

Dynamic amplification factor for torsional effects according to the Covenin 1756-82 code

Gustavo Arias Alban

*Asociación Venezolana de Ingeniería Estructural. Colegio de Ingenieros de Venezuela
Caracas, Venezuela*

Abstract

The Venezuelan seismic building code (Covenin 1756 - 82) stipulates the use of dynamic amplification factors applied to torsional effects, but does not derive the values of these factors by means of formulae or analytical methods. A calculation procedure for these factors, based on a modal analysis of single-story buildings with a single axis of symmetry in its plant and movement perpendicular to this axis, is presented. The intent of this method is to facilitate the application of the code provisions by means of a simple procedure which can be included in any conventional seismic analysis program.

Key words: Covenin, Seismic Building Code, torsion.

El factor de amplificación dinámica de la torsión según la norma Covenin 1756 - 82

Resumen

La Norma Venezolana para Edificaciones Antisísmicas estipula el uso de factores de amplificación dinámica de la torsión sin definir su valor mediante alguna formulación o método analítico. En este artículo se presenta un procedimiento de cálculo de tales factores, basado en el análisis dinámico modal de edificios de un piso con planta simétrica respecto a un eje y movimiento en dirección normal a dicho eje. Se intenta, de esta manera, facilitar la aplicación de la Norma mediante un procedimiento sencillo que puede incluirse en cualquier programa de análisis sísmico convencional.

Palabras claves: Covenin, Norma de Edificaciones Antisísmicas, torsión.

Introducción

La Norma Venezolana para Edificaciones Antisísmicas [1], recomienda coeficientes variables de amplificación dinámica para el cálculo de la torsión estática equivalente, con valores de 1.5, 3 ó 5, de acuerdo con la distribución de rigideces en la estructura. Como alternativa se permite el uso de los gráficos de Kan y Chopra [4], reproducidos en los comentarios de la Norma.

La elección de uno de los coeficientes mencionados es un tanto subjetiva; no se definen criterios claros para su selección ni se especifica

el uso de valores intermedios. El empleo de los ábacos, por otra parte, complica el cálculo numérico computarizado.

En el presente trabajo se propone un procedimiento de cálculo de dichos factores que puede incluirse fácilmente en el análisis matricial convencional. A tal objeto, se define primero el factor de amplificación dinámica para espectros de aceleración constante, según el procedimiento expuesto por Elorduy y Rosenblueth [2], y luego se describe la forma de incluirlo en el análisis matricial desarrollado por el autor en la referencia [6].

El factor de amplificación dinámica

En la Fig. 1 se muestra la planta de una estructura de 1 piso y de masa m . Los ejes de referencia x - y pasan por el centro de rigidez; el centro de masas se supone ubicado en el centro geométrico de la planta y el eje "x" es un eje de simetría. En estas condiciones, la fuerza cortante y el momento torsor se acoplan cuando el movimiento se produce en la dirección "y". El análisis se realiza respecto al centro de masas a fin de obtener una matriz diagonal de masas.

Sean:

- k_y = rigidez lateral en la dirección "y"
- k_z = rigidez torsional respecto al centro de rigidez
- k_t = rigidez torsional respecto al centro de masas
- e_x = excentricidad
- J = momento de inercia polar de la masa
- w = frecuencia acoplada.

La rigidez torsional respecto al centro de masas (CM), es:

$$k_t = k_z + e_x^2 \cdot k_y \tag{1}$$

la ecuación de movimiento del sistema, queda:

$$\begin{vmatrix} k_y - w^2 \cdot m & -e_x \cdot k_y \\ -e_x \cdot k_y & k_t - w^2 \cdot J \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ z \end{vmatrix} = 0$$

y la ecuación de frecuencias, anulando el determinante de la matriz, resulta:

$$(k_y - w^2 \cdot m)(k_t - w^2 \cdot J) - (e_x \cdot k_y)^2 = 0 \tag{2}$$

Aceptando las conocidas definiciones:

radio elástico:

$$r_s^2 = k_t / k_y \tag{3}$$

radio de giro de la masa:

$$r_o^2 = J / m \tag{4}$$

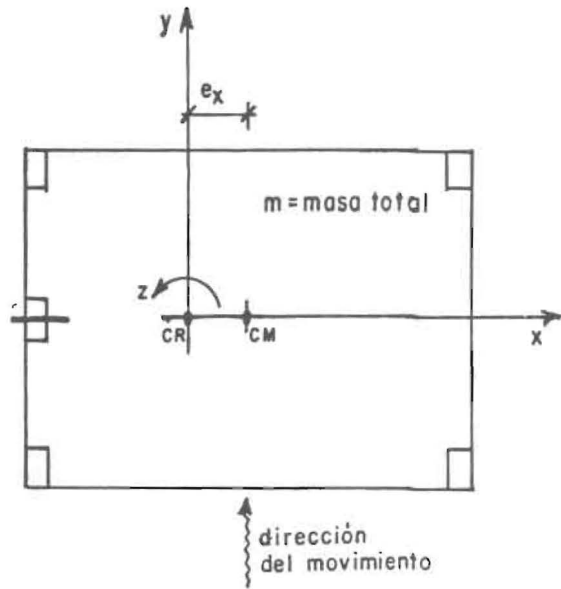


Figura 1. Planta de la estructura de un piso.

frecuencia lateral desacoplada:

$$w_y^2 = k_y / m \tag{5}$$

y adoptando las siguientes relaciones adimensionales:

$$\rho = (r_s / r_o)^2 \tag{6}$$

$$\beta = (e_x / r_o)^2 \tag{7}$$

$$\lambda = (w / w_y)^2 \tag{8}$$

la ecuación (2) queda:

$$\lambda^2 - \lambda(1 + \rho) - (\beta - \rho) = 0 \tag{9}$$

cuyas raíces son:

$$\lambda_1 = 1/2(1 + \rho) - \sqrt{1/4(1 - \rho)^2 + \beta} \tag{9a}$$

$$\lambda_2 = 1/2(1 + \rho) + \sqrt{1/4(1 - \rho)^2 + \beta} \tag{9b}$$

con lo cual se obtiene, para el modo "1":

vector modal, normalizado a la primera coordenada:

$$\begin{vmatrix} y_t \\ z_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ (1 - \lambda_1) / e_x \end{vmatrix} \tag{10}$$

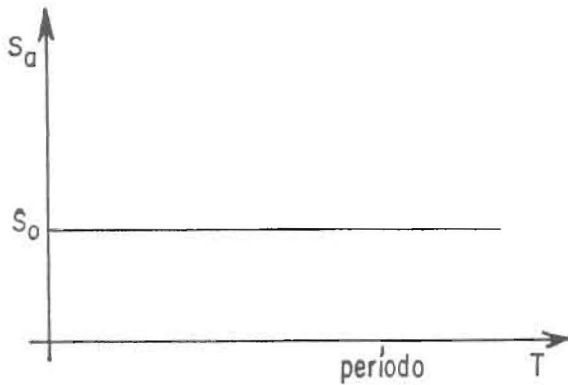


Figura 2. Espectro de aceleración constante.

factor de participación modal:

$$F_i = \frac{\beta}{\beta + (1 - \lambda_i)^2} \quad (11)$$

Con un espectro de aceleración constante, como el que se muestra en la Fig. 2, de ordenada espectral S_0 .

Se obtiene:

cortante modal:

$$V_i = S_0 \cdot m \cdot F_i \cdot y_i \quad (12)$$

momento de torsión modal, respecto al centro de masas:

$$M_i = S_0 \cdot J \cdot F_i \cdot z_i \quad (13)$$

momento de torsión modal, respecto al centro de rigidez:

$$T_i = M_i + V_i \cdot e_x \quad (14)$$

Reemplazando valores, resulta:

$$V_i = S_0 \cdot m \cdot \eta_i \quad (15)$$

$$T_i = S_0 \cdot m \cdot e_x \cdot \mu_i \quad (16)$$

en las que

$$\eta_i = \frac{\beta}{\beta + (1 - \lambda_i)^2} \quad (17)$$

$$\mu_i = \frac{\beta + (1 - \lambda_i)}{\beta + (1 - \lambda_i)^2} \quad (18)$$

La respuesta de "n" modos, según el método de la doble sumatoria [3], se representa por :

$$R^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_i \cdot R_j / (1 + \varepsilon^2) \quad (19)$$

siendo:

$$\varepsilon = \frac{w'_i - w'_j}{\xi_i w_i + \xi_j w_j} \quad (20)$$

y donde:

R_i = respuesta del modo "i"

w_i = frecuencia del sistema no amortiguado del modo "i"

$w'_i = w_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$ = frecuencia del sistema amortiguado del modo "i"

ξ_i = fracción del amortiguamiento crítico del modo "i"

Se puede considerar, aproximadamente, que la fracción del amortiguamiento crítico es igual para todos los modos [1], de manera que $\xi_i = \xi_j = \xi$, con lo que la ecuación (20) queda:

$$\varepsilon = \frac{(1 - \xi^2)}{\xi} \cdot \frac{(w_i - w_j)}{(w_i + w_j)} \quad (21)$$

De la aplicación de (19) a los cortantes y momentos torsores dados por (15) y (16), respectivamente, se obtiene:

$$V = S_0 \cdot m \cdot v \quad (22)$$

$$T = S_0 \cdot m \cdot e_x \cdot \tau \quad (23)$$

donde:

$$v = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + 2\eta_1 \eta_2 / (1 + \varepsilon^2)} \quad (24)$$

$$\tau = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + 2\mu_1 \mu_2 / (1 + \varepsilon^2)} \quad (25)$$

Tabla 1
Coeficientes (ν) y (τ) con $\xi = 0.05$ y espectro de aceleración constante

(e_x/r_0)	$(r_s/r_0) = (k_t/k_y)^{1/2}/r_0$							
	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
0.05	0.996	0.989	0.949	0.994	0.999	0.999	1.000	1.000
	1.359	2.446	6.392	2.998	1.921	1.546	1.367	1.266
0.10	0.984	0.960	0.866	0.976	0.994	0.998	0.999	0.999
	1.334	2.310	5.078	2.896	1.907	1.541	1.365	1.265
0.15	0.966	0.923	0.808	0.951	0.987	0.995	0.998	0.999
	1.298	2.132	4.010	2.748	1.883	1.535	1.362	1.264
0.20	0.944	0.887	0.774	0.923	0.978	0.991	0.996	0.998
	1.254	1.948	3.261	2.577	1.852	1.525	1.359	1.262
0.40	0.858	0.790	0.726	0.828	0.928	0.968	0.984	0.991
	1.072	1.395	1.866	1.938	1.679	1.467	1.334	1.250
0.50	0.825	0.766	0.719	0.798	0.901	0.953	0.975	0.986
	1.000	1.232	1.565	1.705	1.583	1.429	1.317	1.242
0.80			0.711	0.750	0.834	0.903	0.944	0.966
			1.131	1.277	1.329	1.303	1.254	1.207
1.00			0.708	0.736	0.803	0.872	0.921	0.951
			1.000	1.122	1.201	1.222	1.206	1.180

1ª línea: coeficiente (ν) según la ecuación (24)

2ª línea: coeficiente (τ), según la ecuación (25).

y de (21) con (8):

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{1-\xi^2} (\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2})}{\xi (\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2})} \quad (26)$$

La fuerza cortante estática equivalente es:

$$V_e = S_0 \cdot m \quad (27)$$

y el momento torsor correspondiente:

$$T_e = S_0 \cdot m \cdot e_x \quad (28)$$

El factor de amplificación dinámica es el cociente de los momentos dinámico (T) y estático (T_e), es decir τ , dado por la ecuación (25). El producto de la excentricidad estática por el factor de amplificación, por el cortante estático, proporciona el momento torsor real.

Por último, hay que destacar que para que las raíces de la ecuación (9) sean positivas, debe cumplirse la relación:

$$\beta / \rho \leq 1.0 \quad (29)$$

o sea que:

$$e_x / r_s \leq 1.0 \quad (30)$$

en caso contrario, una de las frecuencias acopladas resulta negativa y el sistema es inestable [4].

En la Tabla 1 se muestran los valores de (ν) y (τ) calculados con el procedimiento descrito, para $\xi = 0.05$; no se muestra valor alguno en los casos en que no se cumple la condición (30). En la Figura 3(a) se muestra la representación gráfica de los coeficientes (ν), y en la Figura 3(b) la de los factores de amplificación (τ). La Figura 3(b)

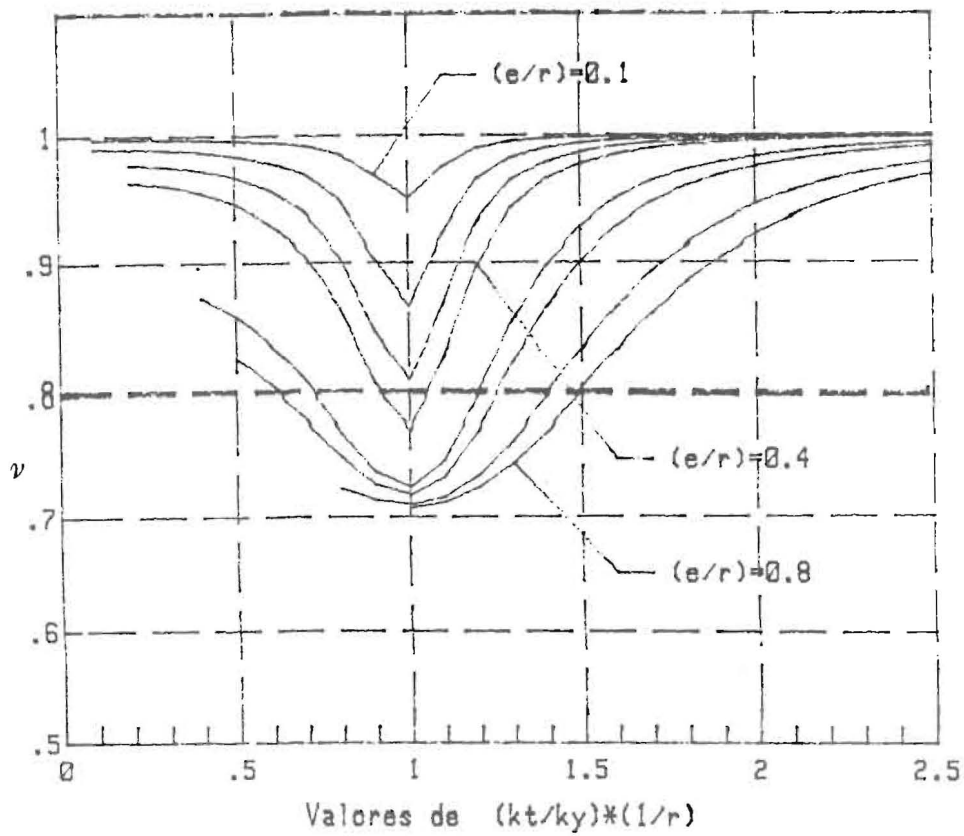


Figura 3(a). Cortantes Normalizados: $v = (V.din/V.est)$.

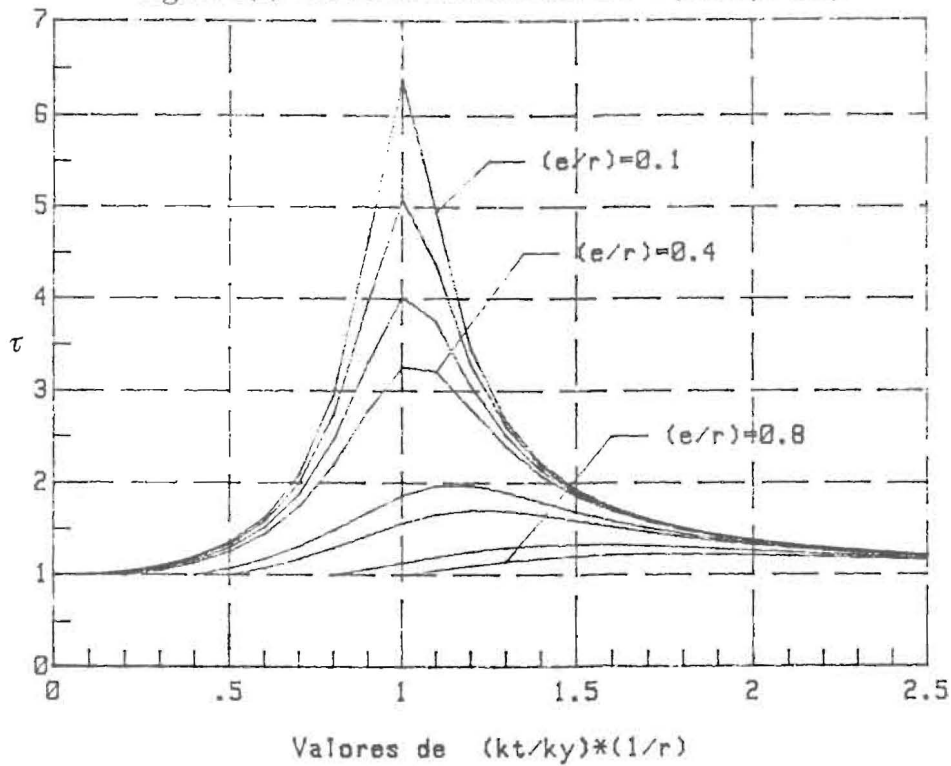


Figura 3(b). Factores de Amplificación Dinámica (τ).

corresponde al primer diagrama de la Figura C.9.3 de la Norma Covenin [1].

La presentación de la Tabla 1 y de las Figuras (3a) y (3b) en función de $\beta^{1/2}$ y $\rho^{1/2}$ obedece a razones prácticas de comparación con la información existente en las ref [1],[2] y [4].

Los factores de amplificación en el análisis matricial

El equilibrio estático de una estructura trirectangular con cargas laterales, ejes de referencia paralelos a las direcciones principales y un origen arbitrario, se representa [6] , [7], con la ecuación matricial:

$$\begin{vmatrix} K_{xx} & 0 & K_{xz} \\ 0 & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{vmatrix} \quad (31)$$

de la cual se deduce la matriz de rigidez torsional respecto a los centros de rigidez:

$$K_z = K_{zz} - K_{xz} \cdot K_{xx}^{-1} \cdot K_{zx} - K_{yz} \cdot K_{yy}^{-1} \cdot K_{zy} \quad (32)$$

Las ecuaciones (31) y (32) agrupan las matrices de rigidez lateral de todos los pórticos y/o muros que forman la estructura. Una matriz de rigidez lateral puede deducirse en base a las relaciones cortante-desplazamiento relativo [6], ó fuerza-desplazamiento absoluto [7]. Las dos alternativas son válidas, pero disposiciones normativas sobre amplificación de las excentricidades estáticas e imposición de excentricidades accidentales implican el uso de cortantes y momentos torsores que en la primera alternativa se conocen directamente, mientras que en la segunda opción hay que deducir por sumatoria de fuerzas y torques [5].

Para poder aplicar la ecuación (25) en el análisis matricial, es necesario recurrir al concepto de rigidez de piso:

rigidez lateral de piso = cortante /
desplazamiento relativo
rigidez torsional de piso = momento torsor /
rotación relativa

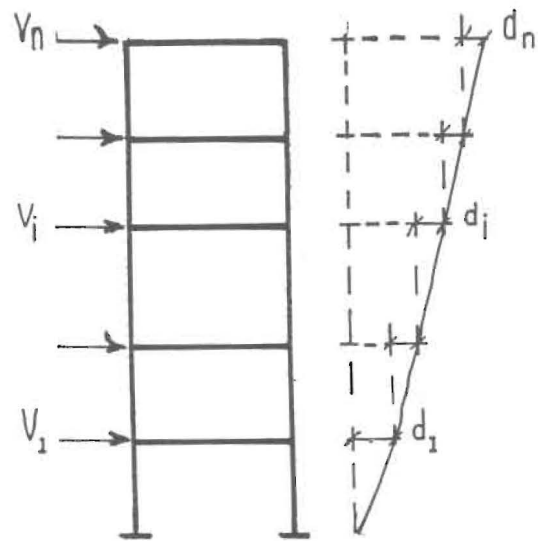


Figura 4(a). Rigidez del piso "i" a partir de la matriz (k) cortante-desplazamiento relativo.

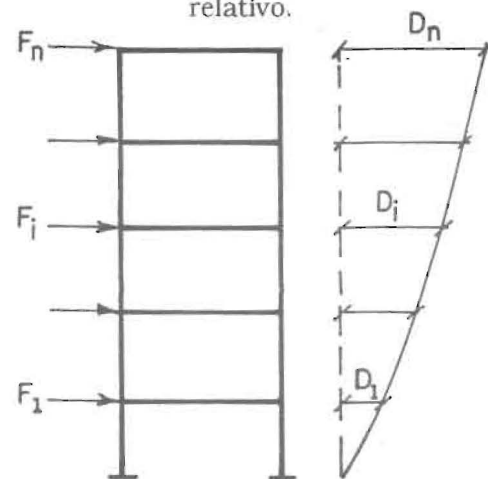


Figura 4(b). Rigidez del piso "i" a partir de la matriz (K) fuerza-desplazamiento absoluto.

cuya deducción depende del tipo de matriz utilizada.

Matriz: Cortante-Desplazamiento Relativo

En la Fig. 4(a) se esquematiza la deducción de la rigidez de piso de un pórtico solicitado por cortantes laterales. El procedimiento es válido para el caso de estructuras solicitadas por momentos torsores actuando en el plano de las plantas.

Ecuación matricial de equilibrio:

$$V = k \cdot d$$

para

$$d_i = 1 \text{ y } d_j = 0 \text{ (j } \neq i)$$

cortante

$$V_i = k_{ii} \cdot d_i$$

rigidez de piso:

$$k_{pi} = V_i / d_i = k_{ii}$$

Llamando a_{ii} al término i de la diagonal de una matriz, se tiene para el piso i :

Rigidez lateral en la dirección x :

$$k_{xi} = a_{ii} \text{ de } \mathbf{Kxx}$$

Rigidez lateral en la dirección y :

$$k_{yi} = a_{ii} \text{ de } \mathbf{Kyy} \tag{33}$$

Rigidez torsional respecto al c.d.r.:

$$k_{zi} = a_{ii} \text{ de } \mathbf{Kz}$$

Matriz: Fuerza - Desplazamiento Absoluto

En la Fig. 4(b) se esquematiza la deducción de la rigidez de piso en un pórtico solicitado por fuerzas laterales locales. El planteamiento es análogo al caso anterior, sólo que ahora es necesario deducir primero las fuerzas en los pisos para luego determinar los cortantes por sumatoria de fuerzas.

Ecuación matricial de equilibrio:

$$F = K \cdot D$$

para

$$d_j = 1 \text{ (j = 1, \dots, n)}$$

para

$$d_j = 0 \text{ (j = 1, \dots, i-1)}$$

fuerza

$$F_i = \sum_{j=i}^n K_{ij} \cdot D_j$$

cortante

$$V_i = \sum_{t=i}^n F_t k_{it} \cdot d_t$$

rigidez de piso:

$$k_{pi} = \sum_{t=i}^n \sum_{j=t}^n K_{ij}$$

Denominando b_{ij} al término genérico de una matriz, la rigidez del piso "i" resulta:

$$k_{pi} = \sum_{t=i}^n \sum_{j=t}^n b_{ij} \tag{34}$$

que representa la sumatoria de todos los términos de la matriz, incluidos en el cuadrado limitado por la diagonal $i - n$.

En la práctica, puede ser más simple la siguiente alternativa:

$$k_{pn} = b_{nn}$$

$$k_{pi} = k_{p_{i+1}} + b_{ii} + 2 \sum_{j=i+1}^n b_{ij} \text{ (i = n-1, \dots, 2, 1) } \tag{35}$$

Las rigideces del piso "i" se calculan con las relaciones (33) reemplazando a_{ii} por (34) ó (35).

Resumen del procedimiento

Conocidos:

- la fracción de amortiguamiento crítico (ξ)

- los radios de giro de las plantas (r_0)
 - las submatrices incluidas en (31)
 - las excentricidades (del cálculo convencional)
 el método propuesto es el siguiente, para cada piso:

- 1 Determine las rigideces de piso de acuerdo con el tipo de matriz de rigidez lateral empleada.
- 2 Calcule la rigidez torsional respecto al centro de cortante con (1).
- 3 Encuentre el radio elástico r_s con (3)
- 4 Determine las relaciones adimensionales: ρ con (6) y β con (7)
- 5 Calcule los parámetros λ_1, λ_2 con (9.a), (9.b) y μ_1, μ_2 con (18)
- 6 Calcule el factor de amplificación (τ) con (25).

Referencias

1. Ministerio de Desarrollo Urbano, "Norma Venezolana para Edificaciones Antisísmicas", COVENIN 1756-80-82.- Caracas, Venezuela, 1982.
2. Elorduy, J., Rosenblueth, E.: "Torsiones Sísmicas en Edificios de un Piso", II Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, tomo 3. Veracruz, México, 1968.
3. Rosenblueth, E.: "Sobre la Respuesta Sísmica de Estructuras de Comportamiento Lineal", II Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, tomo 1. Veracruz, México, 1968.
4. Kan, CH., Chopra, A.: "Coupled Lateral Torsional Response of Buildings to Ground Shaking", Report N° EERC 76 - 13, Berkeley, California, U.S.A., 1976.
5. Arias Albán, G.: "Caso General de Distribución de Cargas Horizontales en Estructuras de Edificios", Boletín Nos. 70-71, IMME, Facultad de Ingeniería, UCV, 1982.
6. Arias Albán, G.: "Análisis Sísmico Estático de Edificios", Ediciones Vega s.r.l., Caracas, Venezuela, 1984.
7. Fortoul, C.: "Reparto de Cargas Horizontales entre los Pórticos de la Imagen Plana de un Sistema Trirectangular de Edificio", Boletín

N° 7, AVIE, Colegio de Ingenieros de Venezuela, 1968, 22-39.

Recibido el 16 de Mayo de 1993

En forma revisada el 28 de Junio de 1994

Anexo A

Ejemplo de aplicación

En la Fig. A.1 se reproduce la planta de un edificio de 3 pisos, analizado en el ejemplo 6.5.6 (pág. 235) de la referencia [6] del texto.

Las matrices de rigidez lateral (cortante - desplazamiento relativo), y de torsión respecto al centro de rigidez (momento torsor - rotación relativa) son las siguientes:

$$K_{xx} = \begin{vmatrix} 1.87027224 & -0.40452181 & 0.04237484 \\ -0.40452181 & 3.63210017 & -0.59161711 \\ 0.04237484 & -0.59161711 & 3.49730079 \end{vmatrix}$$

$$K_{yy} = \begin{vmatrix} 1.97948855 & -0.24275324 & 0.01635099 \\ -0.24275324 & 4.18980714 & -0.38474974 \\ 0.01635099 & -0.38474974 & 4.14139111 \end{vmatrix}$$

$$K_z = \begin{vmatrix} 60.15441366 & -11.53802718 & 1.11211008 \\ -11.53802718 & 119.50416880 & -17.21223567 \\ 1.11211008 & -17.21223567 & 116.03426920 \end{vmatrix}$$

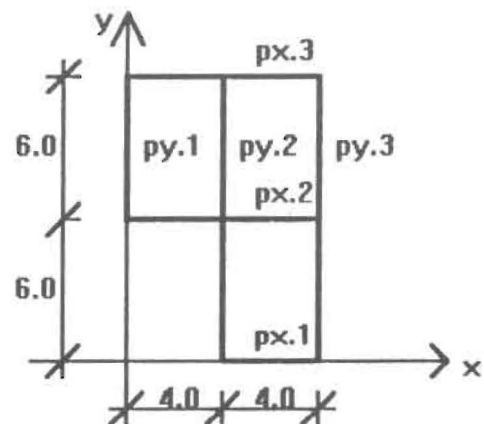


Figura A.1. Planta del edificio de 3 pisos.
Ref [6].

Las excentricidades calculadas, resultaron:

piso	Sismo-x e_y	Sismo - y e_x
1	0.369	0.052
2	0.221	-0.011
3	0.202	-0.042

el radio de giro de la planta es: $r_o = 3.986$, y la fracción del amortiguamiento crítico: $\xi = 0.05$

Sismo en dirección X.- Piso 1

a) rigidez lateral en la dirección X:

$$k_x = a_{11} \text{ de } \mathbf{K}_{xx} = 1.8703$$

rigidez torsional, respecto al centro de rigidez: $k_z = a_{11} \text{ de } \mathbf{K}_z = 60.1544$
excentricidad: $e_y = 0.369$

b) rigidez torsional respecto al centro de corte, de (1):

$$k_t = 60.1544 + 1.8703 \times 0.369^2 = 60.409$$

c) radio elástico,

$$\text{de (3): } r_s = (60.409 / 1.8703)^{1/2} = 5.6832$$

d) relaciones adimensionales,

$$\text{de (6): } \rho = (5.6832 / 3.986)^2 = 2.0329$$

$$\text{de (7): } \beta = (0.3690 / 3.986)^2 = 0.0086$$

$$1/2(1 + \rho) = 1.5165; 1/2(1 - \rho) = -0.5165$$

e) parámetros:

de (9a):

$$\lambda_1 = 1.5165 - [(-0.5165)^2 + 0.0086]^{1/2} = 0.9918$$

de (9b):

$$\lambda_2 = 1.5165 + [(-0.5165)^2 + 0.0086]^{1/2} = 2.0411$$

de (18):

$$\mu_1 = (0.0086 + 1 - 0.9918) / [0.0086 + (1 - 0.9918)^2] = 1.9451$$

$$\mu_2 = (0.0086 + 1 - 2.0411) / [0.0086 + (1 - 2.0411)^2] = -0.9451$$

f) factor de amplificación:

$$(1 - \xi^2)^{1/2} / \xi = 19.9750$$

de (26):

$$\varepsilon = 19.9750 (0.9918^{1/2} - 2.0411^{1/2}) / (0.9918^{1/2} - 2.0411^{1/2}) = -3.5657$$

$$(1 + \varepsilon^2) = 14.7142$$

de (25):

$$\tau^2 = [1.9451^2 + (-0.9451)^2 + 2 \times 1.9451 \times (-0.9451) / 14.7142] = 4.4268$$

$$\tau = 2.10$$

Sismo en dirección Y.- Piso 2

a) rigidez lateral en la dirección Y:

$$k_y = a_{22} \text{ de } \mathbf{K}_{yy} = 4.1898$$

rigidez torsional, respecto al centro de rigidez: $k_z = a_{22} \text{ de } \mathbf{K}_z = 119.5042$
excentricidad: $e_x = -0.011$

b) rigidez torsional respecto al centro de corte, de (1): $k_t = 119.5047$

c) radio elástico,

$$\text{de (3): } r_s = 5.3407$$

d) relaciones adimensionales,

$$\text{de (6): } \rho = 1.7952$$

$$\text{de (7): } \beta = 7.62 \times 10^{-6}$$

e) parámetros:

$$\text{de (9a): } \lambda_1 = 0.9999$$

$$\text{de (9b): } \lambda_2 = 1.7952$$

$$\text{de (18): } \mu_1 = 2.2575$$

$$\mu_2 = -1.2575$$

f) factor de amplificación:

$$(1 - \xi^2)^{1/2} / \xi = 19.9750$$

de (26): $\varepsilon = -2.9014$

de (25): $\tau = 2.46$