Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia, Vol. 15, No. 2, 131 - 134, 1992

Evaluación de Integrales con Funciones Trigonométricas

Xiomara Arrieta

Universidad del Zulia, Facultad de Humanidades, Maracaibo, Venezuela.

Resumen

En el presente trabajo se evalúan cierto tipo de integrales definidas, usando resultados conocidos sobre Integrales Elípticas. Tales integrales aparecen frecuentemente cuando se efectúan los cálculos del ángulo sólido de sistemas ópticos y su solución no aparece en tablas matemáticas.

Palabras Claves: Funciones Trigonométricas, Integrales Definidas, Integrales Elípticas

Evaluation of Integrals with Trigonometric Functions

Abstract

This paper evaluates some definite integrals involving irrational trigonometric functions. Some known results on complete elliptic integrals are used to obtain the desired results. Results of this type are encountered in calculation of solid angles in the optical systems.

Key Words: Trigonometric Functions, Definite Integrals, Elliptic Integrals.

1. Introducción

Frecuentemente en el análisis óptico se encuentran cierto tipo de integrales definidas con integrando irracional que no aparece su solución en tablas matemáticas conocidas.

James Evans [3] evalúa estas integrales utilizando el Teorema del Residuo (análisis complejo), el cual resulta ser un trabajo muy extenso.

En este trabajo se resuelven estas integrales mediante el uso de resultados conocidos sobre Integrales Elípticas [1,2,5,6,7]. Cabe destacar que todas las integrales de este tipo se pueden expresar mediante integrales elípticas completas, completas complementarias o combinación de ellas o mediante integrales elípticas generalizadas.

Definición de Integral Elíptica:

Si R (x,y) es una función racional de x e y, donde y es un polinomio cúbico o de grado cuatro en x, entonces la integral

$$\int R(x,y)\,dx \tag{1}$$

se denomina una integral elíptica [1].

La función

$$F(x,k)=\int_o^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}}\,,\ k^2<1 \tag{2}$$

se denomina Integral Elíptica de Primera Clase [1,2,7], equivalentemente se puede expresar

$$F(\phi,k)=\int_o^{\phi} \frac{d\,\theta}{\sqrt{1-k^2 sen^2\,\theta}}\,,\ k^2<1$$

donde $x = \operatorname{sen}\theta$

La cantidad

$$K = F(1,k) = F(\pi/2,k) \tag{3}$$

es llamada la Integral Elíptica Completa de Primera Clase, y la cantidad

$$K' = F(1,k') = F(\pi/2,k') \qquad (4)$$

es llamada la Integral Completa Complementaria de Primera Clase.

La función

$$E(x,k) = \int_o^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\ ,\ k^2<1 \qquad (5)$$

se denomina Integral Elíptica de Segunda Clase, su equivalente

$$E(\phi,k) = \int_o^{\phi}\sqrt{1-k^2 sen^2\,\theta}\; d\,\theta\ ,\ k^2<1$$

Las funciones

$$E = E(1,k) = E(\pi/2,k) \qquad (6)$$
$$E' = E(1,k') = E(\pi/2,k') \qquad (7)$$

donde $k'^2 = 1 - k^2$ son llamadas respectivamente la Integral Elíptica Completa y la Integral Elíptica Completa Complementaria de Segunda Clase.

Además, tenemos que [4]

$$K = F(\pi/2,k)$$
$$= \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1(1/2,1/2;1;k^2) \qquad (8)$$
$$E = E(\pi/2,k)$$
$$= \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1(1/2,-1/2;1;k^2) \qquad (9)$$

Integral Elíptica Generalizada de Kalla, Conde y Hubbell. Se define por [5]:

$$R_\mu(k,\alpha,\gamma)$$
$$= \int_o^{\pi} \frac{\cos^{2\alpha-1}(\theta/2)\ sen^{2\gamma-2\alpha-1}(\theta/2)}{(1-k^2\cos\theta)^{\mu+\frac{1}{2}}}\, d\,\theta$$

$0\leq k<1\ ,\ Re(\gamma)>Re(\alpha)>0\ ,\ Re(\mu)>-1/2$

Las integrales elípticas completas de primera y segunda clase surgen como casos particulares de esta fórmula.

2. Integrales

Las cuatro integrales a evaluar son :

$$N_1 = \int_o^{2\pi} \sqrt{a+\cos\,\theta}\; d\,\theta \quad ,a>1 \qquad (10)$$
$$N_2 = \int_o^{2\pi} \sqrt{a+\cos^2\,\theta}\; d\,\theta \quad ,a>0 \qquad (11)$$
$$D_1 = \int_o^{2\pi} \frac{d\,\theta}{\sqrt{a+\cos\,\theta}} \quad ,a>1 \qquad (12)$$
$$D_2 = \int_o^{2\pi} \frac{d\,\theta}{\sqrt{a+\cos^2\,\theta}} \quad ,a>0 \qquad (13)$$

donde N se refiere al numerador y D al denominador y el subíndice nos indica la potencia del coseno.

Evaluación N_1

Tenemos que:

$$N_1 = \int_o^{2\pi} \sqrt{a+\cos\,\theta}\; d\,\theta \quad ,a>1$$

usando el resultado [8]

$$\int_o^x \sqrt{a+b\,cost}\;\; dt = 2\,\sqrt{a+b}\,E(x/2,k)$$
$$[a>b>0,\quad 0\leq x\leq\pi]$$
$$k=\sqrt{\frac{2\,b}{a+b}} \qquad (14)$$

nos queda:

$$N_1 = 4\,\sqrt{a+1}\;\; E(\pi/2,k)\ ,\quad k=\sqrt{\frac{2}{a+1}} \qquad (15)$$

en términos de la función hipergeométrica de Gauss

$$N_1 = 2\pi\,\sqrt{a+1}\;{}_2F_1\,(-1/2,1/2;1;\frac{2}{a+1}) \qquad (16)$$

usando [4]

$${}_2F_1(\alpha,\beta;2\beta;z) =$$

$$(1-z/2)^{-\alpha}\;{}_2F_1\!\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2};\beta+1/2;\left(\frac{z}{2-z}\right)^2\right) \qquad (17)$$

y expresando en serie

$$N_1 = 2\pi\,\sqrt{a}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1/4)_n\,(1/4)_n}{(n!)^2\,a^{2n}}\right) \qquad (18)$$

donde

$$(\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)\,,$$
$$k=1,2,3\ldots(\lambda)_o=1$$

desarrollando resulta

$$N_1 = 2\pi\,\sqrt{a}\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(4n-2)!}{(64)^n\,(2n-1)!\,(n!)^2\,a^{2n}}\right) \qquad (19)$$

Este es el resultado dado por Evans [3] utilizando el método de variable compleja.

Evaluación de N_2

$$N_2 = \int_0^{2\pi} \sqrt{a + \cos^2\theta}\, d\theta \quad , \; a>0$$

$$N_2 = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \sqrt{(2a+1) + \cos\phi}\, d\phi \tag{20}$$

usando ec. (14) nos queda

$$N_2 = 4\sqrt{a+1}\; E(\pi/2, k) \quad , \; k = \sqrt{\frac{1}{a+1}} \tag{21}$$

en términos de la función hipergeométrica de Gauss [1,2,4]

$$N_2 = 2\pi\sqrt{a+1}\; {}_2F_1(-1/2, 1/2; 1; \frac{1}{a+1}) \tag{22}$$

usando ec. (17) y expresando en serie, resulta

$$N_2 = 2\pi\sqrt{a+1/2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1/4)_n (1/4)_n}{(n!)^2\, 2^{2n}\, (a+1/2)^{2n}}\right) \tag{23}$$

desarrollando

$$N_2 = 2\pi\sqrt{a+1/2}\,.$$

$$\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(4n-2)!}{(256)^n (2n-1)!\, (n!)^2 (a+1/2)^{2n}}\right) \tag{24}$$

igual al resultado obtenido por Evans.

Evaluación de D_1

$$D_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{a+\cos\theta}} \quad , \; a>1$$

usando el resultado [8]

$$\int_0^{x} \frac{dt}{\sqrt{a + b\cos t}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}}\; F(x/2, k) \quad , \; k = \sqrt{\frac{2b}{a+b}}$$

$$[a>b>0 \;,\; 0 \leq x \leq \pi] \tag{25}$$

nos queda

$$D_1 = \frac{4}{\sqrt{a+1}} F(\pi/2, k) \quad , \; k = \sqrt{\frac{2}{a+1}} \tag{26}$$

en términos de la función hipergeométrica de Gauss

$$D_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{a+1}}\; {}_2F_1(1/2, 1/2; 1; \frac{2}{a+1}) \tag{27}$$

usando la ec. (17) y expresando en serie, resulta

$$D_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/4)_n (3/4)_n}{(n!)^2\, a^{2n}}\right) \tag{28}$$

desarrollando

$$D_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(4n-1)!}{(64)^n (2n-1)!\, (n!)^2\, a^{2n}}\right) \tag{29}$$

Evaluación de D_2

$$D_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{a + \cos^2\theta}} \quad , \; a>0$$

$$D_2 = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{(2a+1) + \cos\phi}} \tag{30}$$

usando la ec. (25) resulta

$$D_2 = \frac{4}{\sqrt{a+1}}\; F(\pi/2, k) \quad k = \sqrt{\frac{1}{a+1}} \tag{31}$$

en términos de la función hipergeométrica de Gauss

$$D_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{a+1}}\; {}_2F_1(1/2, 1/2; 1; \frac{1}{a+1}) \tag{32}$$

usando la ec. (17) y expresando en serie

$$D_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{a+1/2}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/4)_n (3/4)_n}{(n!)^2\, 2^{2n}\, (a+1/2)^{2n}}\right) \tag{33}$$

desarrollando

$$D_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{a+1/2}}\,.$$

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(4n-1)!}{(n!)^2 (256)^n (2n-1)!\, (a+1/2)^{2n}}\right) \tag{34}$$

Resumiendo

$$N_1 = 2\pi\sqrt{a}\,.$$

$$\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(4n-2)!}{(2n-1)!\, (64)^n (n!)^2\, a^{2n}}\right) \quad a>1$$

$$N_2^{\cdot} = 2\pi\, \sqrt{a+1/2}\,.$$

$$\left(1-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(4n-2)\,!}{(2n-1)\,!\,\,(256)^n\,(n!)^2\,(a+1/2)^{2n}}\right) \quad a>0$$

$$D_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}\,.$$

$$\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(4n-1)\,!}{(2n-1)\,!\,\,(64)^n\,(n!)^2\,(a)^{2n}}\right) \quad a>1$$

$$D_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{a+1/2}}\,.$$

$$\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(4n-1)\,!}{(2n-1)\,!\,\,(256)^n\,(n!)^2\,(a+1/2)^{2n}}\right) \quad a>0$$

En todos los casos, nuestras fórmulas coinciden con los resultados obtenidos por Evans usando el método de variable compleja.

Es interesante destacar que en las integrales estudiadas anteriormente, si reemplazamos cos θ por sen θ en el integrando obtendremos los mismos resultados.

Este trabajo forma parte del proyecto aprobado por el CONDES.

Se agradece al Dr. Shyam Kalla su valioso asesoramiento.

Referencias

[1] ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I.: Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover Publications Inc. New York, 1972.

[2] ERDELYI, A. (Editor): Higher Transcendental Function, Vol. I, McGraw-Hill, New York, 1953.

[3] EVANS, JAMES D.: Evaluation of Four Irrational Cosine Definite Integrals Using Residue Theory. Applied Mathematics and Computation Elsevier Science Publishing Co. Inc. 1989. New York.

[4] GRADSHTEYN, I.S., RYZHIK, I.M.: Tables of Integrals, Series and Products. Corrected and Enlarged Edition, Academic Press, INC., 1980.

[5] KALLA, S.L., CONDES, S. and HUBBELL, J.H.: Some results on generalized elliptic-type integrals. Applicable Analysis 22 (1986). 273-287.

[6] KALLA, S.L., LEUBNER, C. and HUBBELL, J.H.: Further results on generalized elliptic-type integrals. Applicable Analysis 25 (1987). 269-274.

[7] GALUE, LEDA: Un estudio sobre integrales tipo elípticas generalizadas. Universidad del Zulia. Facultad de Ingeniería. Ciclo Básico Extensión Cabimas. 1987.

[8] PRUDNIKOV, A.P., BRYCHKOV, JU A. MARICHEV O.I.: Integrals and Series. Vol. I. Elementary Functions. Nauka Moscow, 1981.

Recibido: El 3 de Abril de 1991