Rev. Téc. Univ. Zulia, Vol. 16. No. 2, 185-190, 1993

Una Nueva Convolución para el Cálculo Operacional del Operador $B_{-\nu}$.

J. Rodríguez

Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna. La Laguna (Tenerife). Islas Canarias, España

Resumen

En este trabajo, una nueva convolución es dada, por medio del método de la semejanza de Meller, que nos permite desarrollar un cálculo operacional para el operador $B_{-\nu}$ ($\nu>0$), siguiendo un proceso algebraico semejante al de Mikusinski.

Palabras claves: Convolución, Operador $B_{-\nu}$

A New Convolution for an Operational Calculus for the Operator $B_{-\nu}$

Abstract

A new convolution is presented using Meller's similarity method. With this convolution and the help of an algebraic procedure similar to Mikusinski's one, we obtain an operational calculus for the operator $B_{-\nu}$.

Key words: Convolution, Operator $B_{-\nu}$

Introducción

Siguiendo un proceso algebraico similar al empleado por Mikusinski [8], desarrollamos en este trabajo un cálculo operacional para el operador $B_{-\nu}=t^{\nu}Dt^{1-\nu}D=Dt^{1+\nu}Dt^{-\nu}$ ($\nu>0$), caso particular del operador del tipo Bessel

$$B = t^{\alpha_0} D t^{\alpha_1} D \ldots D t^{\alpha_n}$$

$$(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n<n)$$

estudiado por I.H. Dimoski en [1], y que permite extender los resultados de E. L. Koh [4], [5] y [6] para el operador de Bessel-Clifford B_ν ($\nu\geq 0$) a valores negativos del parámetro ν. También se obtienen algunas reglas operacionales y se da un ejemplo que ilustra las aplicaciones de la teoría presentada.

Operador Fraccionario de Riemann-Liouville

La integral de Riemann-Liouville de orden $\nu > 0$, se define como

$$I^{\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\xi)^{\nu-1} f(\xi)\, d\xi. \tag{2.1}$$

Cuando ν es un entero positivo n, entonces $I^n f(t)$ es simplemente la n-esima integral de f (t).

Algunas propiedades, bien conocidas, para este operador son las siguientes:

a) $I^0 f(t) = \lim_{\nu \to 0} I^{\nu} f(t) = f(t)$

b) $D\,I^{\nu+1} f(t) = I^{\nu} f(t)$

c) $I^{\nu} I^{\mu} f(t) = I^{\nu+\mu} f(t),$

$\nu, \mu > 0$

d) $$I^{\nu} t^{k} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\nu+k+1)} t^{\nu+k}$$

$\nu \geq 0)$

La derivada fraccionaria de orden $\nu>0$ de una función $f(t) \in C^{n}$ $([0,\infty))$, se define, con la ayuda de (2.1), mediante $D^{\nu}f(t)=D^{n}I^{n-\nu} f(t)$ $(n-1<\nu \leq n)$ y satisface, entre otras, las siguientes propiedades:

e) $D^{\nu} I^{\mu} f(t) = I^{\mu-\nu} f(t)$

$(\nu, \mu, \mu-\nu \in \mathbb{R}^{+})$

f) $$D^{\nu} t^{k} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\nu+1)} t^{k-\nu}$$

$(-1<k<\infty, \quad 0<\nu\leq k)$

El cuerpo de Fracciones C_{ν}^{∞}

Denotamos por C_{ν}^{∞} al conjunto

$$C_{\nu}^{\infty} := \{f(t) / f(t) = t^{\nu} f_1(t) \wedge f_1(t) \in C^{\infty}([0,\infty)), \ \nu > 0\}.$$

Teniendo en cuenta que $B_{-\nu}$ y B_{ν} son operadores lineales y que

$$t^{-\nu} : C_{\nu}^{\infty} \longrightarrow C^{\infty}$$

es un isomorfismo, y al verificarse que

$$t^{-\nu} B_{-\nu} = B_{\nu} t^{-\nu} \quad (3.1)$$

en virtud del método de la semejanza de Meller [7], es factible definir la operación * convolución:

$$f(t) * g(t) = t^{\nu} [(t^{-\nu} f(t)) \circ (t^{-\nu} g(t))]$$

donde $\circ$ es la convolución para el operador B_{ν} dada en [6] por

$$f(t) \circ g(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} D^{\nu+1} t D \int_0^t \xi^{\nu} d\xi \int_0^1 f(\xi\eta)(1-\eta)^{\nu} g[(1-\eta)(t-\xi)]\, d\eta.$$

Por tanto, a tenor de la caracterización de los elementos de C_{ν}^{∞} se tiene:

$$f(t) * g(t) = t^{\nu}[(t^{-\nu} f(t)) \circ (t^{-\nu} g(t))] = t^{\nu}[f_1(t) \circ g_1(t)] = t^{\nu} h_1(t),$$

esto es, la operación * es cerrada en C_{ν}^{∞}. Se cumplen además las propiedades que siguen para cada $f(t)$, $g(t)$ y $h(t) \in C_{\nu}^{\infty}$:

I) $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$

II) $f(t) * (g(t) * h(t)) = (f(t) * g(t)) * h(t)$

III) $f(t) * (g(t) + h(t)) = (f(t) * g(t)) + (f(t) * h(t))$

IV) $t^{\nu} * f(t) = f(t)$

V) $f(t) * g(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$ ó $g(t) = 0$

Concluimos entonces, que:

Proposición 1.- Definidas C_{ν}^{∞} las operaciones suma y *, C_{ν}^{∞} es un anillo conmutativo unitario y sin divisores de cero.

Luego, C_{ν}^{∞} se puede extender a un cuerpo de fracciones $M = C_{\nu}^{\infty} x (C_{\nu}^{\infty} - \{0\}) / \sim$, donde la relación de equivalencia ~ se define en $C^{\infty}_{\nu}\times(C^{\infty}_{\nu}-\{0\})$ de la forma habitual.

$$(f(t),g(t))\sim(\bar{f}(t),\bar{g}(t))$$

$$\Leftrightarrow f(t)*\bar{g}(t)=g(t)*\bar{f}(t).$$

De acuerdo con Mikusinski, llamaremos a los elementos de M operadores y en lo sucesivo denotaremos a (f(t),g(t)) por $\frac{f(t)}{g(t)}$.

Si se definen en M las operaciones usuales de adición, multiplicación y producto por un escalar mediante:

$$\frac{f(t)}{g(t)}+\frac{\bar{f}(t)}{\bar{g}(t)}=\frac{f(t)*\bar{g}(t)+\bar{f}(t)*g(t)}{g(t)*\bar{g}(t)}$$

$$\frac{f(t)}{g(t)}\cdot\frac{\bar{f}(t)}{\bar{g}(t)}=\frac{f(t)*\bar{f}(t)}{g(t)*\bar{g}(t)}$$

$$\alpha\cdot\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{\alpha f(t)}{g(t)}$$

M resulta ser un álgebra.

El conjunto cociente M contiene una parte M' que es isomorfa con C^{∞}_{ν}, mediante la aplicación:

$$M'\subset M \longrightarrow C^{\infty}_{\nu}$$

$$\frac{t^{\nu}*f(t)}{t^{\nu}} \longrightarrow f(t)$$

por tanto, los operadores de la forma $\frac{f(t)}{t^{\nu}}$ constituyen un subanillo de M.

A continuación, establecemos proposiciones, algunas de las cuales nos permiten obtener reglas operacionales. Para ello notemos primero que el operador inverso por la derecha de $B_{-\nu}$ está dado por

$$L_{-\nu}f(t)=t^{\nu}\int_0^t \xi^{-1-\nu}\int_0^{\xi} f(\eta)\,d\eta=$$

$$\int_0^t \xi^{\nu-1}d\xi\int_0^t \eta^{-\nu}f(\eta)\,d\eta$$

ya que:

$$B_{-\nu}L_{-\nu}f(t)=f(t)$$

Proposición 2.- Para cada $f(t)\in C_{\nu}$, se tiene:

$$\frac{t^{\nu+1}}{\nu+1}*f(t)=L_{-\nu}f(t).$$

Demostración: Obsérvese que

$$\frac{t^{\nu+1}}{\nu+1}*f(t)=t^{\nu}[(\frac{t}{\nu+1})\circ(t^{-\nu}f(t))]$$

cuyo segundo miembro vale, en virtud de la proposición 5 de [6]:

$$t^{\nu}\int_0^t \xi^{-\nu-1}d\xi\int_0^{\xi}\eta^{\nu}(\eta^{-\nu}f(\eta)\,d\eta=$$

$$t^{\nu}\int_0^t \xi^{-\nu-1}d\xi\int_0^{\xi} f(\eta)\,d\eta=L_{-\nu}f(t).$$

De esta proposición, se deduce por inducción:

Proposición 3.- Sea $k\in\mathbf{N}$ y $f(t)\in C_{\nu}$. Se tiene:

$$\frac{\Gamma(\nu+1)}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}t^{\nu+k}*f(t)=L^{k}_{-\nu}f(t).$$

Por tanto los operadores $L^{k}_{-\nu}\in M$ vienen dados por:

$$L^{k}_{-\nu}=\frac{\Gamma(\nu+1)}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}t^{\nu+k}.$$

Proposición 4.- Si $f(t)\in C^{\infty}_{\nu}$, entonces

$$f(t)=L_{-\nu}B_{-\nu}f(t)+$$

$$t^{\nu}[t^{-\nu}f(t)]_{|t=0^+}\ . \tag{3.2}$$

Demostración: Se infiere de

$$L_{-\nu}B_{-\nu}f(t) =$$

$$t^{\nu}\int_0^t \xi^{-\nu-1}d\xi\int_0^{\xi} B_{-\nu}f(\eta)\,d\eta =$$

$$= t^{\nu}[t^{-\nu}f(t)]-t^{\nu}[t^{-\nu}f(t)]_{|t=0^+} =$$

$$f(t)-t^{\nu}[t^{-\nu}f(t)]_{|t=0^+}.$$

Proposición 5.- Sea $k\in\mathbb{N}$ y $f(t)\in C^{\infty}_{\nu}$, entonces:

$$B^k_{-\nu}f(t)=L_{-\nu}B^{k+1}_{-\nu}f(t)$$

$$+t^{\nu}[t^{-\nu}f(t)]_{|t=0^+} \tag{3.3}$$

Demostración: De

$$L_{-\nu}B^{k+1}_{-\nu}f(t)=$$

$$t^{\nu}\int_0^t \xi^{-1-\nu}\int_0^{\xi} D\eta^{1+\nu}D\eta^{\ \nu}B^k_{-\nu}f(\eta)\,d\eta=$$

$$=t^{\nu}[t^{-\nu}B^k_{-\nu}f(t)]-$$

$$t^{\nu}[t^{-\nu}B^k_{-\nu}f(t)]_{|t=0^+}$$

se deduce inmediatamente (3.3).

Si denotamos por V el operador

$$V=(\nu+1)\frac{t^{\nu}}{t^{\nu+1}}$$

puede ser enunciada la siguiente

Proposición 6. Si $k\in\mathbb{N}$ y $f(t)\in C^{\infty}_{\nu}$, se tiene:

$$V^k f(t)=V^k*f(t)=B^k_{-\nu}f(t)+$$

$$\sum_{j=1}^{k}[t^{-\nu}B^{k-j}_{-\nu}f(t)]_{|t=0^+}V^j. \tag{3.4}$$

Demostración: De (3.2) sabemos que

$$f(t)=\frac{t^{\nu+1}}{\nu+1}*B_{-\nu}f(t)$$

$$+t^{\nu}[t^{-\nu}f(t)]_{|t=0^+}.$$

Entonces,

$$Vf(t)=(\nu+1)\frac{t^{\nu}}{t^{\nu+1}}*$$

$$\left(\frac{t^{\nu+1}}{\nu+1}*B_{-\nu}f(t)\right)+(\nu+1)$$

$$\frac{t^{\nu}}{t^{\nu+1}}*t^{\nu}[t^{-\nu}f(t)]_{|t=0^+}=$$

$$=\left((\nu+1)\frac{t^{\nu}}{t^{\nu+1}}*\frac{t^{\nu+1}}{\nu+1}\right)*$$

$$B_{-\nu}f(t)+V[t^{-\nu}f(t)]_{|t=0^+}=$$

$$B_{-\nu}f(t)+V[t^{-\nu}f(t)]_{|t=0^+}$$

lo cual prueba (3.4) para k=1. Supongamos ahora que (3.4) es cierta para k=m. Entonces:

$$V^{m+1}f(t)=V(V^m f(t))=V(B^m_{-\nu}f(t)+$$

$$\sum_{j=1}^{m}[t^{-\nu}B^{m-j}_{-\nu}f(t)]_{|t=0^+}V^j)=$$

$$=V(B^m_{-\nu}f(t))+$$

$$\sum_{j=1}^{m}[t^{-\nu}B^{m-j}_{-\nu}f(t)]\Big|_{t=0^+}V^{j+1}.$$

Ahora bien, sustituyendo (3.3) se infiere, finalmente, que

$$V^{m+1}f(t)=B^{m+1}_{-\nu}f(t)+$$

$$\sum_{j=1}^{m+1}[t^{-\nu}B^{m+1-j}_{-\nu}f(t)]\Big|_{t=0^+}V^{j}.$$

Reglas Operacionales

Recuérdese que son soluciones de las ecuaciones diferenciales

$$(B_{-\nu}\pm a)y=0 \qquad (a>0) \tag{4.1}$$

las funciones

$$y_1(t)=t^{\nu}C_{\nu}(at)(\text{para el signo }+)$$

y

$$y_2(t)=t^{\nu}E_{\nu}(t)(\text{para el signo }-)$$

donde $C_\nu(t)$ y $E_\nu(t)$ representan la función de primera especie y la modificada de primera especie de Bessel-Cliford de orden **v** [3] respectivamente.

Como quiera que

$$\lim_{t\to 0}C_{\nu}(at)=$$

$$\lim_{t\to 0}E_{\nu}(at)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}$$

de (3.4) y (4.1) se sigue:

$$V*f(t)=$$

$$\pm at^{\nu}*f(t)+\frac{V}{\Gamma(\nu+1)}$$

resultando, entre otras, las siguientes reglas operacionales

a) $$\frac{V}{V+at^{\nu}}=\Gamma(\nu+1)t^{\nu}C_{\nu}(at)$$

b) $$\frac{V}{V-at^{\nu}}=\Gamma(\nu+1)t^{\nu}E_{\nu}(at)$$

c) $$\frac{at^{\nu}}{V+at^{\nu}}=1-\Gamma(\nu+1)t^{\nu}C_{\nu}(at)$$

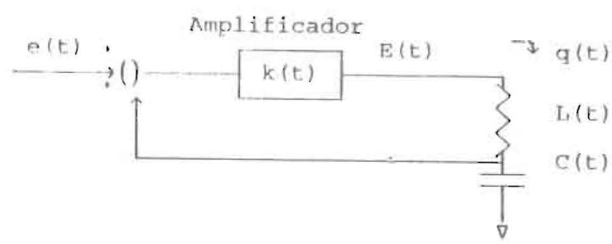
d) $$\frac{-at^{\nu}}{V-at^{\nu}}=1-\Gamma(\nu+1)t^{\nu}E_{\nu}(at)$$

e) $$\frac{V^2}{V^2-a^2t^{\nu}}=\frac{\Gamma(\nu+1)}{2}t^{\nu}[E_{\nu}(at)+C_{\nu}(at)]$$

f) $$\frac{aV}{V^2-a^2t^{\nu}}=\frac{\Gamma(\nu+1)}{2}t^{\nu}[E_{\nu}(at)-C_{\nu}(at)]$$

g) $$\frac{V\,t^{n\nu}}{(V-at^{\nu})^{n+1}}=\frac{\Gamma(\nu+1)}{n!}t^{\nu+n}E_{\nu+n}(at),\qquad n\in\mathbb{N}$$

Como ejemplo de aplicación consideramos el circuito de la figura realimentado positivo planteado en [2].



La carga q(t) debe satisfacer la ecuación:

$$DL(t)Dq(t)+\frac{q(t)}{C(t)}$$

$$= K(t)\,(e(t)+\frac{q(t)}{C(t)})$$

Si suponemos que $L(t) = at^{1-\nu}$, $C(t) = b$. $q(t) = t^{-\nu}q_1(t)$ y $K(t) = 1-t2n$ siendo a.b y $\nu>0$. la ecuación se puede escribir en la forma

$$a\ b\ B_{-\nu}\ q_1(t)\ +\ t^{\nu}\ q_1(t)\ =$$

$$b\ (1-t^{2\nu})\ e(t)\ =\ e_1(t)$$

Por tanto, si $q(0) = 0$, se sigue de (3.4)

$$q_1(t)\ =\ \frac{t^{\nu}}{abV+t^{\nu}}\ *\ e_1(t)$$

de donde a tenor de c), se tiene:

$$q_1(t)\ =$$

$$[1-\Gamma(\nu+1)\,t^{\nu}C_{\nu}(-\frac{1}{ab}t)]\ *\ e_1(t)\,.$$

Referencias

[1] Dimovski, I.H. Foundations of operational calculs for the Bessel type differential operators. Serdica Bulg. Math. Publ., 1. (1975), 51-63.

[2] Gerardi, F.R.. Application of Mellin and Hankel transforms to networks with time-varying parameters. Ire transactions on circuit theory, 6, 197-208, (1959).

[3] Hayek, N.. Estudio de la ecuación diferencial xy"+(v+1)y'+y=0 y sus aplicaciones. Collectanea Math. Vol. XVIII, (1-2) (1966-67), 57-174.

[4] Koh, E.L.. Mikusinski calculus for the Bessel operator B_{μ}. Proc. Diff. Eq., Lecture Notes in Math. 564, Springer-Verlag (1976).

[5] Koh, E.L.. Application of an operational calculus to certain time-varying systems. Int. J. Systems. 9 (1978), 595-601.

[6] Koh, E.L.. A direct extension of Meller's calculus. Internat. J. Math. and Math. Sci.; vol. 5, n. 4 (1982), 785-791.

[7] Meller, N. A.. On some applications of operational calculus to problems in analysis. Journ. Vichislitelnaya. Mat. i. Mat. Fiz. 3 (1) (1963), 73-89.

[8] Mikusinski, J.. Operational calculus. Pergamon, (1959).

Recibido el 03 de Octubre de 1989
En forma revisada el 10 de Abril de 1993