Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. Vol. 29, No. 2, 121-127, 1997

A generalization of the Rice's distribution

José Sarabia R.

Dpto. Matemática, Decanato de Ciencias, Universidad Centro-Occidental "Lisandro Alvarado" Apartado Postal 352. Barquisimeto, Venezuela

Abstract

In this paper we generalize the Rice's random variable. We calculate the m-th moment, the distribution function, the characteristic function, the mode and the distribution of the products of Rice's - (a, α, ν) random variables.

Key words: Random variable, hypergeometric function, inverse Mellin transform.

Una generalización de la distribución de Rice

Resumen

En este trabajo generalizamos la variable aleatoria de Rice, calculamos: el momento de orden m, la función de distribución, función característica, moda y la distribución que sigue el producto de variables aleatorias tipo Rice - (a, α, ν).

Palabras clave: Variable aleatoria, función hipergeométrica generalizada, transformada inversa de Mellin.

Introducción

Haykin en [1, p.295] considera un proceso aleatorio en función de la variable tiempo, el cual consta de una componente cosenoidal Acos (ωt) y un ruido de banda angosta $n(t) = n_C(t)\cos(\omega t) - n_S(t)\,\mathrm{sen}(\omega t)$. Donde $n_C(t)$ es la componente de fase y n_S es la componente de cuadratura. Luego $x(t) = n_C^*(t)\cos(\omega t) - n_S(t)\,\mathrm{sen}(\omega t)$, donde $n_C^*(t) = A + n_C(t)$.

En este proceso aleatorio suponemos que la variable aleatoria $N_C^*(t)$ es normal (A, σ^2) y $N_S(t)$ es normal $(0, \sigma^2)$.

La función conjunta de densidad en coordenadas polares es:

$$f(r, \theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + A^2 - 2Ar\cos\theta}{2\sigma^2}\right] \quad (1)$$

con $0 \le r$ y $0 \le \theta \le 2\pi$.

En consecuencia la función marginal de densidad para la variable aleatoria R es:

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \cdot I_O\left(\frac{Ar}{\sigma^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{r^2 + A^2}{2\sigma^2}\right), \text{ para } r \ge 0 \quad (2)$$

Ya que: $I_O(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(x\cos\theta)\, d\theta$, de acuerdo a [2, p.376]. Donde I_O es la función asociada de Bessel de orden cero.

Haciendo $V = \frac{1}{\sigma} R$ y $a = \frac{A}{\sigma}$, entonces (2) queda así:

$$f_V(v) = v\, I_O(av) \cdot \exp\left(-\frac{a^2 + v^2}{2}\right) \text{para } v \ge 0$$

y $f_V(v) = 0$ para $v < 0$. (3)

A la variable aleatoria R se la llama **variable aleatoria de Rice** (Vea [3]) y a V, variable aleatoria de **Rice estándar**, aunque en adelante, la llamaremos v.a de Rice.

Esto nos sugiere, la siguiente generalización de la v.a de Rice. Así denominamos variable aleatoria (a, α, ν) -Rice, y la denotamos por V (a, α, ν), a la v.a cuya función de densidad es:

$$f(a, \alpha, \nu; v) = \begin{cases} H\, v^{\alpha}\, I_\nu(av).\exp\left(-\frac{a^2+v^2}{2}\right) & \text{para } v \geq 0 \\ 0 & \text{para } v < 0 \end{cases} \tag{4}$$

donde: a > 0, α ≥ 1 y ν ≥ 0; siendo I_ν la función asociada de Bessel de orden ν.

Notemos que V = V (a, 1, 0).

Esta distribución será de utilidad en aquellos procesos aleatorios en función del tiempo cuyo ruido de banda angosta dé como resultado una integral que represente a $v^{\alpha} I_\nu(av)$ (Vea 5.200 en [1,p.296]), por ejemplo:

$$v^{\alpha} I_\nu(av) = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\nu} v^{\alpha+\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \operatorname{ch}(avt)\,dt. \tag{5}$$

En lo que sigue demostraremos algunas propiedades para V (a, α, ν) y otras, específicamente para V, y enunciaremos dos lemas de utilidad para el intercambio del símbolo de serie con la integración impropia. La prueba de estos dos lemas sigue de 5.16.4 en [4,p.136], 3.478.1 en [5,p.342]y teorema 14.31 en [6,p.430].

Lema 1

Para $\varepsilon > -\frac{1}{2}$, ν = 0 ; a > 0, tenemos:

$$\int_0^{\infty} v^{\varepsilon} e^{-v^2/2} I_\nu(av)dv =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^{\nu+2n} \frac{1}{\Gamma(\nu+1+n)n!} \int_0^{\infty} v^{\varepsilon+\nu+2n} e^{-v^2/2} dv \tag{6}$$

Lema 2

Para $\varepsilon > -\frac{1}{2}$, ν ≥ 0 ; a > 0, tenemos:

$$\int_0^{\infty} v^{\varepsilon} e^{-v^2/2} I_\nu(av)dv$$

$$= \frac{a^{\nu}\, \Gamma\left(\frac{\varepsilon+\nu+1}{2}\right)}{2^{(\nu+1-\varepsilon)/2}\, \Gamma(\nu+1)} \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon+\nu+1}{2}; \nu+1; \frac{a^2}{2}\right) \tag{7}$$

Cálculo de H

Usando (6) podemos calcular el valor de H en (4) para que f (a, α, ν; v) sea función de densidad.

En efecto, debe tenerse:

$$H \int_0^{\infty} v^{\alpha} \cdot I_\nu(av) \cdot \exp\left(-\frac{a^2+v^2}{2}\right) dv = 1$$

Luego, usando (6) resulta:

$$H = \frac{e^{a^2/2} \cdot \Gamma(\nu+1) \cdot 2^{(\nu+1-\alpha)/2}}{a^{\nu} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha+\nu+1}{2}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\alpha+\nu+1}{2}; \nu+1; \frac{a^2}{2}\right)}. \tag{8}$$

Cuando α = 1, ν = 0 (v.a de Rice) tenemos: H = 1

Momento de orden m (m ∈ N)

Para hallar E (V^m), usaremos el desarrollo en serie de I_ν, y los lemas 1 y 2.

Teorema 1

Para a > 0, ν ≥ 0, α ≥ 1, m ∈ N y $\gamma = \frac{\alpha+\nu+1}{2}$, tenemos:

$$E(V^m) = \frac{2^{m/2} \cdot \Gamma\left(\gamma+\frac{m}{2}\right) \cdot \Phi\left(\gamma+\frac{m}{2}; \nu+1; \frac{a^2}{2}\right)}{\Gamma(\gamma) \cdot \Phi\left(\gamma; \nu+1; \frac{a^2}{2}\right)}$$

Demostración:

$$E(V^m) = \int_0^{\infty} H v^{m+\alpha} I_\nu(av) \exp\left(-\frac{a^2+v^2}{2}\right) dv.$$

Usando el lema 2, tenemos:

$$E(V^m) = H. \frac{a^{\nu} \cdot \Gamma\left(\frac{m+\alpha+\nu+1}{2}\right) \cdot e^{-a^2/2}}{2^{(\nu+1-m-\alpha)/2}\, \Gamma(\nu+1)}.$$

$$\cdot\, \Phi\left(\frac{m+\alpha+\nu+1}{2}; \nu+1; \frac{a^2}{2}\right). \tag{9}$$

Usando (8) , tenemos que:

$$E(V^m) = \frac{2^{m/2}\cdot\Gamma\left(\frac{m+\alpha+v+1}{2}\right)\cdot\Phi\left(\frac{m+\alpha+v+1}{2};v+1;\frac{a^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+v+1}{2}\right)\cdot\Phi\left(\frac{\alpha+v+1}{2};v+1;\frac{a^2}{2}\right)} \quad (10)$$

Observaciones:

a) Cuando $\alpha = 1$, $v = 0$ (v.a de Rice), tenemos:

$$E(V^2) = a^2 + 2 . \quad (11)$$

Resultados coincidentes con Rice [3, pp. 100-101].

b) Las fórmulas (9) y (10) son válidas para m real tal que $m > -3/2$.

c) Además de las consideraciones anteriores, es conveniente estudiar el comportamiento asintótico de $E(V^m)$ y $f(a, \alpha, v; v)$, cuando a es grande.

Así, en [7, p.292], tenemos:

$$\Phi(a; c; z) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-c}, \text{ cuando } z \to \infty;$$

pues $a > 0$. (12)

Usando (12) en (10) resulta:

$$E(V^m) \sim a^m . \quad (13)$$

Resultado este que confirma lo obtenido en (11), en el caso de Rice.

Por otra parte en [4, p.136], tenemos:

$$I_v(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \text{ cuando } x \to \infty . \quad (14)$$

Luego, cuando a es grande, y v se encuentra en una vecindad pequeña de a, tenemos de acuerdo a (3), (8), (12) y (14) que:

$$f(a, \alpha, v; v) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(\frac{v}{a}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}\cdot e^{-(v-a)^2/2} . \quad (15)$$

Por lo tanto, cuando a es grande, la v.a V (a,α,v) se comporta como una v.a $\sqrt{\chi^2}$ generalizada de parámetros α y a ($\sqrt{\text{chi-cuadrado}}$), y si v se mueve en una vecindad pequeña de a, entonces:

$$f(a, \alpha, v; v) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(v-a)^2/2} . \quad (16)$$

O sea V (a, α,v) se comporta como una v.a normal (a, 1) .

La Función de distribución de V (a, α, v)

Hallaremos dos expresiones para la función de distribución F (a, α, v; v), una útil para evaluaciones de los valores de F, ya que viene en función de la función gama incompleta. La otra expresión será de utilidad para evaluar integrales donde intervenga F, ya que viene en términos de funciones ${}_1F_2$, y en términos de I_n, en el caso de Rice.

Teorema 2

Para $\alpha \geq 1$, $a > 0$, $v \geq 0$ y $\delta = \frac{\alpha+v+1}{2}$, tenemos:

a) $F_V(a,\alpha,v; v) = Ha^v\, 2^{(\alpha-v-1)/2}$.

$$e^{-a^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma\left(\delta+n,\frac{v^2}{2}\right)}{\Gamma(v+n+1)n!}\left(\frac{a^2}{2}\right)^n;(v>0)$$

b) $$F_V(a,\alpha,v; v) = \frac{Ha^v e^{-a^2/2} v^{2\delta}}{\Gamma(v+1)2^{v+1}} .$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-v^2/2)^m}{m!(\delta+m)}\cdot {}_1F_2\left(\delta+m;\delta+m+1,v+1;\frac{a^2v^2}{4}\right)$$

Demostración:

a) Usando el desarrollo en serie de I_v y propiedades de convergencia uniforme, tenemos:

$$F_V(a,\alpha,v; v)\ (v>0) = He^{-a^2/2}\left(\frac{a}{2}\right)^v . \quad (17)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(a/2\right)^{2n}}{\Gamma(v+n+1)n!}\int_0^v u^{\alpha+v+2n}e^{-u^2/2}du\ (v>0)$$

Haciendo $\omega = \frac{u^2}{2}$ y de acuerdo a 3.381 en [5,p.317], resulta:

$$F_V(a,\alpha,v; v) = Ha^v\, 2^{(\alpha-v-1)/2}$$

$$e^{-a^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma\left(\delta+n,\frac{v^2}{2}\right)}{\Gamma(v+n+1)n!}\left(\frac{a^2}{2}\right)^n . \quad (18)$$

b) Si en lugar de desarrollar I_v en serie, desarrollamos $e^{-u^2/2}$ y usamos la posibilidad de intercambiar la integral con la serie, obtenemos lo siguiente:

$$F_V(a,\alpha,v;\ v) = e^{-a^2/2} H \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!2^m} \int_0^v u^{\alpha+2m} I_v(au)du \cdot \quad (19)$$

Como:

$$I_v(au) = \frac{1}{\Gamma(v+1)} \left(\frac{au}{2}\right)^v \cdot {}_0F_1\left(-; v+1; \frac{a^2u^2}{4}\right). \quad (20)$$

De acuerdo a la fórmula: 12.7.512 en [5,p.850] y haciendo $\omega = \frac{u^2}{v^2}$ en (19), resulta:

$$S_m = \int_0^v u^{\alpha+2m} I_v(au)du = \frac{1}{\Gamma(v+1)} \left(\frac{a}{2}\right)^v \frac{v^{v+\alpha+2m+1}}{2}.$$

$$\int_0^1 \omega^{\frac{v+\alpha+2m-1}{2}} \cdot {}_0F_1\left(-; v+1; \frac{a^2u^2\omega}{4}\right) d\omega$$

$$S_m = \frac{1}{\Gamma(v+1)} \left(\frac{a}{2}\right)^v \frac{v^{v+\alpha+2m+1}}{v+\alpha+2m+1}.$$

$${}_1F_2\left(\frac{v+\alpha+2m+1}{2}; \frac{v+\alpha+2m+3}{2}, v+1; \frac{a^2v^2}{4}\right). \quad (21)$$

Reemplazando (21) en (19) y haciendo $\delta = \frac{\alpha+v+1}{2}$ resulta

$$F_V(a,\alpha,v;\ v) = \frac{He^{-a^2/2} a^v v^{2\delta}}{\Gamma(v+1)2^{v+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-v^2/2)^m}{m!(\delta+m)}.$$

$${}_1F_2\left(\delta+m; \delta+m+1, v+1; \frac{a^2v^2}{4}\right) \quad (22)$$

Teorema 3

Cuando $\alpha = 1$ y $v = 0$, entonces la función de distribución viene dada así:

a) $F_V(a,1,0;\ v) = 1 - e^{-(a^2+v^2)/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2/2)^n}{n!} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(v^2/2)^m}{m!} \right);$

$v > 0$

b) $F_V(a,1,0;\ v) = e^{-(a^2+v^2)/2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{v}{a}\right)^n \cdot I_n(av)$

Demostración:

a) Usando la fórmula 8.352.1 en [5,p.940], tenemos en (18)

$$F_V(a,1,\ 0;\ v) = 1 - e^{-(a^2+v^2)/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2/2)^n}{n!} \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{(v^2/2)^m}{m!} \right). \quad (23)$$

b) Veamos que si $\alpha = 1$, $v = 0$ (Rice), en (19), nos queda:

$$F_V(a,1,0;\ v) = e^{-a^2/2} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!2^m} \int_0^v u^{2m+1} I_0(au)du. \quad (24)$$

Pero ahora la integral toma la forma:

$$\int_0^v u^{2m+1} I_0(au)du = v^{2m+2}.$$

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k m(m-1)\ldots(m-k+1) \cdot 2^k \cdot I_{k+1}(av)}{(av)^{k+1}}. \quad (25)$$

Reemplazando (25) en (24), y usando propiedades de series dobles tenemos:

$$Fv(a,\ 1,\ 0;\ v) = e^{-(a^2+v^2)/2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{v}{a}\right)^n \cdot I_n(av). \quad (26)$$

Fórmula conjeturada por Rice y W. Bennett en [3].

La función característica

La función característica de una variable aleatoria es de gran importancia para un gran número de problemas estadísticos, sobre todo aquellos relacionados con la suma de v.a independientes, especialmente por la utilización de transformadas de Fourier. Por esta razón procedemos a hallar la función característica de V (a, α, v).

Teorema 4

La función característica de la v.a V (a,α,v) con $a > 0$, $\alpha \geq 1$, $v \geq 0$ y $\delta = \frac{\alpha+v+1}{2}$ es

θ (a, α, v; t) = λ_1 (a, α, v; t) + i λ_2 (a, α, v; t)

donde:

$$\lambda_1 (a, \alpha, v; t) = \frac{Ha^{v/2}2^{(\alpha-v-1)/2}\cdot\Gamma(\delta)}{\Gamma(v+1)}\cdot \psi_2\left(\delta; v+1, \frac{1}{2}; \frac{a^2}{2}, \frac{-t^2}{2}\right) \quad (27)$$

$$\lambda_2 (a, \alpha, v; t) = \frac{Ha^{v}2^{(\alpha-v)/2}\cdot\Gamma\left(\delta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(v+1)}\cdot H_{12}\begin{pmatrix} -\delta; \delta+\frac{1}{2}, \delta+1 & \\ & ; -\frac{a^2}{2}, \frac{t^2}{2} \\ v+1, \frac{3}{2} & \end{pmatrix}\cdot te^{-t^2/2} \quad (28)$$

siendo: $\delta = \frac{\alpha+\lambda+1}{2}$,

$$\psi_2(\alpha;\gamma,\gamma';x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}}{(\gamma)_n(\gamma')_m n!\,m!}x^n y^m$$

(segunda función confluente de Horn) y

$$H_{12}\begin{pmatrix} \alpha;\beta,\gamma & \\ & ;x,y \\ \varepsilon,\delta & \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_n(\gamma)_n}{(\varepsilon)_n(\delta)_m n!\,m!}x^n y^m$$

(duodécima función hipergeométrica de Horn).

Demostración:

Como f es función de densidad,

$$\theta(a,\alpha,v;t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itv} f(a,\alpha,v;t)\,dv$$

es convergente, luego existen:

$$\lambda_1(a,\alpha,v;t) = H\int_0^{\infty}\cos(tv)v^{\alpha}e^{-v^2/2}I_v(av)dv$$

$$\lambda_2(a,\alpha,v;t) = H\int_0^{\infty}\cos(tv)v^{\alpha}e^{-v^2/2}I_v(av)dv.$$

Ya que: θ (a, α, v; t) = λ_1 (a, α, v; t) + i λ_2 (a, α, v; t).

Usando el lema 2 y las fórmulas 3.952-7 y 3.952-8 en [5, p.495] tenemos los resultados (27) y (28).

Luego de acuerdo a (27) y (28) tenemos que la función característica de la v.a V(a,α,v) es

$$\theta(a, \alpha, v; t) = \frac{He^{-a^2/2}a^{v}2^{(\alpha-v-1)/2}}{\Gamma(v+1)}\cdot\left(\Gamma\left(\frac{\alpha+v+1}{2}\right)\cdot\Psi_2\left(\frac{\alpha+v+1}{2}; v+1, \frac{1}{2}; \frac{a^2}{2}, \frac{-t^2}{2}\right)\right) +$$

$$i\cdot\Gamma\left(\frac{\alpha+v+1}{2}\right)te^{-t^2/2}\cdot H_{12}\begin{pmatrix} -\frac{\alpha+v+1}{2}; \frac{\alpha+v+2}{2}, \frac{\alpha+v+3}{2} & \\ & ; -\frac{a^2}{2}, \frac{t^2}{2} \\ v+1, \frac{3}{2} & \end{pmatrix} \quad (29)$$

Incidentalmente (27), (28) y (29) nos proveen de tres transformaciones de Fourier de $v^{\alpha}e^{-v^2/2}I_v(av)$. En efecto:

$$\mathcal{F}_C\left[v^{\alpha}e^{-v^2/2}I_v(av);t\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{\infty}\cos(tv)v^{\alpha}e^{-v^2/2}I_v(av)dv$$

$$\mathcal{F}_C\left[v^{\alpha}e^{-v^2/2}I_v(av);t\right] = \frac{a^{v}2^{(\alpha-v)/2}\Gamma(\delta)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(v+1)}\cdot\Psi_2\left(\delta; v+1, \frac{1}{2}; \frac{a^2}{2}, \frac{-t^2}{2}\right) \quad (30)$$

$$\mathcal{F}_S\left[v^{\alpha}e^{-v^2/2}I_v(av);t\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{\infty}\mathrm{sen}(tv)v^{\alpha}e^{-v/2}I_v(av)dv$$

$$\mathcal{F}_S\left[v^{\alpha}e^{-v^2/2}I_v(av);t\right] = \frac{a^{v}2^{(\alpha-v+1)/2}\Gamma\left(\delta+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(v+1)}t^2e^{-t^2/2}\cdot H_{12}\begin{pmatrix} -\delta; \delta+\frac{1}{2}; \delta+1 & \\ & ; -\frac{a^2}{2}, \frac{-t^2}{2} \\ v+1, \frac{3}{2} & \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Finalmente:

$$\mathscr{F}\left[v^{\alpha}e^{-v^2/2}I_v(av)u_0(v);t\right]=$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(\lambda_1\,(a,\alpha,v;t)+i\,\lambda_2\,(a,\alpha,v;t)). \qquad (32)$$

Moda de V de Rice

En lo que sigue demostraremos que V(a,1,0) es una variable aleatoria unimodal, conjeturando que igual situación se presenta para la v.a V (a,α,γ) con $\alpha \geq 1$, $v \geq 0$.

Teorema 5

La variable aleatoria de Rice es unimodal, y su moda se encuentra entre 1 y $v_1 = \dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$

Demostración:

Derivando (3) resulta:

$$f'_V(v) = e^{-(a^2+v^2)/2}\cdot\theta(v),$$

donde

$$\theta(v) = (1-v^2)I_0(av)+vI_0'(av)\ . \qquad (33)$$

Así mismo, recordando que: $I'_0(av) = aI_1(av)$, tenemos:

$$\theta(v) = (1-v^2)I_0(av)+avI_1(av)\ . \qquad (34)$$

Observemos que: $\theta(1) = a\,I_1(a) > 0$ y como: $I_0(av) > I_1(av)$ (vea [8]), entonces:

$$\theta(v) < (1-v^2+av)\,I_0(av) = \psi(v).$$

Pero $\psi(v) \leq 0$, para $v \geq v_1$,

donde $v_1 = \dfrac{a}{2}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{4}{a^2}}\right)$.

Luego: $\theta(v) < 0$, $\forall v \geq v_1$, de manera que $f_V(v)$ es decreciente en $[v_1, +\infty)$, inclusive $\lim\limits_{v\to+\infty} f_V(v) = 0$. De lo anterior deducimos que existe, $u \in (1, v_1]$ tal que $f'_V(u) = 0$. Demostremos que $f''_V(u) < 0$, para $u > 0$ satisfaciendo:

$$(1-u^2)\,I_0(au) + au\,I_1(au) = 0. \qquad (35)$$

Usando la desigualdad (12) en [7, p.400], tenemos para $a > 1$ que $f''_V(u) < 0$, y si $a \in (0,1]$, también se cumple que: $f''_V(u) < 0$.

Luego en cualquier caso, si $u > 0$ y satisface (35) entonces $f''_V(u) < 0$. Por lo tanto f tiene un solo valor $u > 0$ donde f_V toma valor máximo, pues si (35) tuviera más de una raíz positiva, llegaríamos a un absurdo. Por tanto V es unimodal.

Distribución del producto de dos variables aleatorias independientes tipo V (a, α, v)

En Estadística es común el estudio del comportamiento del producto de dos variables aleatorias independientes con la misma distribución (Vea [9,p.82]).

En esta sección se estudiará el producto de dos variables independientes tipo V (a, α, v) y V(b, β, η); con $a, b > 0$; $\alpha, \beta \geq 1$; $v, \eta \geq 0$.

Teorema 6

Sean X e Y dos variables aleatorias de Rice, tipo (a, α, v) y (b, β, η) respectivamente, entonces $Q = XY$ es una v.a de función de densidad:

$$f_Q(q) = \frac{H.Ke^{-(a^2+b^2)/2}\ a^v b^\eta q^{(\alpha+\beta+v+\eta)/2}}{\Gamma(v+1)\Gamma(\eta+1)2^{v+\eta}}\ .$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a^2q}{4}\right)^n\left(\frac{b^2q}{4}\right)^m}{(v+1)_n(\eta+1)_m\,n!\,m!}\ K_{\frac{\alpha-\beta+v-\eta}{2}+n-m}(q)$$

para $q > 0$

$f_Q(q) = 0$ en otro caso. Donde H y K son la constantes dadas por (8).

Demostración:

De acuerdo a (9) tenemos para $s \in N^*$:

$$E(Q^{s-1}) = E(X^{s-1})\,E(Y^{s-1}) =$$

$$= \frac{H.Ke^{-(a^2+b^2)/2}\ a^v b^\eta q^{(\alpha+\beta+v+\eta+2s-4)/2}\Gamma\left(\frac{s+v+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+\eta+\beta}{2}\right)}{\Gamma(v+1)\Gamma(\eta+1)}$$

$$\cdot\,\Phi\left(\frac{s+\alpha+v}{2};v+1;\frac{a^2}{2}\right)\cdot\Phi\left(\frac{s+\beta+\eta}{2};\eta+1;\frac{b^2}{2}\right)\cdot$$

Desarrollando en serie las funciones Φ y multiplicando, tenemos:

$$E(Q^{S-1}) = \frac{H.Ke^{-(a^2+b^2)/2}\, a^{\nu} b^{\eta} 2^{(\alpha+\beta-\nu-\eta-4)/2}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\eta+1)} \tag{36}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{s}\Gamma\left(\frac{s+\alpha+\nu}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{s+\beta+\eta}{2}+m\right)}{(\nu+1)_n(\eta+1)_m n!m!} \cdot \left(\frac{a^2}{2}\right)^n\left(\frac{b^2}{2}\right)^m$$

De acuerdo a 4.6 en [10, p.136], podemos aplicar la transformada inversa de Mellín, término a término, luego:

$$\mathcal{M}^{-1}\left[E(Q^{s-1});q\right] = f_Q(q) = B\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} T(n,m) \cdot$$

$$\mathcal{M}^{-1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-s}\Gamma\left(\frac{\alpha+\nu+2n}{2}+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+\eta+2m}{2}+\frac{s}{2};q\right)\right] \tag{37}$$

donde

$$B = \frac{H.K.e^{-(a^2+b^2)/2}\; a^{\nu} b^{\eta} q^{(\alpha+\beta-\nu-\eta-4)/2}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\eta+1)} \tag{38}$$

y

$$T(n,m) = \frac{\left(\frac{a^2}{2}\right)^n\left(\frac{b^2}{2}\right)^m}{(\nu+1)_n(\eta+1)_m \cdot n!m!} \tag{39}$$

Por otra parte, tenemos de acuerdo a 5.39 en [11, p.196]:

$$\mathcal{M}^{-1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-s}\Gamma\left(\frac{\alpha+\nu+2n}{2}+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+\eta+2m}{2}+\frac{s}{2};q\right)\right] =$$

$$4\left(\frac{q}{2}\right)^{(\alpha+\nu+\beta+\eta+2n+2m)/2} K_{(\alpha+\nu+2n-\beta-\eta-2m)/2}(q)\,. \tag{40}$$

Luego (37) queda así:

$$f_Q(q) = \frac{H.K.e^{-(a^2+b^2)/2}\; a^{\nu} b^{\eta} q^{(\alpha+\nu+\beta+\eta)/2}}{2^{\nu+\eta}\Gamma(\nu+1)\Gamma(\eta+1)}\,.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a^2 q}{4}\right)^n\left(\frac{b^2 q}{4}\right)^m \cdot K_{(\alpha+\nu+2n+\beta-\eta-2m)/2}(q)}{(\nu+1)_n(\eta+1)_m n!m!} \tag{41}$$

para $q > 0$.

Por otra parte, como $F_Q(q) = P(XY \le q) = 0$ si $q \le 0$, entonces: $f_Q(q) = 0$, cuando $q \le 0$.

Referencias Bibliográficas

1. Haykin, S., "Sistemas de Comunicación". Interamericana S.A. de C.V., México, D.F., 1985.
2. Abramowitz, M. e Stegun, I., "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications, Inc., New York, 1972.
3. Rice, O., Statistical Properties of Random Noise Currents. Bell System Technical Journal, (1945), 46-156.
4. Lebedev, N., " Special Functions and Their Applications". Dover Publications, Inc., New York, 1972.
5. Gradshteyn I. and Ryzhik, I., "Table of Integrals, Serie and Products". Academic Press, New York, 1965.
6. Apostol, Tom, "Análisis Matemático". Edit. Reverté, Barcelona, 1960.
7. Luke, Y., "Mathematical Functions and Their Approximations". Academic Press, New York, 1975.
8. Nåsell, I., Inequalities for modified Bessel function. Math. Comp. 28 (1974) 253-256.
9. Mathai, L and Saxena, S., "The H-function with applications in Statistics and other disciplines ". John Wiley & Sons, Inc., New York, 1978.
10. Slater, L., Generalized Hypergeometric Functions. Cambridge Univ. Press, London, 1966.
11. Oberhettinger, F., "Tables of Mellin Transforms ". Springer-Verlag, Berlin, 1974.

Recibido el 18 de Septiembre de 1995
En forma revisada el 29 de Julio de 1996