entre la señal de entrada y la señal de salida. El modelo de estado lineal de un sistema componente genérico tiene la forma bastante conocida:

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i a_i \quad (1)$$

$$b_i = C_i x_i + D_i a_i$$

donde:  $x_i : n_i \times 1$ , vector de estado;  $a_i : l_i \times 1$ , vector de entrada  $b_i : r_i \times 1$  vector de salida y  $A_i, B_i, C_i$  y  $D_i$  son matrices reales de dimensiones apropiadas.

El modelo de estado de componentes compuesto, se obtiene al acoplar los modelos de estado de los  $n$  componentes.

$$\dot{\mathbf{x}} = A_C \mathbf{x} + B_C \mathbf{a} \quad (2)$$

$$\mathbf{b} = C_C \mathbf{x} + D_C \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} = \text{col}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$\mathbf{b} = \text{col}(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$\mathbf{x} = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$A_C = \text{bloq. diag}(A_1, A_2, \dots, A_n),$$

$$B_C = \text{bloq. diag}(B_1, B_2, \dots, B_n), \text{ etc.}$$

Físicamente las conexiones en un sistema se expresan en términos de algún tipo de ley de conservación entre las variables de entrada y salida. Entonces, de acuerdo a la hipótesis de linealidad en la conexión algebraica:

$$\begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \mathbf{y} \end{array} = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{array} \right| \begin{array}{c} \mathbf{b} \\ \mathbf{u} \end{array} \end{array} \quad (3)$$

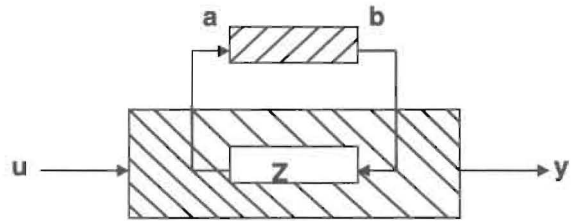


Figura 1. SDI con MCC.

donde las  $L_{ij}$  son matrices reales de dimensión apropiada y, usualmente, dispersas.

En resumen, un SDI comprende un conjunto de componentes caracterizado por un modelo dinámico y un conjunto de restricciones algebraicas lineales sobre las variables de entrada y salida (Figura 1).

Los sistemas componentes tienen el modelo de componentes compuesto  $Z$ , con  $\mathbf{a}$ , vector de entrada componente compuesto y  $\mathbf{b}$ , vector de salida componente compuesto. La zona rayada (N) alrededor del modelo de componentes compuesto representa la estructura de conectividad con entradas  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{b}$ , mientras que las salidas son el vector  $\mathbf{a}$  y el vector  $\mathbf{y}$ . Finalmente, el vector de entrada del sistema compuesto,  $\mathbf{u}$ , representa las entradas externas y  $\mathbf{y}$  representa las salidas desde el sistema compuesto al exterior.

Es necesario obtener una relación explícita entre la entrada y salida del sistema compuesto y el sistema interconectado; es decir, dado el sistema interconectado, con ecuaciones (2), (3), ¿cómo obtener el modelo de estado lineal que represente al sistema compuesto?

$$\begin{array}{l} \dot{\mathbf{w}} = F\mathbf{w} + G\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = H\mathbf{w} + J\mathbf{u} \end{array} \quad (4)$$

donde  $\mathbf{w}$  es el vector de estado del sistema compuesto y  $F, G, H, J$  son matrices que dependen de (1) y (2). Para la mayoría de los casos  $\mathbf{w}$  coincide con  $\mathbf{x}$  [4]. Bajo estas condiciones, por manipulaciones algebraicas se obtiene:

$$\begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = [A_C + B_C M^{-1} L_{11} C_C] \mathbf{x} + [B_C M^{-1} L_{12}] \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = [L_{21} C_C + L_{21} D_C M^{-1} L_{11} C_C] \mathbf{x} \\ \quad + [L_{21} D_C M^{-1} L_{12} + L_{22}] \mathbf{u} \end{array} \quad (5)$$

donde  $M = (I - L_{11}D_C)$ . Si se asume la existencia de su inversa se tiene que el modelo de estado con ecuaciones (4) está totalmente definido al especificarse las matrices:

$$F = A_C + B_C M^{-1} L_{11} C_C \quad G = B_C M^{-1} L_{12} \quad [6]$$

$$H = L_{21} (I + D_C M^{-1} L_{11}) C_C \quad J = L_{21} D_C M^{-1} L_{12} + L_{22}$$

### Existencia del modelo global

La condición necesaria y suficiente para que el modelo compuesto (ec. 6) de un SDI exista es que la matriz  $M$  sea invertible. Esta matriz contiene información sobre las relaciones internas de conexión entre los sistemas componentes (matriz  $L_{11}$ ) y sobre la relación directa entre la entrada y salida de los subsistemas (matriz  $D_C$ ). La matriz  $M$  siempre existe si:

- La matriz  $D_C \equiv [0]$ , lo cual significa que no existe relación directa entre la entrada y salida de todos y cada uno de los subsistemas componentes, en este caso  $M=I$ .
- La matriz  $D_C \neq [0]$ , pero la matriz  $L_{11}$  presenta ciertas formas especiales que aseguran la existencia de la inversa, en concreto que sea triangular (estrictamente o por bloques).

La primera condición no admite análisis posterior, basta decir que es inherente a la estructura en sí del SDI. La segunda condición si es susceptible de un análisis más detallado ya que en la mayoría de los casos la triangularidad de la matriz de conexión se logra mediante una numeración óptima de los componentes lo cual tiene que ver con la presencia de ciertas estructuras de conexión especiales, las llamadas estructuras jerárquicas. En [11] se presenta un estudio bastante completo sobre la existencia de una estructura jerárquica de un SDI y sus implicaciones sobre el modelo compuesto

Un sistema es jerárquico, o posee una estructura jerárquica, si sus componentes pueden disponerse en niveles tales que la transmisión de información y/o control (entre niveles) se realice en un solo sentido. La aplicación de este concepto al tema en estudio, consiste en suponer que un SDI está formado por una familia de subsistemas ordenados jerárquicamente. Se distinguen dos tipos de estructuras jerárquicas:

- a. Estructura Serie-Paralelo: La dinámica de los componentes de un nivel dependen solamente de los componentes de un nivel inferior y/o de entradas externas. Si un SDI presenta una estructura de este tipo, su matriz  $L_{11}$  es estrictamente triangular; entonces, si la matriz  $D_C$ , es triangular se puede garantizar la invertibilidad de la matriz  $M$ .
- b. Estructuras Multinivel: Los componentes de un cierto nivel dependen además de componentes del mismo nivel. En este caso, luego del reordenamiento óptimo, la matriz  $L_{11}$  resultante es triangular por bloques. Si bien no es evidente la existencia de  $M$ , se puede asegurar que si cada bloque es invertible, entonces  $M$  también lo es [12] y el cálculo se simplifica al lograr reducciones apreciables en las dimensiones de las matrices a invertir.

Todo esto indica que la presencia de una EJ en un SDI es altamente deseable, lo cual sugiere el desarrollo de un procedimiento que obtenga una estructura jerárquica óptima a partir de una estructura de conexión arbitraria.

### Algoritmo de obtención de una estructura jerárquica óptima

El algoritmo a desarrollar se basa en procedimientos grafo-teóricos, los cuales han demostrado ser sumamente eficientes para resolver problemas similares en el diseño de sistemas de control [13], análisis de fallas [14] e Ingeniería de procesos [15]. En el contexto de SDI, la aplicación de la Teoría de Grafos consiste en asociar un digrafo con el SDI, en éste los nodos corresponden a los componentes y los lados a las interconexiones. Luego mediante operaciones binarias sobre la matriz de adyacencia correspondiente al digrafo del sistema se obtiene la estructura de conexión deseada. A grosso modo, el algoritmo comprende las siguientes fases:

#### Fase Uno: Entrada de información

Esta puede ser la matriz de interconexión,  $L_{11}$ , o la matriz de adyacencia, MAD, del SDI además del número de componentes del mismo.

### Fase Dos: Obtención de la estructura jerárquica (EJ)

Con las siguientes etapas:

- a. Construcción de la matriz de adyacencia, MAD, de acuerdo al siguiente procedimiento: 1. El orden de MAD es igual al número de componentes; 2. Inicialmente  $MAD = [0]$ , luego se recorre a  $L_{11}$  exhaustivamente por filas y columnas. En este recorrido la entrada (i,j) de MAD se cambia al valor "1" si y sólo si existe un lado dirigido entre el componente i y el componente j. El procedimiento termina cuando se han recorrido todas entrada de  $L_{11}$ , lo cual implica que se han analizado todas las posibles conexiones entre los n componentes del SDI
- b. Existencia de la EJ, la condición necesaria y suficiente para que exista una EJ es que no existan lazos entre los componentes de niveles diferentes. Entonces, dada una estructura de conexión arbitraria, se debe determinar si existen ciclos en el SDI, cada uno de éstos se denomina un **subsistema irreducible (SBI)** ya que está compuesto por el mínimo número de componentes que deben analizarse simultáneamente.

Como resultado de esta descomposición puede suceder que:

1. Se obtenga un solo SBI formado por todos los componentes del SDI, en este caso no es posible obtener EJ alguna ya que el sistema global conforma un solo lazo.
2. No exista ningún SBI lo cual implica que el sistema es uno sin ciclos, en consecuencia la EJ que admite es la serie-paralelo.
3. Exista al menos un SBI formado por varios (pero no todos) los componentes, la EJ asociada es la Multinivel, donde los componentes que conforman un ciclo se deben ubicar en un mismo nivel.

Claramente, el problema de determinar los SBI se reduce a identificar los componentes fuertemente conectados (CFC) del digrafo del SDI, éstos se obtienen usando el procedimiento desarrollado en [11], basado en la construcción de la matriz de cierre transitivo.

### Fase Tres: Ordenamiento Optimo

Se logra mediante un reordenamiento de filas y columnas de MAD tal que se convierta en triangular (estrictamente o por bloques) o, lo que es lo mismo, una reenumeración de los nodos del digrafo asociado, mediante un proceso de *ordenamiento topológico*. De acuerdo a las alternativas planteadas en la fase anterior se tiene que para una:

- a. Estructura serie-paralelo, el ordenamiento topológico procede inmediatamente, obteniéndose una MAD óptimamente numerada.
- b. Estructura multinivel, se debe realizar primero una condensación, el digrafo condensado,  $G_c$ , está formado por **supernodos** (o "supervértices"), que corresponden a los CFC del digrafo original cíclico y **nodos simples** que corresponden a los nodos que no forman parte de un ciclo. A su matriz de adyacencia asociada, MADC, si se le ordena topológicamente. Luego es necesario reproducir la matriz de adyacencia original pero óptimamente numerada. Su obtención procede mediante un proceso llamado **expansión** que es, hasta cierto punto, un proceso inverso al de condensación.

Construcción de  $L_{11}$  óptima. Cualquiera sea la E.J. resultante, se debe obtener nuevamente la matriz  $L_{11}$  a partir de MADCO, también mediante un proceso de expansión.

### Fase Cuatro: Salida de Información

La salida es función de la entrada suministrada, si la entrada es la MAD la salida es MADCO, por el contrario, si la entrada es la matriz de interconexión, la salida es  $L_{11}O$ . Con esta fase, también se concluye el algoritmo.

El diagrama de flujo del algoritmo puede verse en la Figura 2.

## Casos de estudio

### Aplicación Nº 1

Tomada de [15], el SDI representa un sistema de transmisión de flujo de fluidos en un solo sentido. Su digrafo asociado se representa en la Figura 3.



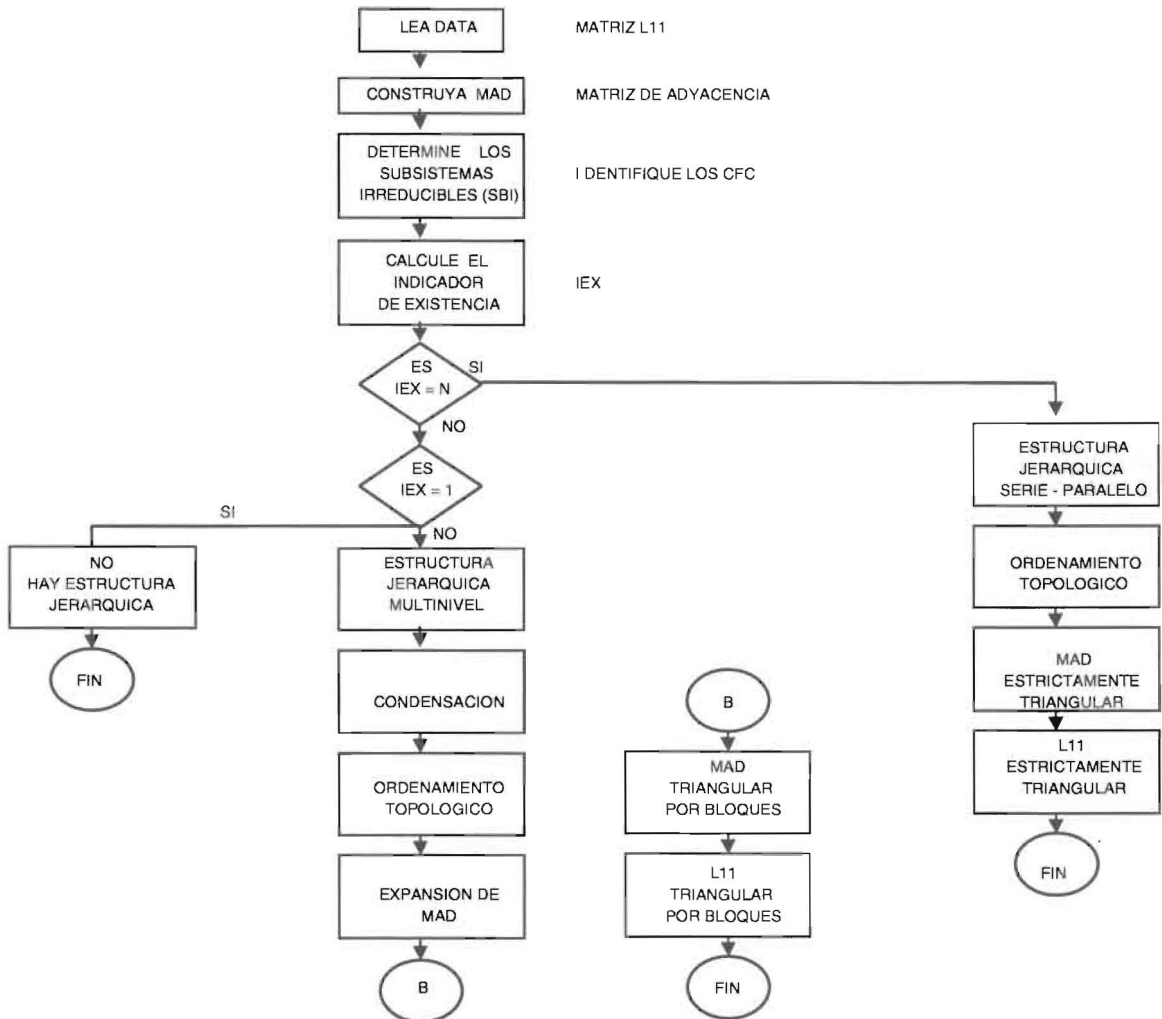


Figura 2. Diagrama de flujo del algoritmo.

**Fase Uno:**

No procede ya que la información del SDI está en términos de la matriz de adyacencia.

**Fase Dos:**

Obtención de una E.J.

1. Matriz de adyacencia.

$$MAD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

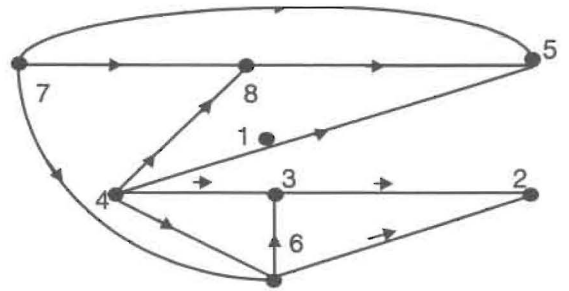


Figura 3. Digrafo del SDI.

2. Estructura del sistema: subsistemas irreducibles (SBI), subsistemas simples (SBS). No existen SBI, todos los subsistemas son SBS
3. Estructura jerárquica: IEX=5, la E.J. correspondiente es la Serie-Paralelo.

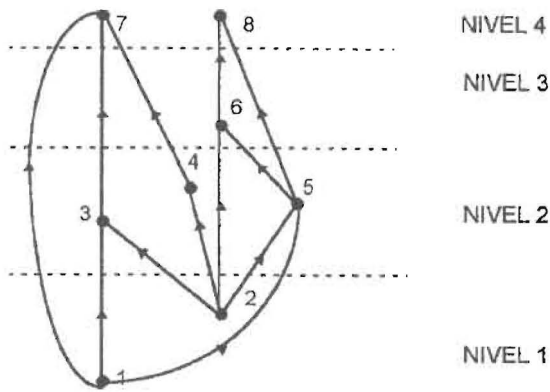


Figura 4. Digrafo del SDI con estructura óptima.

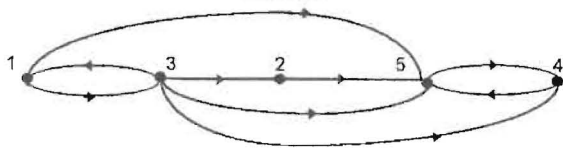


Figura 5. Digrafo del SDI.

4. Constituyentes de la estructura (niveles)  
 Nivel 1: Formado por los comp. 1,2  
 Nivel 2: Formado por los comp. 3,4,5  
 Nivel 3: Formado por los comp. 6  
 Nivel 4: Formado por los comp. 7,8

**Fase Tres:**

Ordenamiento óptimo

1. Renumeración de los nodos del digrafo (Figura 4):

- |                 |                 |
|-----------------|-----------------|
| Nodo 7 → Nodo 1 | Nodo 4 → Nodo 2 |
| Nodo 8 → Nodo 3 | Nodo 1 → Nodo 4 |
| Nodo 6 → Nodo 5 | Nodo 3 → Nodo 6 |
| Nodo 5 → Nodo 7 | Nodo 2 → Nodo 8 |

2. Matriz de Adyacencia óptima

$$MADO = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Aplicación N° 2**

Se tomará el SDI estudiado en [13], formado por cinco componentes y descrito en términos de su matriz de interconexión y correspondiente a un lazo de control en feed-back para un sistema de reactores químicos.

**Fase Uno:**

Entrada de información, matriz  $L_{11}$ , donde el supraíndice indica el componente y el subíndice el acumulado de las entradas/salidas de los componentes.

$$\begin{matrix} a^1_1 \\ a^2_2 \\ a^3_3 \\ a^3_4 \\ a^3_5 \\ a^4_6 \\ a^5_7 \\ a^5_8 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & b^1_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^2_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^3_3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & b^3_4 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^3_5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & b^4_6 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & b^5_7 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & b^5_8 \end{pmatrix}$$

El digrafo asociado puede verse en la Figura 5.

**Fase Dos:**

Obtención de la estructura jerárquica

1. Construcción de la Matriz de Adyacencia, procede por inspección de  $L_{11}$ , o por observación directa del digrafo.

$$MAD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Estructura del sistema: subsistemas irreducibles, SBI, o subsistemas simples, SBS.  
 SBI # 1: Formado por los comp. 1, 3  
 SBI # 2: Formado por los comp. 4, 5  
 SBS # 1: Formado por el comp. 2

3. Estructura Jerárquica: IEX=0, el SDI admite una estructura Multinivel.
4. Constituyentes de la estructura (niveles)
  - Nivel 1: Formado por los comp. 1,3
  - Nivel 2: Formado por el comp. 2
  - Nivel 3: Formado por los comp. 4,5

**Fase Tres:**

Ordenamiento óptimo.

1. Condensación del digrafo del sistema:  
Orden de Gc: 3 (2 supernodos y 1 nodo simple)
2. Matriz de adyacencia de Gc, MADC.

$$\text{MADC} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Renumeración de los nodos del digrafo condensado.
  - Nodo 3 → Nodo 1
  - Nodo 2 → Nodo 2
  - Nodo 1 → Nodo 3
4. Expansión del digrafo condensado.
  - Comp. 1 → Comp. 1    Comp. 2 → Comp. 3
  - Comp. 3 → Comp. 2    Comp. 4 → Comp. 4
  - Comp. 5 → Comp. 5
5. Matriz de Adyacencia óptima

$$\text{MADO} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

y el digrafo asociado adquiere la estructura jerárquica que puede observarse en la Figura 6.

6. Matriz de conexión óptima.

$$L_{11}O = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

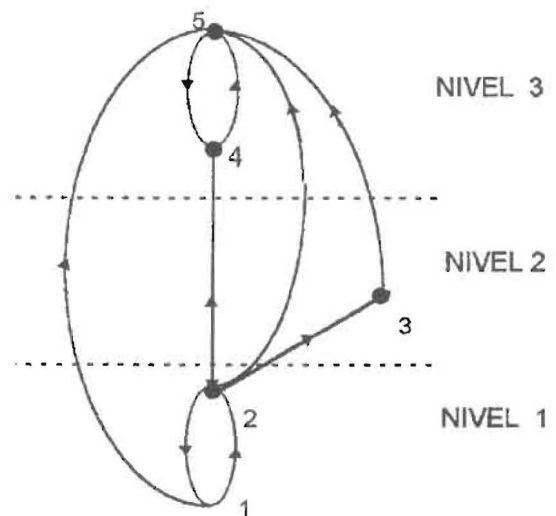


Figura 6. Digrafo del SDI estructurado jerárquicamente.

### Análisis de Resultados

En ambos casos de estudio se obtuvo la estructura jerárquica correspondiente. Para el caso Serie-Paralelo, la MADO resultante es estrictamente triangular tal como corresponde a un sistema libre de ciclos. La disposición y conformación de los niveles debe tomar en cuenta las divisiones físicas naturales correspondientes al suceso físico por consiguiente no se puede generalizar sobre el número de componentes óptimo por nivel; en todo caso se recomienda minimizar el número de componentes del mismo ya que el análisis y la simulación proceden nivel por nivel; primero se simula el nivel uno, conocidas las salidas de los componentes del nivel uno se simula el nivel dos y así sucesivamente los demás niveles. Claramente, la eficacia computacional de la descomposición radica en el método secuencial de análisis.

En el caso de la EJ multinivel, la MADO es triangular por bloques, donde cada bloque se asocia con un nivel en la estructura y comprende los componentes que deben resolverse simultáneamente por conformar un ciclo. El análisis para este tipo de sistemas procede nuevamente de manera sucesiva, aunque con una mayor complejidad que en la estructura serie-paralelo.

En cuanto al desempeño del algoritmo, es relevante mencionar respecto a:



- Entrada de información, el digrafo del SDI se puede usar para determinar directamente los C.F.C. además de otras operaciones sobre el mismo sólo cuando el número de componentes (esto es, el número de nodos) es pequeño, no obstante cuando  $n$  tiende a ser grande, se prefiere trabajar con la MAD u otra representación del digrafo (lista de sucesores, matriz de incidencia, etc.) más aún para propósitos computacionales. En cuanto a la construcción de MAD, ya que los vectores de entrada y salida pueden tener más de un elemento, se construye determinando si la entrada  $i$  del componente  $k$  está relacionada con la salida  $j$  del componente  $m$ , para  $m \neq k$ ; si esto sucede,  $mad(i,j) = 1$ . De lo contrario es cero.

- Estructura jerárquica: Su existencia y tipos se expresan en términos de un indicador de existencia, que toma diferentes valores de acuerdo a las alternativas analizadas en el paso 2.b del algoritmo.

- En cuanto a la construcción de la EJ óptima, se tiene que el ordenamiento topológico (OT), fundamento de esta fase, se basa en el hecho de que en un digrafo acíclico existe al menos un nodo (o vértice) con grado de entrada cero, el cual va a ser el punto de inicio de la nueva numeración. Si existe más de un vértice que cumpla con esta condición se van a generar varios OT. Se puede demostrar que los diferentes OT están relacionados mediante:  $(OT)_1 = T(OT)_2 T^{-1}$ . Donde  $T$  es una matriz de permutación. En el Anexo 1 se muestra el algoritmo respectivo en detalle.

- En el algoritmo están presentes dos procesos de reducción del orden, como son: la formación de MAD a partir de  $L_{11}$  y de MADC a partir de MAD.

- Correspondientemente, existen dos etapas de expansión, una obtener MADO a partir de MADC y otra para formar  $L_{11}$  óptima a partir de MADO

- Ambos procesos deben ser consistentes tal que no haya pérdida de información y que las relaciones de conexión originales se preserven.

- Los buenos resultados obtenidos por el algoritmo sugieren su implementación computacional con el fin de darle una mayor aplicabilidad, esta implementación se presentará en un próximo artículo "compañero".

## Conclusiones

La presencia de jerarquías en la estructura de conectividad de un SDI asegura el modelado y simulación del mismo cuando se usa la aproximación MCC. Las estructuras jerárquicas pueden ser:

1. Estructura Jerárquica Serie-Paralelo, se obtiene una matriz de interconexión  $L_{11}$  estrictamente triangular.
2. Estructura Jerárquica Multinivel, se obtiene una matriz de interconexión  $L_{11}$ , triangular por bloques.

En ambas situaciones, además de asegurar la existencia del modelo global, este reordenamiento espacial permite obtener importantes simplificaciones numéricas en la solución del modelo ya que la operación de inversión matricial en el cálculo del modelo global se reduce a inversión de la matriz identidad (caso trivial) o en el "peor de los casos", la inversión de matrices triangulares por bloques de dimensión menor que la matriz completa

La Teoría de grafos demuestra ser una herramienta idónea y eficiente en modelado y simulación de SDI.

## Referencias Bibliográficas

1. Siljak, Dragoslav; "Large scale dynamical systems", De. North Holland, New York (1973).
2. Aldeen, M., "Interconnected dynamical systems, IEE Proceedings-D, vol 139, N° 2, Marzo, (1992).
3. DeCarlo, R.A. and Saecks R., "Interconnected dynamical systems", Marcel Dekker, New York, (1981).
4. DeCarlo, R.A. "The Component-Connection Model for interconnected systems: Philosophy, problem formulations and solutions", Large scale systems, 10, (1989) 123-138.
5. DeCarlo R.A., "Sensitivity calculations using the component-connection model", Int. Journal of Circuit Theory and Applications, 12(3), (1984)
6. Feliachi, Ali and Chawdhury Bhurtun, "Model Reduction of large-scale inter-

- connected systems*", Int. J. Systems Sci., 18 (12), (1987), 2249-2259.
7. Lefevbre, S.; Richter and DeCarlo R., "The component-connection model and decentralized control: Theory and applications", TR-EE-81-3, School of Electrical Engineering, Purdue University (1981).
  8. Wasynczuk, O. and DeCarlo R.A., "The component-connection model and structure preserving model order reduction", Automatica, vol 17 (1981), 619-626.
  9. Posso, F. "Modelado y simulación de sistemas dinámicos interconectados asistido por computadora". Informe Técnico. Dpto. de Ciencias, ULA- Núcleo-Táchira, (1994).
  10. Haimes Yacov, "Hierarchical multiobjective analysis for Large Scale Systems", Automatica, vol 24 N° 1, (1988), 53-79.
  11. Ozgüner, U.; Perkins W.R., "On the multilevel structure of large scale composite systems. IEEE Trans. Circuits Syst., 22, July, (1975) pp 618-622.
  12. Gantmacher, F.R., *The Theory of Matrices*, Chelsea, New York, (1959).
  13. Schizas, C.; Evans F.J., *Graph theoretic approach to multivariable control system design*. Automatica, 17, (1981) 371-377.
  14. Iri. M., Aoki K., O'Shima E. and Matsuyama H., "A graphical approach to the problem of locating the origin of the system failure. J. Oper. Res. Soc. Japan, 23, (1980) 295-311
  15. Suhani, Y.; Mah R.S., "Optimal Design of multipurpose batch plants I&C Proc. Des. Dev, 21, (1982) 94-100

## **Anexo 1**

### **Algoritmo de ordenamiento topológico**

El algoritmo procede por construcción de la nueva numeración de acuerdo al siguiente esquema:

1. Haga  $i \leftarrow 1$ .
2. Consiga un vértice no numerado en G con grado de entrada cero, y asigne el número 1. Si no vaya a 4.
3. Haga  $i \leftarrow i+1$  y vaya a la etapa 2.
4. Si todo vértice en G ha sido numerado concluya, si no vaya a la etapa 5.
5. Si el grado de salida de un vértice ya numerado no es cero, elimine todos los vértices que salgan de cada vértice numerado y vaya a 2. Si existe algún vértice no numerado y el grado de salida de cada vértice ya numerado es cero, se tiene un circuito dirigido en el digrafo, entonces imprima este mensaje y termine la ejecución.

Recibido el 2 de Diciembre de 1996

En forma revisada el 1° de Octubre de 1997