

# Stability analysis of points in geodetic monitoring networks using the MINQUE method and the weighted similarity transformation

**Eulalio Ortiz, Adonis Marcano, Julio Leal\***

*División de Postgrado, Área Ingeniería Geodésica  
Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia. Apartado 526, Maracaibo 4001-A, Venezuela  
\*Maraven S.A.*

## Abstract

In the analysis of geodetic networks used for monitoring deformations, there are two basic aspects to consider. One is the correct estimation of the weights of the observations, and the other is the correct Datum definition. Not considering these aspects generates biased displacements and consequently, the analysis for the interpretation of the object's deformation will be significantly distorted. Based on the theory of optimization, the MINQUE method permits an optimum estimation of the variance and covariance error model components of the observations in a geodetic network. Based on the theory of projection, the weighted similarity transformation is used to define the Datum of the monitoring network, identifying the points that remain stable between two periods of measurements. The joint application of these two methods permits an optimal estimation of point displacements in geodetic monitoring networks. Their application to a network installed in the Boconó fault in the Boconó District demonstrates the pertinence of their utilization.

**Key words:** Deformation, geodetic monitoring network, error modeling.

## Análisis de estabilidad de puntos en redes geodésicas de monitoreo mediante la aplicación del método MINQUE y la transformación de similaridad ponderada

### Resumen

En el análisis de redes geodésicas para el monitoreo de deformaciones, existen dos aspectos básicos a considerar. Uno de ellos es la estimación óptima de los pesos de las observaciones y el otro es la correcta definición del Datum de la red. La no consideración de estos aspectos genera resultados sesgados en los desplazamientos estimados y consecuentemente, el análisis de estos desplazamientos para interpretar la deformación del objeto estará significativamente distorsionado. El método MINQUE, basado en la teoría de optimización, permite la estimación óptima de las componentes de varianza-covarianza del modelo de error de las observaciones de una red geodésica. Basado en la teoría de proyección, la transformación de similaridad ponderada es utilizada para definir el Datum de la red, identificando los puntos que permanecen estables entre dos épocas de medición. La aplicación conjunta de estos dos métodos permite entonces estimar de una manera óptima los desplazamientos de los puntos en redes geodésicas de monitoreo. Los resultados de su aplicación a una red geodésica instalada para el monitoreo de la falla de Boconó en el sector del Distrito Boconó demuestran lo pertinente de su utilización.

**Palabras clave:** Deformación, red geodésica de monitoreo, modelo de error.



$$\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n)^T = S^{-1}q \quad (3)$$

donde el elemento (i,j) de la matriz  $S_{m \times m}$  es:

$$S_{i,j} = Tr\{R_o T_i R_o T_j\} \quad (4)$$

y el elemento i del vector  $q$  es

$$q_i = I^T R_o T_i R_o I \quad (5)$$

siendo

$$R_o = C_o^{-1} (I - A(A^T C_o^{-1} A)^{-1} A^T C_o^{-1}) \quad (6)$$

siendo  $I$  la matriz identidad.

El procedimiento es iterativo, pues los resultados de la ecuación (6) serán tomados como valores aproximados para un nuevo cálculo. El proceso se continúa hasta que la solución para  $\theta$  converja. En redes geodésicas generalmente la convergencia se obtiene en la segunda o tercera iteración. La matriz de varianza-covarianza de las componentes estimadas es [2]:

$$C(\hat{\theta}) = 2 [S(\hat{\theta})]^{-1} \quad (7)$$

### Detección de observaciones con errores groseros y/o sistemáticos significativos

Una vez estimados con MINQUE los modelos de error de las observaciones se debe realizar la detección de observaciones con errores groseros y/o sistemáticos significativos, según el test Data Snooping [3]:

$$w_i \leq \sqrt{F_{1-\alpha, 1, \infty}} \quad (8)$$

con

$$w_i = \left| \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \right| \quad (9)$$

llamado el residual estandarizado, siendo  $v_i$  y  $\sigma_{v_i}$  el residual y su desviación estándar de la observación i.  $\sigma_{v_i}$  puede ser obtenido de la matriz de covarianza de los residuales o puede ser estimado según [3]:

$$\sigma_{v_i} = \sqrt{\frac{n-u}{n}} \cdot \sigma_i \quad (10)$$

siendo  $n$  el número de observaciones,  $u$  el número de incógnitas y  $\sigma_{v_i}$  la desviación estándar de la observación i, calculada a partir del modelo de error. Según Marcano [3], Baarda sugirió el valor crítico  $\sqrt{F_{1-\alpha, 1, \infty}} = 3.29$  el cual corresponde a un nivel de significancia  $\alpha = 0.001$ , es decir, una probabilidad del 99.9 % quedando (9) como en [3]:

$$W_i \leq 3.29 \quad (11)$$

La observación que no cumpla con (11) tendrá una probabilidad de 99.9% de tener errores groseros y/o sistemáticos significativos y deberá ser eliminada del ajuste.

### Identificación de puntos estables

Cuando se comparan dos campañas de medición, el vector de desplazamiento y su matriz de cofactores se calcula según [4]:

$$d = \hat{x}_2 - \hat{x}_1, \quad Q_d = Q_{x_1} + Q_{x_2} \quad (12)$$

Debido a que los puntos inestables no han sido identificados, los desplazamientos calculados según (12) pueden estar sesgados por haber seleccionado un Datum común para ambas campañas, el cual pudo haber sufrido alteraciones de una campaña a otra, o por utilizar diferentes definiciones de Datum en el ajuste de las dos campañas de medición. Para resolver este problema se puede utilizar [4] la Transformación de Similaridad Ponderada.

Si  $d$  y  $Q_d$  se calculan de (12), la transformación de  $d$  a otro Datum se puede realizar como

$$d_{k+1} = (I - H(H^T W H)^{-1} H^T W) d_k = S_k d_k \quad (13)$$

La forma de la matriz  $H$  depende de la unión de defectos de Datum de la red de monitoreo en las dos campañas. Por ejemplo, si en la primera campaña la red es del tipo triangulación y en la segunda campaña del tipo trilateración, entonces la unión de los defectos de Datum es cuatro y la matriz  $H$  tiene la forma:

$$H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ -Y_1^o & X_1^o & -Y_2^o & X_2^o & \dots & -Y_m^o & X_m^o \\ X_1^o & Y_1^o & X_2^o & Y_2^o & \dots & X_m^o & Y_m^o \end{bmatrix} \quad (14)$$

donde  $X_i^0, Y_i^0$  son las coordenadas del punto  $i$  con respecto al centroide de la red.

La transformación se hace en forma iterativa según

$$d_{i+1} = (I - H(H^T W_i H)^{-1} H^T W_i) d_i \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Para  $i = 0$ ,  $W = I$  y  $d_1$  es la solución de red libre. Para las siguientes iteraciones,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , se le da mayor peso a los desplazamientos menores, dando a la matriz  $W$  la forma

$$W_{ij} = \frac{1}{|d_j + \delta|} \quad (16)$$

siendo  $\delta$  un pequeño valor que se utiliza como criterio de convergencia y que permanece en el denominador de  $W$  para mantener la estabilidad numérica si algunos de los desplazamientos son muy cercanos a cero. La iteración termina cuando la diferencia de los desplazamientos obtenidos entre dos iteraciones sucesivas es menor que  $\delta$ , es decir, cuando  $|d_{i+1} - d_i| \leq \delta$ . El resultado en la iteración  $i = m$  será  $d_m$  con

$$Q_{d_m} = S_m Q_d S_m^T \quad (17)$$

con

$$S_m = (I - H(H^T W_m H)^{-1} H^T W_m) \quad (18)$$

El factor de varianza a posteriori para las dos épocas de medición se calcula según

$$\hat{\sigma}_{a_{1,2}}^2 = \frac{v_1 \hat{\sigma}_{a_1}^2 + v_2 \hat{\sigma}_{a_2}^2}{v_1 + v_2} \quad (19)$$

siendo  $v_1$  y  $v_2$  los grados de libertad de la primera y segunda campaña respectivamente. La matriz de covarianza de los desplazamientos finales será entonces

$$C_{d_m} = \hat{\sigma}_{a_{1,2}}^2 Q_{d_m} \quad (20)$$

De esta matriz de covarianza se extraen las submatrices de covarianza para cada punto de manera que los desplazamientos obtenidos de la transformación de similaridad ponderada pueden ser comparados con su respectiva región de confianza a un cierto nivel de probabilidad, identificando de este modo los puntos inestables de la red, los cuales serán detectados pues sus desplazamientos estarán fuera de la región de confianza.

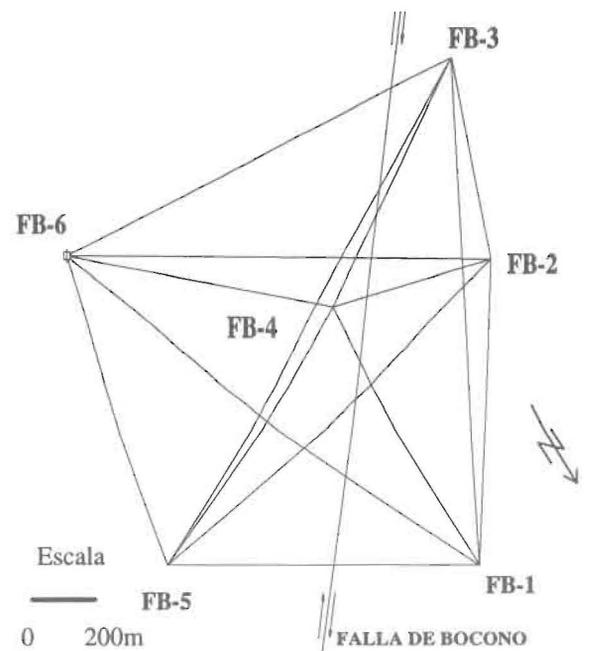


Figura 1. Red de monitoreo Falla de Boconó.

## Resultados

Una red de monitoreo (Fig. 1) fue establecida por la Universidad del Zulia para la determinación de los desplazamientos superficiales de la falla de Boconó en el sector Chandá - Boconó del Distrito (ahora Municipio) Boconó. La red consta de seis puntos situados a ambos lados de la falla. Para la medición angular se utilizaron teodolitos Wild T2 de un segundo y tres series de medición con el método de ángulos independientes. Para la medición de distancias se utilizó el distanciómetro Topcon DMS1 [5,6]. Aunque la red de monitoreo considerada es pequeña (sólo contiene seis puntos) servirá para ilustrar de una manera clara la forma de aplicar los métodos propuestos.

Utilizando el método MINQUE se determinaron las componentes de varianza del modelo de error asumido para las mediciones de la red, el cual es:

$$\sigma_i^2 = \sigma_p^2 + a^2 + b^2 S^2 \quad (21)$$

donde  $\sigma_p^2$  representa la varianza de las mediciones angulares y  $a^2 + b^2 S^2$  representa la varianza de las mediciones de distancia. Los resultados de aplicar MINQUE a las épocas 1988 y 1990 aparecen en la Tabla 1.

Tabla 1  
Componentes de varianza de observaciones en la red Boconó (1988 y 1990)

Época	Modelo de error	$\sigma_{\beta}$ (")	a (mm)	b (ppm)
1988	MINQUE	2.44 (1.59)	11.5 (7.5)	0
1988	Fabricante	2.0 (esperado)	5.0	5.0
1990	MINQUE	1.97 (1.05)	0	40 (25)
1990	Fabricante	2.0 (esperado)	5.0	5.0

Tabla 2  
Detección de observaciones con errores groseros y/o sistemáticos significativos aplicando el Test Data Snooping

Época	Modelo de error	# Observaciones rechazadas	
		Ángulos	Distancias
1988	Fabricante	2	0
1990	Fabricante	0	4
1988	MINQUE	0	0
1990	MINQUE	0	0

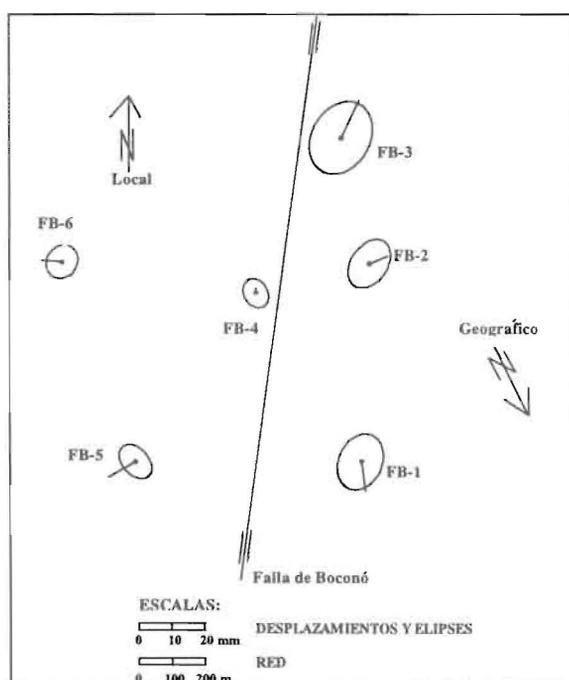


Figura 2. Desplazamientos aparentes de la red Falla de Boconó (épocas 1988-1990) después de la Transformación de Similaridad Ponderada y elipses relativos al 95% de probabilidad.

Los valores entre paréntesis corresponden a la desviación estándar de la componente de varianza estimada con MINQUE.

Posteriormente se aplicó el procedimiento explicado para detectar observaciones con errores groseros y/o sistemáticos significativos, utilizando para el ajuste los modelos de error estimados con MINQUE y los datos por los fabricantes de equipos. Los resultados aparecen en la Tabla 2.

Utilizando los resultados del ajuste separado de las dos épocas en un Datum arbitrario (en este caso se fijaron los puntos FB-5 y FB-6) se aplica la transformación de similaridad ponderada para seleccionar el mejor Datum de la red, definido por los puntos más estables de la misma entre las dos épocas de medición. Los desplazamientos aparentes, después de aplicar la transformación de similaridad ponderada y su respectiva región de coincidencia (elipse de error relativo) al 95% de probabilidad aparecen graficados en la Figura 2.

Para identificar el mejor Datum de la red, se comparan los desplazamientos aparentes obtenidos con la transformación de similaridad ponderada con su respectiva región de confianza (elipse de error). Los desplazamientos que estén dentro de la región de confianza no serán significativos [7], por tanto esos puntos se considerarán estables y serán utilizados para definir el Datum de la red. En la red analizada, los puntos estables resultaron ser FB-4 y FB-2, pues sus desplazamientos aparentes al aplicar la transformación de similaridad ponderada se encuentran dentro de la región de confianza (ver Fig. 2), por lo que ellos serán quienes definan el Datum de la red.

Una vez definido el Datum de la red mediante la transformación de similaridad ponderada se realiza el ajuste de las dos época en dicho Datum. La Figura 3 muestra en forma gráfica los despla-

zamientos obtenidos con su respectiva región de confianza.

## Discusión de Resultados

Se puede observar en la Tabla 1, que para la época 1988, el error angular es un poco mayor que el error esperado para una medición de tres series con teodolito de 1 segundo de apreciación [5], mientras que el error de las distancias es constante, es decir, es independiente de la distancia medida, siendo la componente constante más de dos veces mayor que la dada por el fabricante. Para la época 1990, el error angular es prácticamente igual al error esperado, pero el error de las distancias se hace totalmente dependiente de éstas, es decir, se elimina la componente constante mientras que la componente dependiente de la distancia toma un valor de hasta 8 veces mayor que el dado por el fabricante, lo que indica que las mediciones de distancia en esta época no fueron muy precisas. Esto indica que la calidad de las observaciones no es muy buena existiendo incluso no homogeneidad entre las mediciones de las dos épocas. La diferencia máxima en las coordenadas compensadas al utilizar diferentes modelos de error para cada época (MINQUE y Fabricante) son de 1.0 cm en la época 1988 y 1.7 cm en la época 1990, lo que indica la gran influencia que en el resultado del ajuste tiene el adoptar uno u otro modelo de error, por lo que éste debe ser estimado de una manera óptima para así obtener resultados insesgados en el ajuste.

En la Tabla 2 se puede observar que al aplicar MINQUE para estimar el modelo de error de las observaciones, ninguna observación, en los ajustes de las dos épocas, es rechazada por el test Data Snooping, estando estas libres de errores groseros y/o sistemáticos significativos. Al realizar el ajuste con el modelo de error dado por el fabricante, el test Data Snooping rechazó 2 observaciones (ángulos) en la época 1988 y 4 observaciones (distancias) en la época 1990.

En la red analizada, los puntos estables resultaron ser FB-4 y FB-2, pues sus desplazamientos aparentes al aplicar la transformación de similaridad ponderada se encuentran dentro de la región de confianza (ver Fig. 2). El hecho de que los puntos estables hayan sido detectados a ambos lados de la falla (lo esperado es que, si existen

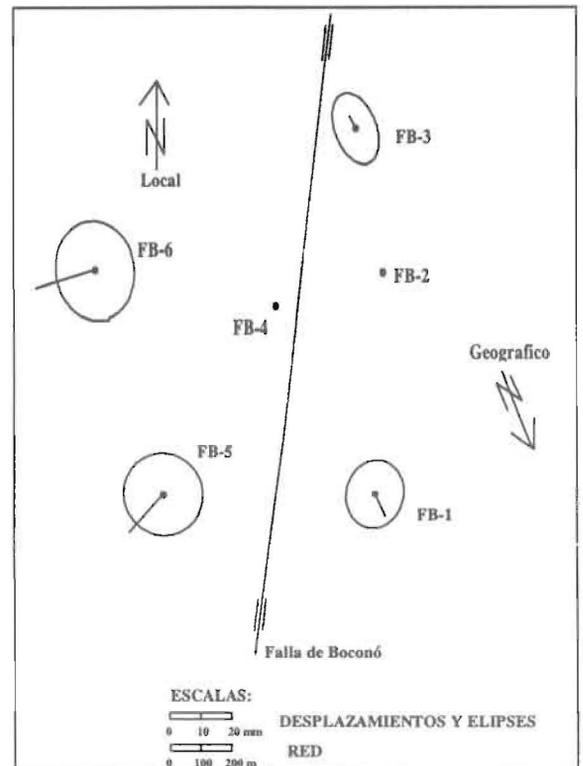


Figura 3. Desplazamientos de los puntos de la red Falla de Boconó (épocas 1988-1990) después de fijar los puntos estables y elipses relativas al 95% de probabilidad.

puntos estables, se encuentren de un solo lado) puede ser debido a que la calidad de las observaciones para ambas épocas no era muy buena, tal como lo indican los resultados de la aplicación del método MINQUE.

En la red analizada solamente los puntos FB-5 y FB-6 presentaron desplazamientos significativos (ver Figura 3). Es de hacer notar que estos puntos fueron considerados inicialmente fijos, para definir el Datum arbitrario de la red, pero al aplicar la transformación de similaridad ponderada, resultó que en realidad los puntos FB-5 y FB-6 no eran estables. Sin embargo, los movimientos detectados son muy pequeños y poco significativos.

## Conclusiones

1.- La estimación óptima de los modelos de error de las observaciones en redes geodésicas de monitoreo es un importante paso que se debe considerar antes de realizar el ajuste de la red. El establecimiento hipotético de ellos inevitablemente sesgará los resultados del ajuste.

2.- El método MINQUE, basado en la teoría de optimización, permite la estimación óptima de los modelos de error de las observaciones de una red geodésica.

3.- Las componentes de varianza - covarianza de los modelos de error estimados con MINQUE son particulares para cada red pues dependen del diseño de estas.

4.- El adoptar sin ningún tipo de análisis el modelo de error de las observaciones que intervienen en el ajuste puede generar incorrectos resultados en la detección de observaciones con errores groseros y/o sistemáticos significativos.

5.- La identificación del mejor Datum es un paso necesario que se debe considerar en el análisis de redes geodésicas de monitoreo pues su establecimiento hipotético inevitablemente distorsionará los desplazamientos obtenidos y el posterior análisis que de ellos se haga.

6.- La transformación de similaridad ponderada permite determinar los puntos estables de una red geodésica de monitoreo entre dos épocas diferentes, los cuales definirán el mejor Datum de la red.

### Nomenclatura

Tr:	Traza de una matriz
$F_{1-\alpha, 1, \infty}$	Valores de la distribución de probabilidad de Fisher.
m:	metros
cm:	centímetros
mm:	milímetros
ppm:	partes por millón
("):	segundos de arco

### Referencias Bibliográficas

1. Rao, C. R. "Estimation of variance and covariance components - MINQUE Theory". *Journal of Multivariate Analysis* 1, pp. 257-275. Indian Statistical Institute. New Delhi. India. 1971.
2. Chen, Y. Q. Chrzanowski, A. Kavouras, M. "Assesment of observations using Minimum Norm Quadratic Estimation (MINQUE)". University of New Brunswick. Department of Surveying Engineering, Fredericton N. B. Canadá. Internal Report. 1988.
3. Marcano, A. "Diseño de una metodología para el post-análisis de redes de triangulación". Universidad del Zulia. Facultad de Ingeniería. División de Posgrado. Maracaibo. 1987.
4. Chen, Y. Q. "Analysis of deformation surveys - A generalized method". University of New Brunswick. Department of Surveying Engineering, Fredericton N. B. Canadá. Technical Report N° 94. 1983.
5. Delgado, N. Quintero, A. "Instalación de una micro-red geodésica de alta precisión para determinar la neotectónica producida por la falla de Boconó en el sector del Dtto. Boconó". Trabajo especial de grado. Universidad del Zulia. Facultad de Ingeniería. Maracaibo. 1989.
6. Peña, T. Flores, I. "Determinación de los desplazamientos superficiales de las micro-redes de alta precisión en el área de la falla de Boconó correspondiente a los sectores Guárico-Sanare Edo. Lara y Chandá-Boconó Edo Trujillo". Trabajo especial de grado. Universidad del Zulia. Facultad de Ingeniería. Maracaibo. 1992.
- 7.- Secord, J. "Implementing the Fredericton Approach to deformation microgeodetic networks analysis". University of New Brunswick. Department of Surveying Engineering, Fredericton N. B. Canadá. 1981.

Recibido el 5 de Septiembre de 1995

En forma revisada el 14 de Marzo de 1997