Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. Vol. 20, No. 2, 113-120, 1997

Five-dimensional Kaluza-Klein Theory reformulated

Williams Pitter[1] and Mario Choy[2]

[1]*Dpto. de Física, Facultad de Ciencias, Univeridad del Zulia. Maracaibo, Venezuela. Apdo. 526*
[2]*Facultad de Ingeniería, División de Posgrado, Univeridad del Zulia.*
Maracaibo, Venezuela. Apdo. 10482. e-mail: w.prieto@luz.ve

Abstract

This paper presents a reformulation of the five-dimensional Kaluza-Klein theory, taking into consideration the fact that these five dimensions of space-time are present on the tangent bundle of the Principal Bundle (B). This reformulation is possible due to the Lie group U(1) of the fiber which endows B with the structure of a differential manifold, thus allowing the reproduction of parallel transport notions on such a manifold. Through this we achieve a criterion to add extra dimensions to the theory. Once this criterion has been established, a metric is constructed on the tangent bundle of B, which is formed by a metric of space-time plus a connection, i. e., a one-form defined in the fiber of B whose curvature is proportional to the electromagnetic field. Thus, the five-dimensional Einstein action is the sum of the four-dimensional Einstein action and the four-dimensional Maxwell action. This formulation yields the Einstein and Maxwell equations, as well as the Yang-Mills equations.

Key words: Fiber bundles, Kaluza-Klein Theory.

Reformulación de la Teoría de Kaluza-Klein en cinco dimensiones

Resumen

Este trabajo reformula la Teoría 5-dimensional de Kaluza-Klein al considerar que las cinco dimensiones del espacio-tiempo se encuentran en el fibrado tangente del Fibrado Principal. Ello es posible gracias a la estructura de variedad diferencial del fibrado dado por el grupo de Lie U(1) de la fibra. Esto permite, a través de los llamados levantamientos horizontales, reproducir las nociones de transporte paralelo de la variedad riemanniana, tomada como el espacio base. Esta precisión matemática, aparte de corregir las teorías de Kaluza-Klein que suponen que las cuatro dimensiones corresponden a la variedad riemanniana y la quinta (o dimensiones más altas) se encuentran arriba en el fibrado, permite establecer un criterio para añadir dimensiones extras a la teoría. Una vez establecido este criterio se procede a construir una métrica g_{cd} en un fibrado tangente del Fibrado Principal, en donde la acción de Einstein generalizada es la suma de la acción cuadri-dimensional de Einstein y la acción cuadri-dimensional de Maxwell. La métrica estará formada de la métrica del espacio-tiempo $g_{\alpha\beta}$ y una conexión $\overline{A}$, una 1-forma definida en un fibrado B sobre el espacio-tiempo M, cuya curvatura es proporcional al campo electromagnético. Esta formulación permite obtener las acciones de los campos electromagnéticos y de la gravitación a partir de la curvatura de la conexión. Se muestra que la derivación de las ecuaciones de Yang-Mills es directa por una simple sustitución de la curvatura evaluada en el álgebra de Lie.

Palabras clave: Espacios fibrados, Kaluza Klein.

Introducción

Una de las más sorprendentes propuestas que se consideraron en los años veinte para la unificación de los campos electromagnéticos y gravitacionales fue la sugerencia de K. Kaluza y O. Klein acerca de considerar una variedad riemanniana con cinco dimensiones [1]. El propósito original de Kaluza era incrementar el número de dimensiones con el objeto de obtener componentes adicionales del campo, que a su vez representaran el campo electromagnético. Esta propuesta fue capaz de reproducir las leyes dinámicas de la gravitación y del electromagnetismo, pero absolutamente nada más. Lo significante del tratamiento de Kaluza-Klein consistió en dotar el campo electromagnético con cierto significado geométrico.

Posteriormente, los desarrollos de la geometría diferencial y la topología sirvieron de marco para una reformulación de la teoría de Kaluza-Klein de cinco dimensiones y más allá. La observación clave para esta reformulación consiste en que las conexiones y los fibrados (bundles) no están determinados solamente por consideraciones geométricas, sino por condiciones analíticas, ecuaciones diferenciales las cuales, localmente, contienen las componentes de la conexión. Tales ecuaciones diferenciales, como se sabe, envuelven la curvatura [1].

De esta manera, en la teoría de Kaluza-Klein moderna, el campo gravitacional está determinado por una métrica riemanniana en una variedad de dimensión cuatro y el campo electromagnético por un espacio fibrado con una fibra uni-dimensional sobre la variedad. La curvatura de la métrica llega a ser una dos-forma diferencial (justo la gravitación), y la curvatura de la fibra una dos-forma diferencial con valores en la fibra del espacio fibrado (justo el campo electromagnético).

Es pertinente resaltar las diferencias entre ésta formulación y la original de Kaluza-Klein. La teoría primitiva no consideraba al campo electromagnético como un campo de calibre y las cinco dimensiones del espacio-tiempo estaban asignadas completamente a la variedad riemanniana, donde estarían los campos electromagnéticos y gravitacionales.

Así, en la nueva versión el campo electromagnético es descrito como un campo de calibre en términos de la conexión definida en el fibrado principal. Un fibrado principal es simplemente uno en el que la fibra es isomórfica a un grupo (que en el caso electromagnético, el grupo sería el círculo U(1)). Este espacio fibrado, considerado como real y extremadamente pequeño, está sobre la variedad cuadri-dimensional del espacio-tiempo (e independiente de la variedad). Para que el mundo de Kaluza-Klein represente el mundo físico es necesario que se efectúe el producto cartesiano de estos dos espacios [2].

En la teoría clásica de Kaluza-Klein la quinta dimensión se hacía invisible a través de un proceso de reducción dimensional [2]. Esta idea ha obtenido mucha aceptación gracias al concepto de 'compactificación espontánea' [1, 3]; cuyo elemento básico es como sigue: Las teorías de Kaluza-Klein modernas están basadas en la hipótesis de un universo con dimensiones, n, mayores que cinco, donde el número de dimensiones del espacio compacto es mayor que cuatro, es decir, que el espacio-tiempo, M, es de dimensión cuatro y que el espacio compacto, B, es n-4. Así, la llamada compactificación espontánea (la 'fusión de todas las dimensiones') puede ser representada por el producto cartesiano de ambos espacios: $M^4 \times B^{n-4} = M^n$.

El asunto más resaltante de esta investigación es que a diferencia de las teorías de Kaluza-Klein modernas, que consideran una variedad cuadri-dimensional abajo, en el espacio base, y una quinta o una dimensión más alta arriba y considerada como real, en el fibrado principal; este trabajo enfatiza el hecho que las dimensiones totales del espacio-tiempo pueden ser localizadas en el fibrado tangente de la variedad diferencial del fibrado principal. Y este espacio abstracto (el fibrado tangente), a su vez, puede ser considerado como real.

Ello es posible gracias a la estructura de variedad diferencial del fibrado dado por el grupo de Lie U(1) de la fibra. Esto permite, a través de los llamados levantamientos horizontales, reproducir las nociones de transporte paralelo de la variedad riemanniana, tomada como el espacio base.

De esta manera, suponemos simplemente que el espacio-tiempo posee cinco dimensiones y que la acción pueda escindirse en dos partes a saber, la acción de Einstein y la acción de Maxwell. La idea básica para realizar esto consiste en construir una métrica g_{cd} en el fibrado tangente del fibrado principal en donde la acción de Einstein generalizada es la suma de la acción cuadri-dimensional de Einstein y la acción cuadri-dimensional de Maxwell. La métrica estará formada de la métrica del espacio-tiempo $g_{\alpha\beta}$ y una conexión $\overline{A}$, una 1-forma definida en un fibrado B sobre el espacio-tiempo M, cuya curvatura es proporcional al campo electromagnético.

Esta formulación permite obtener las acciones de los campos electromagnéticos y de la gravitación a partir de la curvatura de la conexión. Se muestra que la derivación de las ecuaciones de Yang-Mills es directa por una simple sustitución de la curvatura evaluada en el álgebra de Lie. Aparte de ello, se desarrolla la formulación de la teoría de Kaluza-Klein cinco-dimensional, de una manera más clara y accesible que aquellas que se encuentran en la literatura.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En primera parte se expone los elementos que llevan a considerar que las cinco dimensiones de una teoría de Kaluza-Klein se encuentran en el fibrado tangente del Fibrado Principal. En la segunda parte se desarrolla explícitamente la teoría de Kaluza-Klein en cinco dimensiones. En la última parte se exponen las conclusiones.

Las cinco dimensiones del espacio-tiempo del fibrado principal

La teoría de conexiones se originó a partir del concepto de transporte paralelo en una variedad riemanniana [4]. En general, una conexión en el fibrado lleva una correspondencia entre dos fibras cualquiera de la sección transversal, a lo largo de una curva x (λ) en M. Uno dice que el punto b de la fibra sobre un punto x de la curva es transportado paralelamente a lo largo de la curva por esta correspondencia. Se dice también que la curva e(x (λ)) en B, descrita por el transporte paralelo de b es un levantamiento horizontal (lifting) de la curva x (λ) [3].

Para obtener los levantamientos horizontales de las curvas x (λ) de M se le asocia con cada vector tangente $\dot{x}$ (λ) en cualquiera $x \in M$ y a cada punto b de la fibra $\pi^{-1}(x) = G_x$ un vector tangente $\dot{e}$ (x(λ)) en el fibrado, llamado vector horizontal, el cual se proyecta por π a x(λ). Lo que buscamos es que el transporte paralelo sea compatible con la diferenciabilidad y la estructura de Fibrado Principal de B. Es decir, el mapeo entre T_xM y T_bB debe preservar sus estructuras de vector y ser diferenciable respecto a x. Esto puede ser más claro de la siguiente manera.

Si el Fibrado Principal P con grupo G, es un grupo de Lie, sobre la variedad M, entonces tenemos las siguientes consideraciones. Dado que el grupo de Lie G y la variedad M son estructuras diferenciales, entonces el fibrado B es también una estructura diferenciable [5].

Esto nos permite hablar de fibrados tangentes TB y de fibrados cotangentes T^*B de B. Si se considera TB en cualquier punto b, decimos que en b hay un espacio tangente T_bB. Un subespacio de T_bB es aquel que está constituido por aquellos vectores que son solamente tangentes a la fibra que pasa a través de b. Este subespacio es llamado el subespacio vertical en b y es denotado como V_bB. Junto con este subespacio vertical existe subespacio horizontal H_bB, definido tal que

$$T_bB = V_bB \oplus H_bB$$

Esta ecuación no define H_bB de una manera única. El subespacio horizontal H_bB se puede hacer único al considerar lo que pasa cuando b varía en B. Se requiere entonces que, cuando b_1 cambie a b_2 lo haga según la siguiente regla: b_1 a $b_2 = b_1g$, donde $g \in G$.

Entonces $H_{b_2} = H_{b_1g}$ está relacionado con H_{b_1} por medio de $H_{b_1g} = R_gH_{b_1}$, donde $R_gH_{b_1}$ denota la acción por la derecha sobre H_{b_1} del mapa lineal que es inducido sobre el espacio tangente $T_{b_1}B$ por el mapeo $b_2 = b_1g$ de los elementos de la fibra. Esto significa que uno simplemente puede ir de un espacio horizontal a otro por la acción por la derecha del grupo G [3, 5].

Ahora ya dados estos subespacios horizontales y verticales se puede definir en B la noción de transporte paralelo y de su conexión asociada.

Lo que buscamos por tanto, es que dos levantamientos horizontales $\dot{e}_1$ y $\dot{e}_2$ de una curva x (λ) en M, para la misma conexión pero a través de diferentes puntos b_1 y b_2 en $\pi^{-1}(x)$, estén relacionados por la transformación R_g, la cual lleva b_1 a b_2. Estos requerimientos llevan justo a la definición de conexión en un Fibrado Principal.

En cuanto a la dimensión. En efecto la dimensión del fibrado tangente TB es n+d, donde n es la dimensión del subespacio horizontal (la misma que la variedad) y d es la dimensión del subespacio vertical (la misma dimensión del grupo) [5].

En nuestro caso, el subespacio horizontal tiene dimensión cuatro, dado que estamos trabajando con una cuadri-variedad riemanniana, y la dimensión del subespacio vertical es uno, dado que el grupo con cual deseamos trabajar es el grupo unitario U(1) del electromagnetismo. Por lo tanto la dimensión del fibrado tangente es cinco.

Esto significa que, a diferencia de las teorías de Kaluza-Klein modernas que consideran una variedad cuadri-mensional abajo, en el espacio base, y una quinta o una dimensión más alta arriba y considerada como real, en el Fibrado Principal; este trabajo enfatiza el hecho que las dimensiones totales del espacio-tiempo están totalmente en el fibrado tangente de la variedad diferencial del Fibrado Principal. Y este espacio abstracto (el fibrado tangente), a su vez, puede ser considerado como real.

Todo esto implica que a través de los llamados levantamientos horizontales de las curvas en el espacio base a las curvas en el fibrado, como vimos antes, permite añadir dimensiones extras al fibrado tangente, las cuales a su vez, dependerán del grupo utilizado.

De este modo, podemos considerar que 'arriba', en el Fibrado Principal, está definido una estructura de variedad diferenciable de dimensión cinco, en la cual puede construirse una métrica de modo tal que podamos calcular la curvatura del espacio-tiempo y de allí su respectiva acción. Y esto es justo lo que procederemos a hacer a continuación.

Reformulación de la Teoría de Kaluza-Klein

Una manera de unificar el campo de la gravitación con el campo electromagnético es suponer que el espacio-tiempo posee más de cuatro dimensiones. La dimensión extra, la quinta, no sería vista, no al menos de la manera acostumbrada, y sería de dimensiones infinitesimales [1, 2].

Con el objetivo de unificar la gravedad con el electromagnetismo uno debe exigir que la acción sea la del tipo gravitacional, $\int R d^5\tau$, ahora evaluada en un espacio dimensional mucho más alto y donde R representa la densidad lagrangiana quinta-dimensional.

La idea es suponer simplemente que el espacio-tiempo posee cinco dimensiones, pero esta vez consideradas en el fibrado tangente del Fibrado Principal, y que la acción anterior pueda escindirse en dos partes a saber, la acción de Einstein y la acción de Maxwell. La extensión de estos resultados en lo concerniente a la obtención de la acción de Einstein y la de Yang-Mills es directa. Procederemos a mostrar como se realiza esto para los campos de la gravitación y electromagnéticos.

Básicamente, la idea es construir una métrica g_{cd} en el fibrado tangente del Fibrado Principal, sobre el espacio-tiempo M para el cual la acción de Einstein generalizada es la suma de la acción cuadri-dimensional de Einstein y la acción cuadri-dimensional de Maxwell. La métrica estará formada de la métrica del espacio-tiempo $g_{\alpha\beta}$ y una conexión $\overline{A}$, una 1-forma definida en un fibrado B sobre el espacio-tiempo M, cuya curvatura es proporcional al campo electromagnético.

La construcción es como sigue. Uno requiere que g_{cd} permita que los vectores horizontales sean perpendiculares a los vectores verticales. Así el vector ξ^c es horizontal si $\xi^c \overline{A}_c = 0$. Entonces un vector horizontal puede ser identificado con el vector $\xi^\alpha = \Pi^\alpha_c \xi^c$ sobre M y asignándole la misma longitud. Los vectores verticales v^c son múltiplos del generador η^c del grupo U(1); y al asignarle una longitud constante, ℓ, al campo vectorial η^c, la longitud de cada vector vertical queda automáticamente fijada. La métrica resultante es simplemente:

$$g_{CD} = \ell \overline{A}_C \overline{A}_D + \overline{g}^4_{CD}$$

donde $\overline{g}^4CD$ es el pullback de $g_{\alpha\beta}$ en la variedad M al fibrado B:

$$\overline{g}^4_{CD} = \Pi^{\alpha}_C \Pi^{\beta}_D g_{\alpha\beta} \qquad (2)$$

La prueba es como sigue. Sea ξ^c un vector horizontal y v^c un vector vertical, entonces para el vector ξ^c tenemos que

$$g_{CD}\xi^C\xi^D = 4\overline{g}_{CD}\xi^C\xi^D = g_{\alpha\beta}\xi^C\xi^D$$

y para los vectores verticales v^c

$$\Pi^{\alpha}_C v^C = 0 \; y \; \xi^C \overline{A}_C = 0 \Rightarrow g_{CD}\xi^C v^D = 0$$

Así si $v^C = k\eta^C$, donde k es una constante, entonces es fácil ver que

$$g_{CD} v^C v^D = k\ell^2$$

Esto se puede ver mucho mejor en una carta (η, x^μ). Allí tenemos

$$ds^2 = \ell^2 (d\eta + \overline{A}_\mu dx_\mu)^2 + g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

donde $\overline{A}_\mu$ es proporcional al vector potencial $\overline{A}_\mu$ de tal manera que podemos escribir la siguiente expresión $\ell \overline{A}_\mu = kA_\mu$ (la ℓ está allí para hacer que $d\omega^5 = kdF$).

Vamos a buscar los términos de curvatura en este esquema. Primero, tomemos una base ortonormal ω^μ de las 1-formas en M que pueden ser llevadas (pulled back) a las 1-formas $\overline{\omega}^\mu$ por medio de $\overline{\omega}^\mu \equiv \pi^* \omega^\mu$ en B. Luego usaremos como bases $\hat{\omega}^I$ en B las 1-formas

$$\hat{\omega}^5 = \ell \overline{A} \quad (a), \quad \hat{\omega}^\mu = \overline{\omega}^\mu \quad (b) \qquad (3)$$

Haremos uso de la conmutatividad entre la derivada exterior y el pullback:

$$d(\pi^* \omega) = \pi^* (d\omega) \qquad (4)$$

(1)

válida para cualquier mapa $\pi: B \to M$ y cualquier p-forma en M.

En este esquema la primera ecuación de estructura de Cartan en el fibrado tienen la forma

$$d\hat{\omega}^I = \hat{\omega}^I_J \wedge \hat{\omega}^J \qquad (5)$$

y

$$d\hat{\omega}^5 = \ell\, d\overline{A} = k\,\overline{F} = \tfrac{1}{2} kF_{\mu\nu} \overline{\omega}^\mu \wedge \overline{\omega}^\nu \qquad (6)$$

Esto implica que

$$d\hat{\omega}^5 = -\hat{\omega}^5_\nu \wedge \hat{\omega}^\nu \qquad (7)$$

de donde es obvio que

$$\hat{\omega}^5_\nu = \tfrac{1}{2} kF_{\mu\nu} \overline{\omega}^\mu \qquad (8)$$

También tenemos que

$$\begin{aligned} d\hat{\omega}^\mu &= d\pi^* \omega^\mu = \pi^* d\omega^\mu = -\pi^* (\omega^\mu_\nu \wedge \omega^\nu) = -\overline{\omega}^\mu_\nu \wedge \overline{\omega}^\nu \\ &= -\omega^\mu_I \wedge \omega^I = -\overline{\omega}^\mu_\nu \wedge \overline{\omega}^\nu + (\hat{\omega}^\mu_{\nu 5} - \hat{\omega}^\mu_{5\nu}) \overline{\omega}^\nu \wedge \hat{\omega}^5 \end{aligned}$$

resultando

$$\hat{\omega}^\mu_\nu = \overline{\omega}^\mu_\nu - \frac{1}{2} kF^\mu_\nu \omega^5 \qquad (9)$$

El tensor de Riemann se calcula de la segunda ecuación de estructura de Cartan:

$$\Omega^I_J = d\omega^I_J + \omega^I_J \wedge \omega^K_J \qquad (10)$$

cuyas componentes $\hat{\Omega}^\mu_\nu$ y $\hat{\Omega}^5_\sigma$ son calculadas como sigue.

Las componentes

$$\hat{\Omega}^\mu_\nu = d\hat{\omega}^\mu_\nu + \hat{\omega}^\mu_I \wedge \hat{\omega}^I_\nu \qquad (11)$$

son calculadas de la siguiente manera. Tomemos la derivada exterior a la ecuación (9)

$$d\hat{\omega}^\nu_\mu = d\overline{\omega}^\mu_\nu - \tfrac{1}{2} kd(F^\mu_\nu \omega^5) \qquad (12)$$

aplicando la regla de Leibniz al segundo miembro del lado izquierdo de esta última ecuación

$$\begin{aligned} d\hat{\omega}^{\mu}_{\nu} &= d\overline{\omega}^{\mu}_{\nu} - \tfrac{1}{2}kd(F^{\mu}_{\nu}\overline{\omega}^{5}) \\ &= d\overline{\omega}^{\mu}_{\nu} - \tfrac{1}{2}k\left[\partial_{\sigma}F^{\mu}_{\nu}\overline{\omega}^{\sigma} \wedge \overline{\omega}^{5} - F^{\mu}_{\nu}(\hat{\omega}^{5}_{\lambda} \wedge \overline{\omega}^{\lambda})\right] \\ &= d\overline{\omega}^{\mu}_{\nu} - \tfrac{1}{2}k\left[\partial_{\sigma}F^{\mu}_{\nu}\overline{\omega}^{\sigma} \wedge \overline{\omega}^{5} - F^{\mu}_{\nu}(\tfrac{1}{2}kF_{\alpha\lambda}\overline{\omega}^{\alpha} \wedge \omega^{\lambda})\right] \\ &= d\overline{\omega}^{\mu}_{\nu} - \tfrac{1}{2}k\partial_{\sigma}F^{\mu}_{\nu}\overline{\omega}^{\sigma} \wedge \overline{\omega}^{5} + \tfrac{k^2}{4}F^{\mu}_{\nu}F_{\alpha\lambda}\overline{\omega}^{\alpha} \wedge \overline{\omega}^{\lambda} \end{aligned} \tag{13}$$

El término $\hat{\omega}^{\mu}_{I} \wedge \hat{\omega}^{I}_{\nu}$ puede ser calculado de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \hat{\omega}^{\mu}_{I} \wedge \hat{\omega}^{I}_{\nu} = {}& \hat{\omega}^{\mu}_{\sigma} \wedge \hat{\omega}^{\sigma}_{\nu} - \tfrac{1}{2}kF^{\mu}_{\sigma}\overline{\omega}^{5} \wedge \overline{\omega}^{\sigma}_{\nu} - \tfrac{1}{2}k\overline{\omega}^{\mu}_{\sigma} \wedge F^{\sigma}_{\nu}\hat{\omega}^{5} \\ & - \tfrac{1}{2}k^{2}F^{\mu}_{\sigma}F_{\nu\lambda}\overline{\omega}^{\sigma} \wedge \overline{\omega}^{\lambda} \end{aligned} \tag{14}$$

La ecuación (11) se obtiene por una suma directa las ecuaciones (13) y (14):

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}^{\mu}_{\nu} = {}& \overline{\Omega}^{\mu}_{\nu} + \tfrac{1}{8}k^{2}(F^{\mu}_{\lambda}F_{\nu\sigma} - F^{\mu}_{\sigma}F_{\nu\lambda} - 2F^{\mu}_{\nu}F_{\sigma\lambda})\overline{\omega}^{\sigma} \wedge \overline{\omega}^{\lambda} \\ & - \tfrac{1}{8}k\left[\partial_{\sigma}F^{\mu}_{\nu}\overline{\omega}^{\sigma} - F^{\mu}_{\lambda}\overline{\omega}^{\lambda}_{\nu} + F^{\lambda}_{\nu}\overline{\omega}^{\mu}_{\lambda}\right] \wedge \omega^{5} \end{aligned}$$

La cual puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}^{\mu}_{\nu} = {}& \overline{\Omega}^{\mu}_{\nu} + \tfrac{1}{8}k^{2}(F^{\mu}_{\lambda}F_{\nu\sigma} - F^{\mu}_{\sigma}F_{\nu\lambda} - 2F^{\mu}_{\nu}F_{\sigma\lambda})\overline{\omega}^{\sigma} \wedge \overline{\omega}^{\lambda} \\ & - \tfrac{1}{2}k\nabla_{\sigma}F^{\mu}_{\nu}\overline{\omega}^{\sigma} \wedge \hat{\omega}^{5} \end{aligned} \tag{15}$$

donde ∇_{σ} significa derivada covariante.

El cálculo de $\hat{\Omega}^{5}_{\sigma}$ se realiza de una manera similar, es decir,

$$d\hat{\omega}^{5}_{\sigma} = \tfrac{1}{2}k\partial_{\mu}F_{\sigma\nu}\overline{\omega}^{\mu} \wedge \overline{\omega}^{\nu} - \tfrac{1}{2}kF_{\sigma\nu}\overline{\omega}^{\nu} \wedge \overline{\omega}^{\mu} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \hat{\omega}^{5}_{\mu} \wedge \hat{\omega}^{\mu}_{\sigma} &= \tfrac{1}{2}kF_{\mu\nu}\overline{\omega}^{\nu} \wedge (\overline{\omega}^{\mu}_{\sigma} - \tfrac{1}{2}kF^{\mu}_{\sigma}\hat{\omega}^{5}) \\ &= -\tfrac{1}{2}kF_{\mu\nu}\overline{\omega}^{\mu}_{\sigma} \wedge \overline{\omega}^{\nu} - \tfrac{1}{4}k^{2}F^{\mu}_{\sigma}F_{\mu\nu}\overline{\omega}^{\nu} \wedge \hat{\omega}^{5} \end{aligned} \tag{17}$$

La suma de las ecuaciones (16) y (17) es

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}^{5}_{\sigma} &= \tfrac{1}{2}k\left[\partial_{\sigma}F_{\alpha\nu}\overline{\omega}^{\mu} - F_{\mu\nu}\overline{\omega}^{\mu}_{\sigma} - F_{\sigma\mu}\overline{\omega}^{\mu}_{\nu}\right] \wedge \overline{\omega}^{\nu} - \tfrac{1}{2}k^{2}F^{\mu}_{\sigma}F_{\mu\nu}\overline{\omega}^{\nu} \wedge \hat{\omega}^{5} \\ &= \tfrac{1}{2}\nabla_{\mu}F_{\sigma\nu}\overline{\omega}^{\mu} \wedge \overline{\omega}^{\nu} + \tfrac{1}{4}k^{2}F^{\mu}_{\sigma}F_{\sigma\nu}\hat{\omega}^{5} \wedge \overline{\omega}^{\nu} \\ &= \tfrac{1}{2}\nabla_{\sigma}F_{\mu\nu}\overline{\omega}^{\mu} \wedge \overline{\omega}^{\nu} + \tfrac{1}{4}k^{2}F^{\mu}_{\sigma}F_{\mu\lambda}\hat{\omega}^{5} \wedge \overline{\omega}^{\lambda} \end{aligned} \tag{18}$$

Luego los tensores de Riemann son

$$R^{\ \mu}_{\nu\sigma\lambda} = R^{\ \mu}_{\nu\sigma\lambda} + \tfrac{1}{4}k^{2}(F^{\mu}_{\lambda}F_{\nu\sigma} - F^{\mu}_{\sigma}F_{\nu\lambda} - 2F^{\mu}_{\nu}F_{\sigma\lambda}) \tag{19a}$$

$$R^{\ 5}_{\sigma\mu\nu} = \tfrac{1}{2}k\nabla_{\sigma}F_{\mu\nu} \tag{19b}$$

$$R^{5}_{\sigma5\lambda} = \tfrac{1}{4}k^{2}F^{\mu}_{\sigma}F_{\mu\nu} \tag{19c}$$

y los tensores de Ricci son

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mu\nu} &= R^{\ \sigma}_{\mu\sigma\nu} + R^{\ 5}_{\mu5\nu} \\ &= R_{\mu\nu} + \tfrac{1}{4}k^{2}(F^{\sigma}_{\mu}F_{\nu\sigma} - 2F^{\sigma}_{\nu}F_{\sigma\nu}) + \tfrac{1}{4}k^{2}F^{\mu}_{\sigma}F_{\mu\lambda} \\ &= R_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}k^{2}F^{\sigma}_{\mu}F_{\nu\sigma} \end{aligned} \tag{20a}$$

$$R_{\mu5} = R^{\ \sigma}_{\mu\sigma5} = R^{\ 5\sigma}_{\sigma\mu} = \tfrac{1}{2}k\nabla_{\nu}F^{\mu}_{\nu} \tag{20b}$$

$$R_{55} = \tfrac{1}{4}k^{2}F^{\sigma\lambda}F_{\sigma\lambda} \tag{20c}$$

La curvatura escalar tiene la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= R - \tfrac{1}{2}k^{2}F_{\sigma\lambda}F^{\sigma\lambda} + \tfrac{1}{4}k^{2}F^{\sigma\lambda}F_{\sigma\lambda} \\ &= R - \tfrac{1}{2}k^{2}F_{\sigma\lambda}F^{\sigma\lambda} \end{aligned} \tag{21}$$

Entonces la acción cinco-dimensional es expresada como

$$I = \frac{c^4}{16\pi G}\int \mathcal{R}d^5\tau = \frac{c^4}{16\pi G}\int (R - \tfrac{1}{4}k^{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})d\tau \tag{22}$$

y de esta última ecuación se puede observar que $k^2 = \frac{16\pi G}{c^4}$, de allí que la acción cinco-dimensional se parta como

$$I = \frac{c^4}{16\pi G}\int R d\tau - \tfrac{1}{4}\int F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}d\tau \tag{23}$$

que son las acciones de Einstein y Maxwell, justo lo que deseamos encontrar.

Los resultados anteriores se pueden extender fácilmente para los campos de Yang-Mills escribiendo $F^{a}_{\alpha\beta}$ (o $F^{\alpha\beta}_{a}$) en todos los lugares donde aparezca $F_{\alpha\beta}$ (o $F^{\alpha\beta}$), donde el super-índice 'a' señala que el tensor de Yang-Mills adquiere su valor en el álgebra de Lie. El lagrangiano de Yang-Mills es la generalización natural del lagrangiano del electromagnetismo. Como es usual el lagrangiano de Yang-Mills tiene la siguiente forma:

$$L = -\frac{1}{4}F^{a}_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}_{a},$$

donde, como bien se conoce,

$$F^{a}_{\alpha\beta} = 2\nabla_{[\alpha}A^{a}_{\beta]} + C^{a}_{bc}A^{b}_{\alpha}A^{c}_{\beta}$$

siendo C^a_{bc} las constantes de estructura del grupo.

Entonces, siguiendo la ecuación (23), las respectivas acciones de Einstein y Yang-Mills son

$$I = \frac{c^4}{16\pi G}\int R d\tau - \frac{1}{4}\int F^a_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}_a d\tau.$$

Obteniéndose en forma inmediata la extensión a campos de Yang-Mills. Las ecuaciones de Yang-Mills que generalizan el campo electromagnético. Es decir, las ecuaciones de Yang-Mills llegan a ser las del electromagnetismo para el caso abeliano.

Conclusiones

En este trabajo se resaltó que, en las teorías de Kaluza-Klein las cinco dimensiones no han de considerarse 'separadas', es decir, cuatro en el espacio base de la variedad riemanniana, y la quinta, arriba, en el Fibrado Principal, como generalmente se considera. Esto ha sido corregido, mostrando simplemente que dado la estructura de variedad diferenciable del Fibrado Principal, adquirida a través del grupo de Lie, era entonces posible definir un fibrado tangente cuya dimensión, como ya se mostró, es cinco.

Esta corrección, esencialmente de naturaleza matemática, puede resultar en beneficio de la física. Por ejemplo, si se quiere usar el grupo SU(2) de las construcciones al estilo Yang-Mills, es claro que el número de dimensiones es seis. Esto significa, que considerada la cuadri-variedad riemanniana, es el grupo de Lie usado el que añade las dimensiones extras a la teoría. Esto sirve, a su vez para establecer un criterio en cuanto al número de dimensiones a usar al construir las teorías de Kaluza-Klein.

Como se ha mostrado la formulación de la teoría de Kaluza-Klein cinco-dimensional, en términos de la geometría diferencial moderna, nos suministra un lenguaje más poderoso para re-escribir las ecuaciones de la gravitación y además provee un excelente marco para la descripción del electromagnetismo donde el cuadri-potencial es identificado como una conexión en el Fibrado Principal. De esta manera, la idea de conexión, probablemente la idea fundamental para comprender la estructura geométrica subyacente, no está ya más restringida a la variedad riemanniana [3, 6-8].

Agradecimientos

Los autores de este trabajan desean expresar su agradecimiento a los Profesores J. Ewald y E. López por su ayuda en la redacción del abstract en inglés.

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad del Zulia.

Nomenclaturas

Con respecto a los índices y superíndices: Las letras latinas se refieren a los objetos situados en el Fibrado Principal. Las mayúsculas a los vectores y tensores y las minúsculas a sus respectivas componentes. Los índices griegos están referidos a las componentes de vectores y tensores de la variedad riemanniana del espacio base.

Símbolos:

g: Métrica
ε, η, ν: Vectores
π: Proyección
π^*, Π: Pullbacks
ω: Conexiones
A: Cuadripotencial electromagnético
F: Tensor de campo electromagnético
I: Acción del campo
M: Variedad riemanniana
B: Espacio fibrado
U(1): Grupo unitario
$R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}$: Tensor de Riemann
$R_{\alpha\beta}$: Tensor de Ricci
R: Tensor de curvatura escalar
Ω: Curvatura de Cartan
T_xM: Espacio tangente a la variedad en x
T_bB: Espacio tangente al fibrado en b
TB: Fibrado tangente
T^*B: Fibrado cotangente
V_bB: Subespacio vertical
H_bB: Subespacio horizontal
ds^2: Elemento de línea
d: Derivada exterior
$\wedge$: producto exterior
$\oplus$: Suma geométrica
ℓ: Longitud de la fibra
c: velocidad de la luz

G: Constante de la gravitación
k: constante de acoplamiento

Referencias

1. An introduction to Kaluza Klein Theories, Edited by H. C. Lee., World Scientific Publishing Co. (1984).
2. Maheshwari, A., en Gravitation, Gauge Theory and the Early Universe. Kluwer Academic Publishers (1989), 423.
3. Choquet-Bruhat, Y., De Witt-Morette, C., and Dillard-Bleick, M., Analysis, Manifolds and Physics. Elsevier Science Publishing Company. New York (1991), 6.
4. Dupont, J. L., Lectures Notes in Mathematics. Vol. 640, Springer-Verlag, New York (1979).
5. Nash, C., and Siddartha, S.,Topology and Geometry for Physicists. Academic Press. (1990), 174-176.
6. Beil, R. G.: Moving Frame Transport and gauge Transformations. Found. Phys., Vol. 25, No. 5, (1995), 717-742.
7. Kalinowski, M. W.: Gauge Fields with Torsion. Int. J. Th. Phys., Vol. 20, No. 8, (1981), 563-617.
8. Yuanjie, L.: Theory of Fiber Bundle with local Metric of Internal Space and Gravitation with Torsion. Int. J. Th. Phys., Vol. 32, No. 9, (1993), 1619-1625.

Recibido el 27 de Febrero de 1996
En forma revisada el 30 de Enero de 1997