

# Variable structure control with integral action

*J. Ramírez, J. Bastidas and C. Vinante*

*Departamento de Automática, Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia  
Apartado 526. Maracaibo, Venezuela. E-mail: cvinante@luz.ve*

## Abstract

Variable structure system control is a rapidly developing non-linear controller design method. It provides attractive features such as fast response and insensitivity to variation in plant parameters. In this work a new reaching law with constant plus integral rate is used to design a variable structure controller. This controller was experimentally tested in the digital position control of a DC servomotor. The addition of integral rate to the reaching law, with the proper selection of its parameters, improves the tracking accuracy and the robustness of the variable structure controller.

**Key words:** Position control, variable structure control, non linear control.

# Control de estructura variable con acción integral

## Resumen

Los controladores de estructura variable se han desarrollado rápidamente para control de sistemas. Estos controladores presentan características atractivas tales como respuesta rápida e insensibilidad a las variaciones de los parámetros de la planta. En esta nota se presentan resultados experimentales de la implementación de un controlador de estructura variable con una nueva ley de alcance para el control digital de posición de un servomotor de corriente continua. Los resultados obtenidos muestran que con esta ley de alcance y una adecuada selección de los parámetros, se mejora la exactitud de seguimiento y la robustez del controlador de estructura variable.

**Palabras clave:** Control de posición, control no lineal, control de estructura variable.

## Introducción

Los avances en la tecnología digital y en las interfaces entrada/salida, hacen posible la implementación de controladores robustos de buen comportamiento, pero que son más complicados y/o de mayor orden, y que requieren de una potencia de computación adicional y de elevadas frecuencias de muestreo.

Los conceptos de control y algoritmos antes estudiados [1-3], para sistemas mecánicos pequeños tales como, el control de posición de actuadores electromecánicos, usando simulaciones digitales pueden ahora probar su verdadero valor en experimentos de laboratorio. Uno de estos algoritmos que presenta características atractivas tales como, rápida respuesta e insensibilidad a la variación de los parámetros de la

planta es el llamado control de estructura variable o de modo deslizante.

La idea matemática básica en el desarrollo del control de modo deslizante, se puede derivar considerando una ecuación diferencial continua por partes (lineal o no lineal) con el lado derecho discontinuo en una hipersuperficie [1-5]. Si las trayectorias de las ecuaciones diferenciales fuera de esta superficie, apuntan hacia la superficie de discontinuidad, se puede demostrar [1,5] que las trayectorias que empiezan en la superficie de discontinuidad permanecen en ella (se deslizan). A esta superficie por lo tanto se le denomina superficie de deslizamiento.

Una trayectoria de fase de este sistema consiste de dos partes, representando dos modos del sistema, el modo de alcance en el cual la trayectoria, comenzando desde cualquier punto

en el plano de fase, se mueve hacia al plano de conmutación (superficie de deslizamiento) llegando a él en un tiempo finito, y el modo deslizante en el cual la trayectoria tiende asintóticamente al origen del plano de fase. Durante el modo deslizante la dinámica del sistema esta gobernada solamente por los parámetros de la hipersuperficie.

Existen muchos criterios para el diseño de la superficie de conmutación que garantizan un modo deslizante asintóticamente estable [1]. Sin embargo se ha prestado menos atención a la dinámica de la fase de alcance y hasta recientemente se la dejó sin especificar y sin controlar, interesándose solamente en que las variables de estado alcanzasen la superficie de conmutación en un tiempo finito. Hung y Gao [1] presentan varias leyes para la dinámica del modo de alcance, y demuestran que pueden contribuir a mejorar la respuesta del sistema y reducir los problemas de "chattering".

En el presente trabajo se considera una ley de alcance de segundo orden para el diseño de un controlador de estructura variable. Para sistemas de una sola entrada y una sola salida el controlador obtenido, es equivalente al derivado por Chang [2] usando funciones de Liapunov.

El comportamiento del controlador con esta nueva ley de alcance se estudia experimentalmente implementándolo digitalmente para el control de posición de un servomotor de corriente continua. Se observa que el comportamiento del sistema de control es superior al obtenido usando un controlador de estructura variable sin acción integral.

### Formulación del problema del control de estructura variable

Dado el siguiente sistema de control general y posiblemente no lineal:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u} + \mathbf{d} \quad (1)$$

$$\dim \mathbf{x} = \mathbf{n} \text{ y } \dim \mathbf{u} = \mathbf{m}$$

con el origen del plano de fase representando el estado de equilibrio del sistema y  $\mathbf{d}$  las perturbaciones que lo afectan, el diseño del sistema de control de estructura variable consiste de las

siguientes dos etapas: diseño del modo deslizante y del modo de alcance.

### Diseño del modo deslizante

Un sistema de control de estructura variable está gobernado por el signo de una función del vector de las variables de estado  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ , que se define como la función de conmutación. En general, esta función es lineal y de dimensión  $\mathbf{m}$  igual a la dimensión del vector de acciones de control.

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = [\mathbf{s}_1(\mathbf{x}) \dots \mathbf{s}_m(\mathbf{x})]$  y  $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_1^T \dots \mathbf{c}_m^T]^T$ .

Por lo tanto cada componente de la función (2),  $\mathbf{s}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_i^T(\mathbf{x}) = 0$ , define una superficie de conmutación. Estas superficies representan la dinámica deseada para el sistema.

La condición necesaria para que una trayectoria permanezca, una vez alcanzada, sobre la superficie de conmutación  $\mathbf{s}(\mathbf{x})=0$  es que se cumpla  $\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x})=0$ . Esta condición se utiliza para encontrar un control equivalente  $\mathbf{u}$  para el modo de deslizamiento. Diferenciando  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  con respecto al tiempo a lo largo de la trayectoria dada por la ecuación (1) y despejando  $\mathbf{u}$  se obtiene, para el caso de usar un modelo aproximado del sistema dado por  $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)$  y  $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t)$ , la siguiente ley de control,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = - \left( \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}} \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

siempre y cuando la matriz inversa exista.

Esta ley de control equivalente garantiza la existencia del modo deslizante en la superficie de conmutación y utilizándola en la ecuación (1) permite obtener la dinámica del modo deslizante. La ecuación (3) es una ecuación general tanto para sistemas lineales como no lineales y de una o varias entradas. El análisis del modo deslizante y la búsqueda de superficies de conmutación estables es, con pocas excepciones, un problema difícil, especialmente para sistemas no lineales. El estudio de la estabilidad para sistemas no lineales en general se efectúa usando transfor-

maciones de estado que llevan al sistema a una de las varias formas canónicas posibles.

### Diseño de la fase de alcance

El requerimiento principal en el diseño del modo de alcance es que la ley de control total debe satisfacer la condición de alcance que garantiza que la trayectoria llega a la superficie de conmutación, o equivalentemente que  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  alcance el valor  $\mathbf{s}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$  en un tiempo finito y desde cualquier posición inicial arbitraria.

Requerimientos adicionales tales como rápido alcance y bajo "chattering" pueden ser incluidos en el diseño, usando como leyes de alcance para la dinámica de  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ , ecuaciones diferenciales asintóticamente estables de la forma,

$$\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{K} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) - \mathbf{K} \mathbf{I} \mathbf{h}(\mathbf{s}) \quad (4)$$

donde,

$$\mathbf{K} = \operatorname{diag}[\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_m], \mathbf{k}_1 > \mathbf{0}, \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) = [\operatorname{sgn}(s_1) \dots \operatorname{sgn}(s_m)], \mathbf{h}(\mathbf{s}) = [\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_m]$$

Distintos valores de los parámetros  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{K} \mathbf{I}$  y de la función  $\mathbf{h}(\mathbf{s})$  dan como resultado distintas características dinámicas durante la fase de alcance. La ley de control con acción integral usada en este trabajo, así como otras leyes propuestas en literatura, son casos particulares de la ecuación (4). Todas ellas son asintóticamente estables y garantizan un tiempo finito de alcance cuando no se usan capas límites para la superficie de conmutación. La ley general del control de estructura variable se puede ahora determinar calculando la derivada de  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  a lo largo de la trayectoria del modo de alcance e igualándola a la ecuación (4). De este modo se obtiene,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{x}} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{x}} \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\mathbf{K} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) - \mathbf{K} \mathbf{I} \mathbf{h}(\mathbf{s}) \quad (5)$$

y despejando  $\mathbf{u}$  se tiene,

$$\mathbf{u} = -\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{x}} \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)\right)^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{x}} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{K} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) + \mathbf{K} \mathbf{I} \mathbf{h}(\mathbf{s})\right] \quad (6)$$

Se puede demostrar [2,4] que, cuando se usan modelos aproximados del sistema para el controlador, la magnitud del parámetro  $\mathbf{K}$  representa una medida de las perturbaciones y de la

incertidumbre del modelo. Suponiendo que dichas incertidumbres y perturbaciones están acotadas por funciones continuas y conocidas, se puede estimar una cota inferior para  $\mathbf{K}$  que garantice la condición de alcance.

En sistemas reales es imposible obtener conmutación infinitamente rápida como requieren las suposiciones hechas en el diseño del controlador, por lo que siempre ocurrirá "chattering" en el modo deslizante y en el estado estacionario. Una de las causas del tiempo finito de conmutación es el retraso introducido por las conversiones analógica/digital, digital/analógica y computación, cuando se usan sistemas digitales.

Este problema de "chattering" se puede eliminar utilizando el método de continuación que elimina las discontinuidades de la acción de control en un entorno de la superficie de conmutación [6]. Esto se logra reemplazando  $\operatorname{sgn}(\mathbf{s})$  en la ecuación (6) por la función  $\operatorname{sat}(\mathbf{s})$  dada por,

$$\operatorname{sat}(\mathbf{s}) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}), & \text{si } |\mathbf{s}| \geq \mathbf{w} \\ \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{w}}, & \text{si } |\mathbf{s}| < \mathbf{w} \end{cases} \quad (7)$$

donde  $\mathbf{W}$  es el ancho de la capa límite.

## Control de estructura variable para sistemas de una sola salida, una sola entrada

### Desarrollo del algoritmo de control

Uno de los modelos más comúnmente usados el control de sistemas no lineales de una sola entrada y una sola salida es de la forma,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{x}_3 \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_n &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u} + \mathbf{d} \end{aligned} \quad (8)$$

$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \in \mathbf{R}^1$  es la salida del sistema. La ley de control fuerza al vector de estado  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n] = [\mathbf{y} \dot{\mathbf{y}} \dots \mathbf{y}^{(n-1)}]$  a seguir la trayectoria  $\mathbf{x}_d = [\mathbf{x}_{d1} \mathbf{x}_{d2} \dots \mathbf{x}_{dn}] = [\mathbf{y}_d \dot{\mathbf{y}}_d \dots \mathbf{y}_d^{(n-1)}]$ .

Definiendo el vector error como  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d$  la superficie de conmutación en función de este vector está dada por  $\mathbf{s}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{c} \bar{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{c}_n = \mathbf{1}$ . El estado de equilibrio del sistema corresponde al origen del vector error.

Para el sistema dado por (8), y usando un modelo aproximado ( $\hat{f}(\mathbf{x})$ ,  $\hat{g}(\mathbf{x})$ ) y la ley de alcance con acción integral, de la ecuación (6) se obtiene el siguiente algoritmo de control,

$$u = \hat{g}(\mathbf{x})^{-1} \left[ \hat{u} + \mathbf{K} \operatorname{sgn}(s) + \mathbf{KI} \int_0^t s(\tau) d\tau \right] \quad (9)$$

donde  $\hat{u} = -\hat{f}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{x}}_p - \mathbf{Y}_d^{(n)}$ , y  $\bar{\mathbf{x}}_p = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \dot{\bar{\mathbf{x}}}_i$

Este Controlador, que incorpora la integral de la función  $s(\mathbf{x})$ , puede también derivarse usando la teoría de Liapunov con la función

$v = 1/2 s^T s + 1/2 \left( \int_0^t s^T dt \right) \mathbf{KI} \left( \int_0^t s dt \right)$ . Chang [2] estableció una analogía entre la condición de deslizamiento  $\dot{V} = s^T \left( \dot{s} + \Omega \int_0^t s dt \right) < 0$ , y la estabilidad de un sistema masa-resorte-amortiguador donde la integral de  $s(\mathbf{x})$  se puede considerar como un desplazamiento equivalente.

La dinámica de  $s(\mathbf{x})$  en presencia de perturbaciones y el uso de modelos aproximados se puede obtener sustituyendo la ecuación (9) en la (8). Suponiendo que  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \hat{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{1}$  (sin margen de ganancia) se tiene,

$$\dot{s} = -\mathbf{K} \operatorname{sat} \left( \frac{s}{w} \right) - \mathbf{KI} \int_0^t s(\tau) d\tau + (\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}) + \mathbf{d} \quad (10)$$

Por lo tanto, de la ecuación (10), se puede considerar a la variable  $s$  (que es una medida de la distancia algebraica a la superficie  $s(\mathbf{x})=0$ ), como la salida de un filtro estable de segundo orden cuya dinámica depende solamente de los parámetros  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{W}$  y  $\mathbf{KI}$ . Las entradas a este filtro son las perturbaciones y los errores en el modelo (incertidumbre en la dinámica). De la ecuación (10) se observa que  $\mathbf{KI}$  puede ser usada para limitar el ancho de banda de la dinámica, y  $\mathbf{W}$  para controlar el amortiguamiento. Esto elimina el compromiso entre la exactitud en el seguimiento y el filtrado de la dinámicas indeseables presentes.

### Determinación de los parámetros del controlador

Bajo control deslizante, esto es en las proximidades de  $s(\mathbf{x}) = 0$ , el sistema descrito por (8)

con la ley de control dada por (9) y en ausencia de perturbaciones y error en el modelo se puede reducir a [7],

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 &= \bar{\mathbf{x}}_2 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 &= \bar{\mathbf{x}}_3 \\ &\vdots \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_n &= \sum_{i=1}^{n-1} c_i \bar{\mathbf{x}}_{i+1} + \mathbf{KI} \sum_{i=1}^{n-1} c_{i+1} \bar{\mathbf{x}}_i + \mathbf{KI} c_1 \bar{\mathbf{x}}_1 \end{aligned} \quad (11)$$

Definiendo  $\mathbf{z}_1 = \int \bar{\mathbf{x}}_1 d\tau$ , y operando algebraicamente se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{z}}}_1 &= \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 &= \bar{\mathbf{x}}_2 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 &= \bar{\mathbf{x}}_3 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_n &= \mathbf{K} c_1 \bar{\mathbf{z}}_1 + c_2 \bar{\mathbf{x}}_1 + (c_1 + \mathbf{K} c_3) \bar{\mathbf{x}}_2 + \dots \\ &+ (c_{n-2} + \mathbf{KI}) \bar{\mathbf{x}}_{n-1} + c_{n-1} \bar{\mathbf{x}}_n \end{aligned}$$

o en forma matricial,  
 $\dot{\bar{\mathbf{X}}} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{B} \mathbf{V}$  (13)

$\mathbf{V} = \mathbf{G} \bar{\mathbf{X}}$   
 donde  $\bar{\mathbf{X}} = [\bar{\mathbf{z}}_1 \bar{\mathbf{x}}_1 \dots \bar{\mathbf{x}}_n]^T$ ,  $\mathbf{B} = [0 \ 0 \dots 0 \ 1]^T$

y  $\mathbf{G} = [\mathbf{KI} c_1 \ \mathbf{KI} c_2 \ (c_1 + \mathbf{KI} c_3) \ \dots (c_{n-2} + \mathbf{KI}) \ c_{n-1}]$

Usando la técnica del regulador óptimo con el siguiente índice cuadrático,

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{Q} \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V}) dt \quad (14)$$

donde  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  son matrices ponderadoras. Suponiendo que en el tiempo  $t=0$  el sistema se encuentra en modo deslizante, la matriz  $\mathbf{G}$  de ganancia óptima está dada por

$$\mathbf{G} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (15)$$

donde  $\mathbf{P}$  es la solución de la siguiente ecuación de Ricatti,

$$\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (16)$$

Una vez determinada  $\mathbf{G}$  se puede obtener  $\mathbf{KI}$  y el vector  $\mathbf{c}$ .

## Resultados experimentales en el control de posición en un motor de corriente continua

### Modelo lineal del servomotor

El algoritmo de control de estructura variable con la ley de alcance propuesta fue implemen-

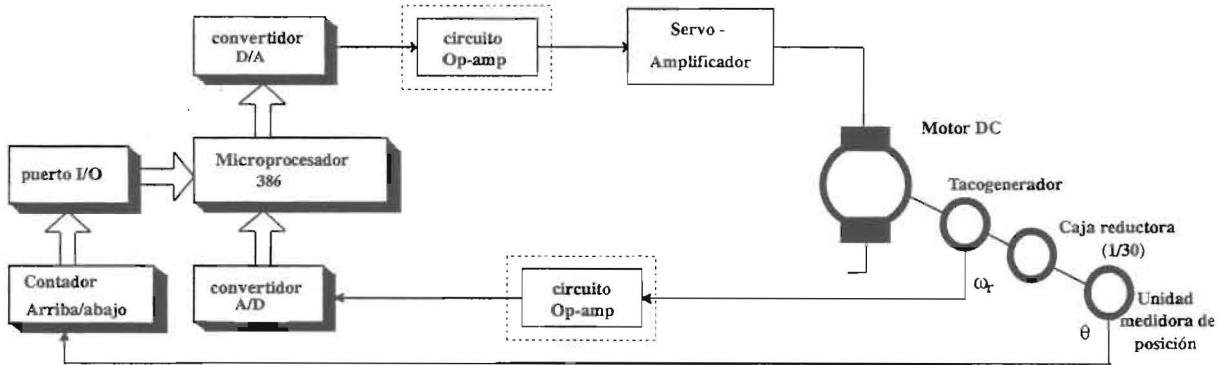


Figura 1. Equipo experimental utilizado.

tado digitalmente y aplicado al control de la posición angular de eje de un servomotor de corriente continua. Los motores de corriente continua usados en robótica y otras aplicaciones industriales sufren frecuentemente cambios en el ambiente de trabajo, tales como variaciones en la inercia y fricción causando variaciones en el tiempo de los parámetros que influyen el comportamiento del sistema. Por lo tanto aun cuando el motor de corriente continua es un sistema relativamente simple, es un buen equipo para probar nuevos algoritmos de control en tiempo real con perturbaciones y cambios inducidos en el sistema.

El modelo lineal aproximado para un motor de corriente continua controlado por armadura está dado por el siguiente sistema de ecuaciones [6],

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/\tau_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_p/\tau_p \end{bmatrix} u \quad (17)$$

Donde  $x_1$  es la posición angular del eje,  $x_2$  es la velocidad angular,  $\tau_p = JR/(Rf_r + K_b K_i)$  es la constante de tiempo mecánica y  $K_p = K_i/(Rf_r + K_b K_i)$  es la ganancia del proceso. Los dos últimos parámetros dependen de las características eléctricas del motor  $K_i$ ,  $K_b$  y  $R$  y también del momento total de inercia  $J$  y la fricción reflejados en el eje del motor. Definiendo  $\bar{x}_1 = x_1 - x_{1d}$  y  $\bar{x}_2 = x_2 - x_{2d}$  donde  $x_d$  es la trayectoria de referencia, la superficie de conmutación es  $s(t) = \bar{x}_2 + c_1 \bar{x}_1$ . La ecuación (9), usando una capa límite de ancho  $W$ , da la siguiente ecuación para el controlador de estructura variable,

$$u = \frac{\tau_p}{K_p} \left[ \frac{x_2}{\tau_p} - c_1 \bar{x}_2 - K_I \int_0^t (\bar{x}_2 + c_1 \bar{x}_1) d\tau - K_{sat} \left( \frac{\theta}{W} \right) \right] \quad (18)$$

### Descripción del sistema

El motor de corriente continua con magneto permanente usado en este estudio es del tipo empleado en posicionadores y aplicaciones de robótica. La velocidad del motor se mide con un tacogenerador y la posición del eje de motor se puede medir con una unidad medidora de posición unida al eje de motor a través de una caja reductora. El controlador de estructura variable se implementó en un computador personal 386 con tarjetas de conversión analógico-digital y digital-analógico de 12 bits de resolución. En la Figura 1 se muestra un esquema del arreglo experimental usado. El tiempo de muestreo usado en todos los experimentos fue de 3 mseg. Se encontró que con esta frecuencia de muestreo, que es relativamente alta, la versión continua del controlador de estructura variable se puede utilizar.

Las constantes del modelo se determinaron usando un método de identificación de parámetros basados en el control por relay [8], y la determinación de la ganancia última y la frecuencia correspondiente para diferentes valores de tiempo muerto, agregado vía software. Para simular variaciones en el sistema se introdujeron cambios en el factor de fricción de Coulomb. Esto se hizo mediante el cambio de la posición de un freno magnético acoplado a un disco metálico montado en el eje del motor. La identificación se realizó para dos valores del coeficiente de fric-



Tabla 1  
Variación de los parámetros del modelo en función de la posición del freno máximo

Freno aplicado (% del total)	Ganancia (grados/volt-seg)	Constante de tiempo (seg)
50% de freno	62.5	0.1
75% de freno	27	0.075

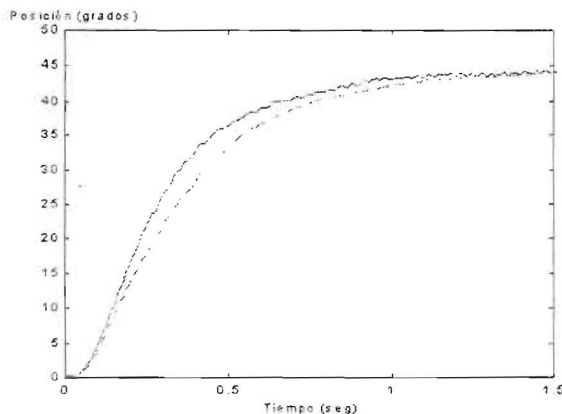


Figura 2. Respuesta del sistema a cambio escalón en el valor deseado  
-  $w=10$ , —  $w=50$ ,  $KI=40$ .

ción, correspondientes al 50% y 75% de la posición de freno máximo. Las variaciones de los parámetros del modelo con estos cambios de freno se muestran en la Tabla 1. Como puede observarse los cambios son considerables, este incremento del freno magnético aplicado, incrementa considerablemente el factor de fricción  $f_r$  y este incremento, como se puede observar en la ecuación (17), afecta los valores de los parámetros del modelo.

Los parámetros  $c$  y  $KI$  fueron determinados resolviendo las ecuaciones (15) y (16) para las condiciones de 50% freno y sin capa límite [9], con  $Q = \text{diag}[10^5 \ 50 \ 0.1]$  y  $R = \text{diag}[0.1 \ 0.1 \ 0.1]$ . La matriz  $Q$  penaliza fuertemente las desviaciones de la posición de referencia y  $R$  se eligió de tal manera de evitar saturación en el controlador.

### Discusión de los resultados

El objetivo de los experimentos realizados fue estudiar el comportamiento de sistema usando el controlador de estructura variable con acción integral y compararlo con el controlador de estructura variable convencional. Este estudio se

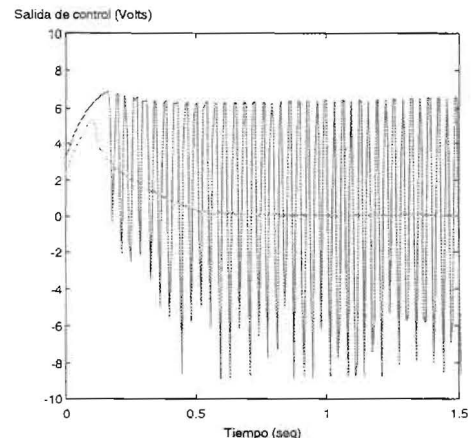


Figura 3. Respuesta del controlador a cambio escalón en el valor deseado  
-  $w=10$ , —  $w=50$ ,  $KI=40$ .

realizó sometiendo al sistema a cambios en el valor deseado y en las condiciones del sistema.

Los experimentos consistieron en introducir cambios escalón y senoidales en la trayectoria de referencia usando para el controlador los parámetros determinados con la condición de medio freno.

En las Figuras 2 y 3 se muestra la respuesta del sistema a un cambio escalón de 45 grados en el valor deseado para diferentes anchos de la capa límite. El ancho de la capa tiene una considerable influencia en la respuesta del controlador en relación al efecto de "chattering". En la mayoría de las aplicaciones reales, este parámetro se debe determinar experimentalmente mediante un compromiso entre la velocidad de respuesta en la zona cercana a la superficie de conmutación y el problema de oscilación alrededor de la misma.

En las Figuras 4 y 5 se comparan las respuestas obtenidas con el controlador de estructura variable convencional y el que usa acción integral para cambios senoidales en el valor deseado. Las condiciones de los experimentos co-

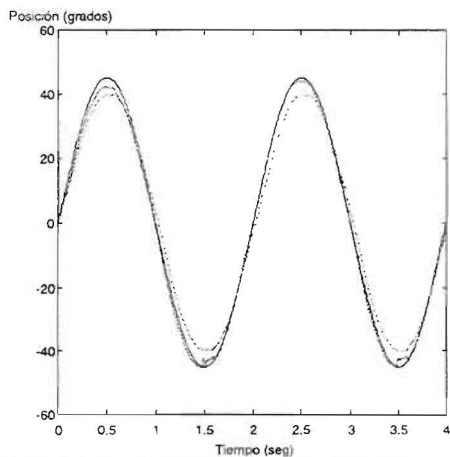


Figura 4. Respuesta del sistema para variación senoidal del valor de referencia. ---Referencia, —KI=40, ---KI=0 50% Freno.

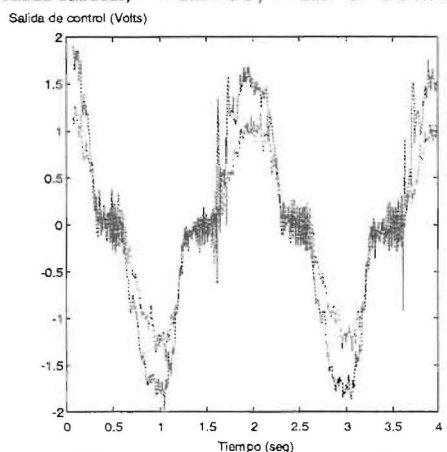


Figura 5. Respuesta del controlador para variación senoidal del valor de referencia ---KI=40, ---KI=0 50% Freno.

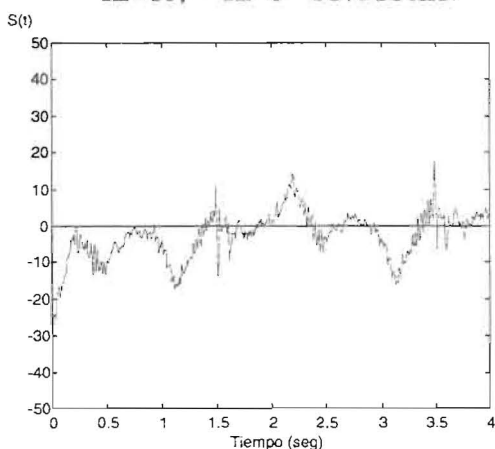


Figura 6.  $s(t)$  para variación senoidal del valor de referencia. 50% Freno Acción integral,  $KI=40$ .

responden a 50% de freno. La exactitud del seguimiento (amplitud y desfase) mejora considerablemente con el uso de la acción integral, Figura 4; con menos oscilaciones en la salida del controlador, Figura 5. Las Figuras 6 y 7 muestran como varían  $s(t)$  con la señal de referencia. Idealmente en modo deslizante sin capa límite  $s(t)$  debería ser igual 0 para  $t \geq 0$ . El uso de una capa límite además de la incertidumbre en los modelos de sistemas reales, hacen prácticamente imposible cumplir con esta condición exactamente. El uso de la acción integral reduce la amplitud de las variaciones en  $s(t)$  y por lo tanto mejora la aproximación a las condiciones ideales de modo deslizante.

Finalmente en las Figuras 8 y 9 se muestra la respuesta del sistema cuando la condición de freno se aumenta de 50% a 75%. El incremento de la discrepancia entre el modelo y el sistema tiene un mayor efecto negativo en el lazo de control usando el controlador de estructura variable estándar.

### Conclusiones

Una nueva ley de alcance se aplicó para el diseño de un controlador de estructura variable. Los resultados experimentales obtenidos en su aplicación al control de posición de un servomotor de corriente continua, demuestran que el uso de esta ley de alcance, con una adecuada selección de sus parámetros, mejora las respuestas de lazo de control para el sistema y su robustez frente a cambios en el proceso.

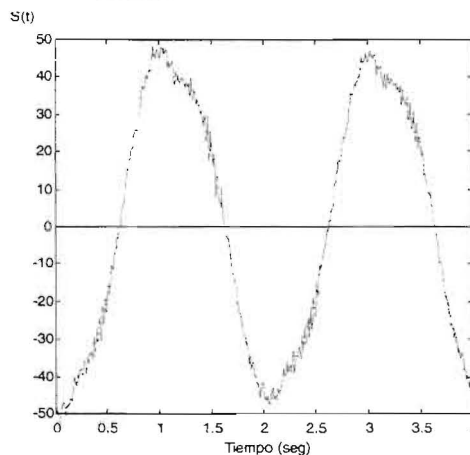


Figura 7.  $s(t)$  para variación senoidal del valor de referencia. 50% Freno Sin acción integral,  $KI=0$ .

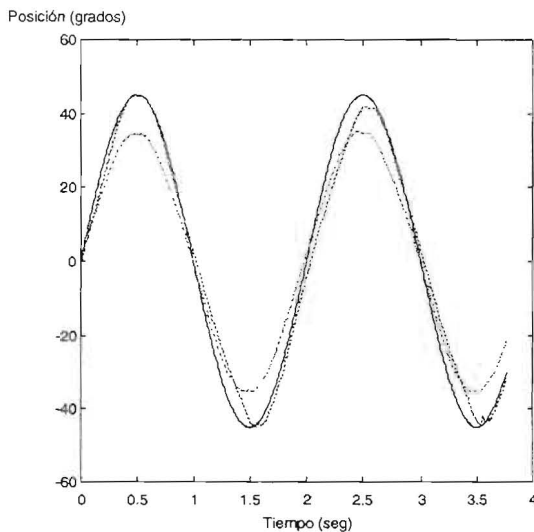


Figura 8. Respuesta del sistema para variación senoidal del valor de referencia  
— Referencia, —KI=40, ---KI=0  
75% Freno.

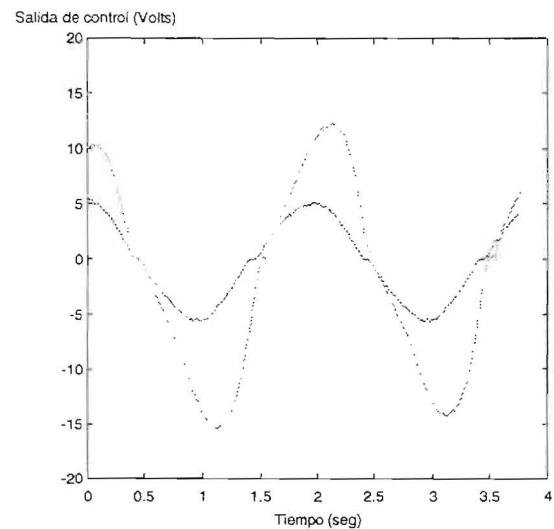


Figura 9. Respuesta del controlador para variación senoidal del valor de referencia  
— KI=40, ---KI=0  
75% Freno.

### Nomenclatura

- A : Matriz característica del sistema  
 B : Matriz de las acciones de control  
 C : Vector de coeficientes de la superficie deslizante  
 K : Constante del controlador  
 KI : Constante integral  
 S : Superficie deslizante  
 U : Vector de las acciones de control  
 V : Función de Lyapunov  
 W : Ancho de la capa límite  
 $\bar{X}$  : Vector de desviación  
 X : Vector de variables de estado  
 d : Vector perturbación  
 sgn: Función signo  
 $\Omega$  : Constante de la función de Lyapunov.

### Referencias Bibliográficas

- Hung J.Y., Gao W.B. and J.C. "Variable structure control". *Trans. Ind. Electron.*, Vol. 40, No 1, Feb. (1993) 2-23.
- Chang. L. "A MIMO Control with first-order plus integral sliding condition". *Automática*, Vol. 27, No 5 (1991) 853-858.
- Bastidas J, Vinante C. "A digital structure controller with a second order reaching law". Aceptado para publicación en la revista *Computers Electrical Engineering*.
- Fernandez B., Hedrick J.K. "Control of multivariable non-linear system by the sliding mode method". *Int. J. Control*, Vol. 46, No 3 (1987) 1019-1040.
- Slotine J.J., Sastry S. S. "Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces with application to robot manipulators". *Int. J. Control*, Vol. 38, No 2 (1983) 465-492.
- Chern T., Wu Y. "An optimal variable structure control with integral compensation". *IEEE Trans. Ind. Elec.*, Vol. 39, No 5 (1992) 460-463.
- Slotine J.J.. "Sliding controller design for no-linear system". *Int. J. Control*. Vol. 40, No 2 (1984) 421-434.
- Astrom K.J., Haggalund, T "Automatic tuning of simple regulators", *Automática*, Vol. 20, N° 5 (1984) 422-426.
- Kelly R. "A linear State feedback plus adaptive feedforward control". *Trans. Ind. Elec.* Vol. IE-34, No 2 (1987) 153-157.

Recibido el 18 de Julio de 1995

En forma revisada el 23 de Julio de 1997