Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. Vol. 19, No. 1, 23-30, 1996

Integrals with n-fractional differintegrals of trigonometrics functions

Josefina Matera A. y Susana Salinas
Centro de Investigación de Matemática Aplicada (C.I.M.A.)
Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia, Apartado 526
Maracaibo, Venezuela

Abstract

In this work we compute integrals of the form

$$I_1 = \int \frac{\varphi^r(ax)\,dx}{b^2 - x^2} \text{ and } I_2 = \int \frac{(\varphi^r(ax))_v}{b^2 - x^2}\,dx$$

where $\varphi(ax)$ is a trigonometric function $sen(ax)$ or $cos(ax)$ and r is an exponent that has the form $2n$ or $2n$-1 according to the cases, by using the Nishimoto technique in which we compute integrals that contain differintegrals of trigonometric and exponential functions, thus obtaining more general results than those currently found in the literature.

Key words: Integrals, differintegral, trigonometric functions.

Integrales con n-diferintegrales fraccionales de funciones trigonométricas

Resumen

En este trabajo se calculan integrales de la forma

$$I_1 = \int \frac{\varphi^r(ax)\,dx}{b^2 - x^2} \text{ y } I_2 = \int \frac{(\varphi^r(ax))_v}{b^2 - x^2}\,dx$$

donde φ(ax) es una función trigonométrica $sen(ax)$ o $cos(ax)$, y r es un exponente que tiene la forma 2n o 2n-1, según sea el caso, mediante el uso de una técnica empleada por Nishimoto, el cual calcula integrales que contiene diferintegrales de funciones trigonométricas y funciones exponenciales, obteniendo de esta manera resultados más generales que los encontrados en la literatura existente.

Palabras claves: Integrales, diferintegral, función trigonométrica.

Introducción

La teoría del Cálculo Fraccional constituye una de las primeras líneas de investigación en Matemáticas Aplicadas y nace como consecuencia de la necesidad de dar respuesta a la interrogante planteada por la expresión $\frac{d^n y}{dx^n}$ cuando n no es un número entero.

Leibnitz, Lagranje, Lacroix, Abel Liouville, De Morgan y Riemann, fueron algunos de los primeros investigadores que se dieron a la tarea de estudiar este problema.

En este siglo destacados matemáticos han realizado contribuciones importantes, tanto en la teoría como en las aplicaciones del Cálculo Fraccional, entre los cuales podemos mencionar a Erdélyi, Saxena, Kalla, Sneddon, Saigo, Nishimoto, entre otros.

Riemann-Liouville [1, p.6] define la integración fraccional de orden ν como:

$$\cdot_c D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t)\, dt, \quad \nu \geq 0 \tag{1}$$

Erdélyi [2, p.2] define la integración fraccional de orden α como:

$$I_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_o^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt; \quad I_x^{o} f(x) = f(x) \tag{2}$$

$$K_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt; \quad K_x^{o} f(x) = f(x) \tag{3}$$

Extendiendo el teorema de Goursat, Nishimoto [2, p.3] define la derivada fraccional de la función de una sola variable como sigue:

Definición 1

(Derivada). Si f(z) es una función analítica (regular) que no tiene puntos ramales en el interior de $C(= \{\underline{C}, \underset{+}{C}\})$ y sobre C; y

$$f_\nu = (f)_\nu = {}_c(f)_\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \int_c \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{\nu+1}}\, d\xi \quad (\nu \notin Z^-) \tag{4}$$

$$(f)_{-m} = \lim_{\nu \to -m} (f)_\nu + (m \in Z^+)\,. \tag{5}$$

donde $\underline{C}$ y $\underset{+}{C}$ son curvas integrales las cuales son mostradas en la figura 1 y 2 (es decir $\underline{C}$ es una curva sobre el corte que une dos puntos z y $-\infty + iIm(z)$ y $\underset{+}{C}$ es una curva sobre el corte que une dos puntos z y $\infty + iIm(z)$; luego $f_\nu = {}_c f_\nu(z) = \{\cdot_{\underline{C}} f_\nu, {}_{\underset{+}{C}} f_\nu\}$ $(\nu > 0)$, es la derivada fraccional de orden ν de la función $f(z)$ $(\nu \in \mathbb{R}$ y $z \in C)$, si F_ν existe.

Definición 2

(Integral) f_ν $(\nu < 0)$ es la integral fraccional de orden $|\nu|$. Esto es, la derivada de orden fraccional $-\nu$ $(\nu > 0)$ es la integral fraccional ν, si f_ν existe.

Nota 1: Esencialmente, si $f(z)$ es una función regular univaluada dentro de $C(= \{\underline{C}, \underset{+}{C}\})$ y sobre C la diferintegración fraccional $f_\nu(z)$ de la función $f(z)$ puede ser definida según la definición arriba (dentro de $C(= \{\underline{C}, \underset{+}{C}\})$ y sobre C significa que la parte rayada incluye el contorno C, los cuales son mostrados en las Figuras 1 y 2).

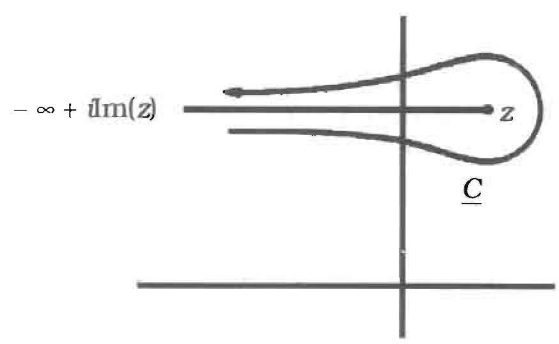

Figura 1.

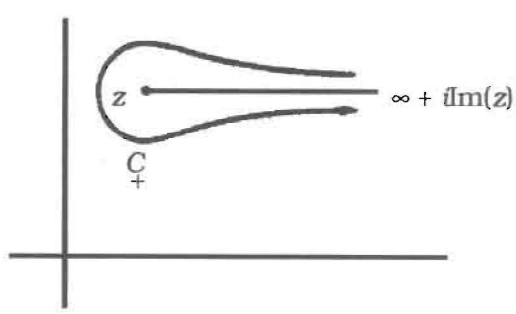

Figura 2.

Nota 2: De manera más amplia, si $f(z)$ es regular excepto en un número finito (o infinitos) de puntos singulares y no hay singularidades dentro de C y sobre C, la $f_v(z)$ puede ser definida de nuevo en la definición.

Nota 3: Si $f(z)$ es una función regular multivaluada definiremos $f_v(z)$ para el valor principal de $f(z)$.

Nota 4: Para el complejo v consideramos el valor principal de v.

En este trabajo se usa el cálculo fraccional de Nishimoto [2,3,4]. En uno de sus trabajos [3, p. 159-185] resuelve integrales de la forma:

$$C(b,a,p)=\int_p^\infty \frac{\cos ax}{b^2-x^2}\,dx=\frac{\cos ab}{2b}\{ci(\lambda_2)-ci(\lambda_1)\}$$

$$-\frac{\operatorname{sen} ab}{2b}\{si(\lambda_2)+si(\lambda_1)\},\quad (a>0,\ 0<b<p) \tag{6}$$

$$S(b,a,p)=\int_p^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{b^2-x^2}\,dx=\frac{\operatorname{sen} ab}{2b}$$

$$\{ci(\lambda_2)-ci(\lambda_1)\}+\frac{\cos ab}{2b}\{si(\lambda_2)+si(\lambda_1)\},$$

$$(a>0,\ 0<b<p) \tag{7}$$

$$C(b,a,p,v)=\int_p^\infty \frac{(\cos ax)_v}{b^2-x^2}\,dx,\quad (a>0,\ 0<b<p)$$

$$=a^v\cos\frac{\pi}{2}v\; C(b,a,p)-a^v\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}v\; S(b,a,p) \tag{8}$$

$$S(b,a,p,v)=\int_p^\infty \frac{(\operatorname{sen} ax)_v}{b^2-x^2}\,dx,\quad (a>0,\ 0<b<p)$$

$$=a^v\cos\frac{\pi}{2}v\; S(b,a,p)-a^v\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}v\; C(b,a,p) \tag{9}$$

$\lambda_1=a(b+p)$, $\lambda_2=-a(b-p)$ y

$$ci(\lambda_k)=-\int_{\lambda_k}^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt\quad (k=1,2)\ \text{coseno integral} \tag{10}$$

$$si(\lambda_k)=-\int_{\lambda_k}^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\quad (k=1,2)\ \text{seno integral} \tag{11}$$

donde $(\cos bx)_v$ y $(\operatorname{sen} bx)_v$ son los diferintegrales fraccionales de orden v (con respecto a x) de las funciones $\cos bx$ y $\operatorname{sen} bx$ respectivamente.

Siguiendo un procedimiento análogo al utilizado por Nishimoto en [4, p. 159-185] se resuelven integrales de la forma.

$$I_1=\int\frac{\varphi^r(ax)}{b^2-x^2}\,dx \ \text{ y }\ I_2=\int\frac{(\varphi^r(ax))_v}{b^2-x^2}\,dx$$

siendo r un exponente que puede ser $2n$ ó $2n-1$, según sea el caso, y $(\varphi^r(ax))_v$ el diferintegral fraccional de potencias de las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}^r ax$ y $\cos^r ax$, obteniendo de esta manera resultados más generales.

Sobre integrales de la forma I_1

Lema. Sea $a>0$, $0<b<p$ y $n\in Z^+$

$$C^{2n-1}_{(b,a,p)}=\int_p^\infty\frac{\cos^{2n-1}ax}{b^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}$$

$$\left\{\frac{\cos[(2n-(2k+1))ab]}{b}[ci(\lambda_2)-ci(\lambda_1)]-\right.$$

$$\left.-\frac{\operatorname{sen}[(2n-(2k+1))ab]}{b}.[si(\lambda_2)+si(\lambda_1)]\right\} \tag{12}$$

$$S^{2n-1}_{(b,a,p)}=\int_p^\infty\frac{\operatorname{sen}^{2n-1}ax}{b^2-x^2}\,dx=\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n-1}{k}.$$

$$\cdot\left\{\frac{sen\,[(2n-(2k+1))ab]}{b}\,[ci(\lambda_2)+ci(\lambda_1)]\right.$$

$$\left.+\frac{\cos[(2n-(2k+1))ab]}{b}\cdot[si(\lambda_2)-si(\lambda_1)]\right\},$$

para

$$\lambda_1=(2n-(2k+1))\,a(b+p);\ \lambda_2=-(2n-(2k+1))\,a(b-p). \quad (13)$$

$$C^{2n}_{(b,a,p)}=\int_p^\infty\frac{\cos^{2n}ax}{b^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{b2^{2n+1}}\binom{2n}{n}Ln\left(\frac{a+p}{a-p}\right)$$

$$+\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\left\{\frac{\cos[(2n-2k)ab]}{b}\,[ci(\lambda_2)-ci(\lambda_1)]\right.$$

$$\left.-\frac{sen[(2n-2k)ab]}{b}\,[si(\lambda_2)+si(\lambda_1)]\right\} \quad (14)$$

$$S^{2n}_{(b,a,p)}=\int_p^\infty\frac{sen^{2n}ax}{b^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{b2^{2n+1}}\binom{2n}{n}Ln\left(\frac{a+p}{a-p}\right)$$

$$+\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\binom{2n}{k}\left\{\frac{sen[(2n-2k)ab]}{b}\right.\cdot$$

$$\left.[ci(\lambda_1)+ci(\lambda_2)]+\frac{\cos[(2n-2k)ab]}{b}\,[si(\lambda_2)+si(\lambda_1)]\right\}$$

para

$$\lambda_1=(2n-2k)\,a(b+p);\ \lambda_2=-(2n-2k)\,a(b-p). \quad (15)$$

Demostración de 12:

Del resultado [5, p.26]

$$C^{2n-1}ax=\frac{1}{2^{2n-2}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\cos[(2n-(2k+1))ax] \quad (16)$$

se tiene que

$$\int_p^\infty\frac{\cos^{2n-1}ax}{b^2-x^2}\,dx=$$

$$=\int_p^\infty\frac{\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\cos[(2n-(2k+1))ax]\,dx}{b^2-x^2}$$

Intercambiando el orden de integración y suma

$$\int_p^\infty\frac{\cos^{2n-1}ax}{b^2-x^2}\,dx=$$

$$\frac{1}{2^{2n-2}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\int_p^\infty\frac{\cos[(2n-(2k+1))ax]}{b^2-x^2}\,dx \quad (17)$$

usando el resultado (6) en (17) con $a=(2n-(2k+1))a$

$$\int_p^\infty\frac{\cos^{2n-1}ax}{b^2-x^2}\,dx=$$

$$\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\left\{\frac{\cos[(2n-(2k+1))ab]}{b}\right.\cdot$$

$$\left.\cdot\,[ci(\lambda_2)-ci(\lambda_1)]-\frac{sen[(2n-(2k+1))ab]}{b}\,[si(\lambda_2)+si(\lambda_1)]\right\}$$

Para las demostraciones de (13), (14) y (15) se sigue un procedimiento similar al anterior, utilizando las fórmulas (6) y (7).

Algunas relaciones para las integrales de la forma I_1

Bajo las mismas condiciones usadas en los lemas se cumplen las siguientes propiedades:

a) Haciendo $ab=m\pi$ $(m\in Z^+)$ en (12) y (13) resulta

$$C^{2n-1}_{(b,a,p)}=\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\frac{(-1)^m}{b}\,[ci(\lambda_2)-ci(\lambda_1)] \quad (18)$$

$$S^{2n-1}_{(b,a,p)} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} \frac{(-1)^{k+m}}{b} \left[si(\lambda_2) - si(\lambda_1)\right]$$

para $a = \frac{m\pi}{b}$. (19)

b) Para $ab = (m + 1/2)\pi$ $(m \in Z^+ \, U\{0\})$ en (12) y (13)

$$C^{2n-1}_{(b,a,p)} = -\frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{m+n-k+1}}{b} \binom{2n-1}{k} \cdot$$

$$\cdot \left[si(\lambda_2) + si(\lambda_1)\right] \quad (20)$$

$$S^{2n-1}_{(b,a,p)} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{n} \frac{(-1)^{m+n+1}}{b} \left[ci(\lambda_2)+ci(\lambda_1)\right]$$

para $a = \frac{(m+1/2)\pi}{b}$. (21)

c) Tomando $ab = m\pi$ en (14) y (15) se infieren las siguientes fórmulas

$$C^{2n}_{(b,a,p)} = -\frac{1}{b2^{2n+1}} \binom{2n}{n} \ln\left(\frac{a+p}{a-p}\right) + \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \frac{1}{b} \cdot$$

$$\cdot \left[ci(\lambda_2) - ci(\lambda_1)\right] \quad (22)$$

$$S^{2n}_{(b,a,p)} = -\frac{1}{b2^{2n+1}} \binom{2n}{n} \ln\left(\frac{a+p}{a-p}\right) + \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \cdot$$

$$\cdot \binom{2n}{k} \frac{1}{b} \left[si(\lambda_2) - si(\lambda_1)\right]$$

para $a = \frac{m\pi}{b}$ (23)

d) Si $ab = (m + 1/2)\pi$ en (14) y (15)

$$C^{2n}_{(b,a,p)} = -\frac{1}{b2^{2n+1}} \binom{2n}{n} \ln\left(\frac{a+p}{a-p}\right) - \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cdot$$

$$\cdot \frac{(-1)^{n-k}}{b} \left[si(\lambda_2) + si(\lambda_1)\right] \quad (24)$$

$$S^{2n}_{(b,a,p)} = -\frac{1}{b2^{2n+1}} \binom{2n}{n} \ln\left(\frac{a+p}{a-p}\right) + \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cdot$$

$$\cdot \frac{(-1)^{2n-2k}}{b} \left[si(\lambda_2) + si(\lambda_1)\right]$$

para $a = \frac{(m+1/2)\pi}{b}$. (25)

Sobre integrales de la forma I_2

En esta sección se evalúan integrales que contienen diferintegrales de funciones trigonométricas representadas por $\varphi(ax)$, siendo ésta una función *sen ax* o *cos ax* y r es $2n$ o $2n$-1 según sea el caso.

Teorema. Sea $\nu > 0$, $a > 0$, $0 < b < p$ y $n \in Z^+$, entonces se tiene:

$$C^{2n-1}_{(b,a,p,\nu)} = \int_p^{\infty} \frac{(\cos^{2n-1} ax)_\nu}{b^2 - x^2} dx =$$

$$\frac{a^\nu}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} (2n - (2k+1))^\nu \cdot$$

$$\cdot \left\{ \cos\frac{\pi}{2}\nu \; C(b,(2n-(2k+1))a,p) - \right.$$

$$\left. sen\frac{\pi}{2}\nu \; S(b,(2n-(2k+1))a,p) \right\} \quad (26)$$

$$S^{2n-1}_{(b,a,p,\nu)} = \int_p^{\infty} \frac{(sen^{2n-1} ax)_\nu}{b^2 - x^2} dx =$$

$$\frac{(-1)^{n-1} a^\nu}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n-1}{k} (2n - (2k+1))^\nu \cdot$$

$$\cdot \left\{ \cos\frac{\pi}{2}\nu \; S(b.(2n-(2k+1))a,p) + \right.$$

$$\left. sen\frac{\pi}{2}\nu \; C(b,(2n-(2k+1))a,p) \right\} \quad (27)$$

$$C^{2n}_{(b,a,p,\nu)} = \int_p^{\infty} \frac{(\cos^{2n} ax)_\nu}{b^2-x^2}\, dx =$$

$$\frac{a^\nu}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} (2n-2k)^\nu \,.$$

$$.\left\{ \cos\frac{\pi}{2}\nu\; C(b,(2n-2p)a,p) - \right.$$

$$\left. \frac{sen\pi}{2}\nu\; S(b,(2n-2k)a,p) \right\} \qquad (28)$$

$$S^{2n}_{(b,a,p,\nu)} = \int_p^{\infty} \frac{(sen^{2n} ax)_\nu}{b^2-x^2}\, dx =$$

$$\frac{(-1)^n a^\nu}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} (-1)^k (2n-2k)^\nu \,.$$

$$.\left\{ \cos\frac{\pi}{2}\nu\; C(b,(2n-2k)a,p) - \right.$$

$$\left. sen\frac{\pi}{2}\nu\; S(b,(2n-2k)a,p) \right\} \qquad (29)$$

Demostración de (26):

Del resultado [6, p.47]

$$(\cos^{2n-1} ax)_\nu = \frac{a^\nu}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} (2n-(2k+1))^\nu \,.$$

$$.\cos\left[(2n-(2k+1))ax + \frac{\pi}{2}\nu \right] \qquad (30)$$

entonces

$$\int_p^{\infty} \frac{(\cos^{2n-1} ax)_\nu}{b^2-x^2}\, dx =$$

$$\int_p^{\infty} \frac{\frac{a^\nu}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} (2n-(2k+1))^\nu . \cos\left[(2n-(2k-1))ax + \frac{\pi}{2}\nu\right] dx}{b^2-x^2}$$

Intercambiando el orden de integración y suma

$$\int_p^{\infty} \frac{(\cos^{2n-1} ax)_\nu}{b^2-x^2}\, dx = \frac{a^\nu}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} (2n-(2k+1))^\nu \,.$$

$$\int_p^{\infty} \frac{\cos[(2n-(2k+1))ax + \frac{\pi}{2}\nu]\, dx}{b^2-x^2}$$

$$= \frac{a^\nu}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} (2n-(2k+1))^\nu \left\{ \cos\frac{\pi}{2}\nu \,. \right.$$

$$.\int_p^{\infty} \frac{\cos[(2n-(2k+1))ax]}{b^2-x^2}\, dx - sen\frac{\pi}{2}\nu \,.$$

$$\left. .\int_p^{\infty} \frac{sen[(2n-(2k+1))ax]}{b^2-x^2}\, dx \right\} \qquad (31)$$

Sustituyendo los resultados (6) y (7) en (31), con $a = (2n-(2k+1))a$, $\lambda_1 = (2n-(2k+1))a(b+p)$ y $\lambda_2 = -(2n-(2k+1))a(b-p)$;

$$\int_p^{\infty} \frac{(\cos^{2n-1} ax)_\nu}{b^2-x^2}\, dx = \frac{a^\nu}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} (2n-(2k+1))^\nu \,.$$

$$.\left\{ \cos\frac{\pi}{2}\nu\; C(b,(2n-(2k+1))a,p) - sen\frac{\pi}{2}\nu \,. \right.$$

$$\left. \cdot\, S(b,(2n-(2k+1))a,p) \right\}$$

Para las demostraciones de (27), (28) y (29) se sigue un procedimiento similar al anterior, en donde de [6, p.46-48] se tiene que:

$$(sen^{2n-1} ax)_\nu = \frac{(-1)^{n-1} a^\nu}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n-1}{k} \,.$$

$$.\,(2n-(2k+1))^\nu\, sen\left((2n-(2k+1))ax + \frac{\pi}{2}\nu \right) \qquad (32)$$

$$(\cos^{2n} ax)_\nu = \frac{a^\nu}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} (2n-2k)^\nu .$$

$$\cos\left[(2n-2k)ax + \frac{\pi}{2}\nu\right] \qquad (33)$$

$$(\mathrm{sen}^{2n} ax)_\nu = \frac{(-1)^n a^\nu}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} (-1)^k (2n-2k)^\nu .$$

$$.\ \cos\left[(2n-2k)ax + \frac{\pi}{2}\nu\right] \qquad (34)$$

Casos Particulares

A continuación se presentan algunos casos particulares obtenidos de los teoremas antes mencionados:

a) Tomando $n = 2$ en (26) y (27), resulta:

$$C^3_{(b,a,p,\nu)} = \frac{a^\nu}{4}\left\{\cos\frac{\pi}{2}\nu\,[3^\nu C(b,3a,p)+3\,C(b,a,p)] - \right.$$

$$\left. - \mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\nu\,[3^\nu S(b,3a,p) + 3\,S(b,a,p)]\right\} \qquad (35)$$

$$S^3_{(b,a,p,\nu)} = \frac{a^\nu}{4}\left\{\cos\frac{\pi}{2}\nu\,[3\,C(b,a,p)-3^\nu C(b,3a,p)] + \right.$$

$$\left. + \mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\nu\,[3^\nu S(b,3a,p) - 3\,S(b,a,p)]\right\} \qquad (36)$$

b) Si $n = 2$ en (28) y (29) se obtiene:

$$C^4_{(b,a,p,\nu)} = \frac{a^\nu 2^\nu}{8}\left\{\cos\frac{\pi}{2}\nu[2^\nu C(b,4a,p)+4C(b,2a,p)] - \right.$$

$$\left. - \mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\nu\,[2^\nu S(b,4a,p) - 4\,S(b,2a,p)]\right\} \qquad (37)$$

$$S^4_{(b,a,p,\nu)} = \frac{a^\nu 2^\nu}{8}\left\{\cos\frac{\pi}{2}\nu[2^\nu C(b,4a,p)-4C(b,2a,p)] + \right.$$

$$\left. + \mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\nu\,[-2^\nu S(b,4a,p) + 4\,S(b,2a,p)]\right\} \qquad (38)$$

Otras Integrales

Seguidamente se presentan algunos resultados obtenidos de aplicar el diferintegral de funciones trigonométricas a integrales tomadas de las tablas de Series y Productos de Gradshteyn [5, p.406 - 408].

De [2, p. 21 - 22] se tienen los siguientes resultados:

$$(\cos az)_\nu = a^\nu \cos\left(az + \frac{\pi}{2}\nu\right) \text{ para } a \neq 0\ (z,\nu \in C) \quad (39)$$

$$(\mathrm{sen}\, az)_\nu = a^\nu \mathrm{sen}\left(az + \frac{\pi}{2}\nu\right) \text{ para } a \neq 0\ (z,\nu \in C) \quad (40)$$

se obtiene entonces:

$$\int_o^\infty \frac{(\cos ax)_\nu}{b^4 - x^4}\,dx = \frac{a^\nu \pi}{4b^3}\,[e^{-ab} + \mathrm{sen}(ab)]\,\cos\frac{\pi}{2}\nu -$$

$$-\frac{a^\nu}{4b^3}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\nu\left[-2\,\mathrm{sen}(ab)\,ci(ab) - 2\cos(ab)\,.\right.$$

$$\left.\cdot\left(si(ab) + \frac{\pi}{2}\right) + e^{-ab}\,\overline{Ei}\,(ab) - e^{ab}Ei(-ab)\right]$$

$$[a > o,\ b > o] \qquad (41)$$

$$\int_o^\infty \frac{(\mathrm{sen}\, ax)_\nu}{b^4 - x^4}\,dx = \frac{a^\nu}{4b^3}\cos\frac{\pi}{2}\nu\,.$$

$$\left[2\,\mathrm{sen}(ab)\,ci(ab) - 2\cos(ab)\left(si(ab) + \frac{\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + e^{-ab}\,\overline{Ei}\,(ab) - e^{ab}Ei(-ab)\right] + \frac{a^\nu \pi}{4b^3}\,.$$

$$\left[e^{-ab} + \mathrm{sen}(ab)\right]\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\nu,\ [a > o,\ b > o] \qquad (42)$$

$$\int_o^\infty \frac{(\mathrm{sen}\, ax)_\nu}{\beta^2 - x^2}\,dx = \frac{a^\nu}{2\beta^3}\cos\frac{\pi}{2}\nu\,.$$

$$.\left[e^{-a\beta}\,\overline{Ei}\,(a\beta) - e^{a\beta}\,Ei(-a\beta)\right] + \frac{a^\nu \pi}{2\beta}\,e^{-a\beta}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\nu$$

$[a > o,\ \mathrm{Re}\beta > o]$ (43)

$$\int_o^\infty \frac{(\cos ax)_\nu}{\beta^2 + x^2}\, dx = \frac{a^\nu \pi}{2\beta}\, e^{-a\beta} \cos \frac{\pi}{2} \nu - \frac{a^\nu}{2\beta} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \nu \,.$$

$$\cdot \left[e^{-a\beta}\, \overline{Ei}\,(a\beta) - e^{a\beta}\, Ei(-a\beta) \right]$$

$[a > o,\ \mathrm{Re}\beta > o]$ (44)

en donde $Ei\,(x)$ es la función integral exponencial [5, p. 925].

Agradecimiento

Agradecemos al C.O.N.D.E.S., de L.U.Z., el soporte económico brindado para la realización de este trabajo.

Referencias Bibliográficas

1. Ross, B. (ed), Fractional Calculus and its Applications, Lecture Notes in Math. 457 (Proc. of a conf. New Haven, 1974), Springer - Verlag Berlin/Heidelberg/New York, 1975.
2. Nishimoto, K.: Fractional Calculus. Integration and Differentiation of Arbitrary Order. Copyright (March), by Descartes Press Co. Vol. I (1984).
3. Nishimoto, K.; Sekine, T. and Taguchi, Y.: On certain singular integrals containing fractional differintegrated trigonometric functions, Research Notes in Math. 138 (1985) 154-163.
4. Nishimoto, K.: Fractional Calculus. Integration and Differentiation of Arbitrary Order. Copyright (March), by Descartes Press Co. Vol. II (1987).
5. Gradshteyn, I.S.: Table of Integrals, Series and Products. Academic Press. New York, 1965.
6. Salinas, S.: Cálculo Fraccional de Nishimoto y sus Aplicaciones. Trabajo Especial de Ascenso. Universidad del Zulia, 1994.

Recibido el 21 de Marzo de 1995
En forma revisada el 28 de Septiembre de 1995