

ANÁLISIS POR COLOCACION ORTOGONAL DE LOS EFECTOS DE CONDUCCION AXIAL Y DISIPACION VISCOSA EN LA TRANSFERENCIA DE CALOR DE FLUIDOS NO-NEWTONIANOS

J. Coronel y R. Zerpa
I. Arrieta, C. García,
Escuela de Ingeniería Química
Facultad de Ingeniería
Universidad del Zulia
Apartado 526
Maracaibo, Venezuela

RESUMEN

Para fluidos No-Newtonianos expresados por el Modelo de Potencia se desarrolló un modelo teórico de transferencia de calor que incluye las contribuciones de convección axial, conducción axial, conducción radial y disipación viscosa utilizando el criterio de Cochrane. En el presente trabajo se analizan igualmente los efectos de entrada al perfil térmico, se introduce el Número de Brinkman modificado como parámetro de la disipación viscosa. La resolución numérica combina el método de colocación ortogonal usado en la dirección radial y resolviendo en la dirección axial por el método de Euler, para el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.

Los resultados demuestran que la contribución de calor por disipación viscosa genera la mayor variación sobre el proceso de transferencia de calor, así para el sistema Polímero-Agua el Número de Nusselt varía entre 100 a 600 para Números de Brinkman entre 0.001 a 0.10 respectivamente.

ABSTRACT

For non-newtonian fluids expressed by the power law, a theoretical model is developed taking into account the heat contributions from axial convection, axial conduction, radial conduction and viscous dissipation by using the Cochrane criteria. In this research work, the relation length / radius is also analyzed and as parameter of the viscous dissipation is defined a Brinkman Number Modified. The numerical solution combines the orthogonal collocation method in the radial direction and solving by the Euler method in the axial direction for the system of non-linear differential equations.

The results indicate that the heat contribution from viscous dissipation generates the most important variation on the non-newtonian heat transfer, thus for a system type Polymer-water the Nusselt Number varies between 100 and 600 for Brinkman Numbers between 0.001 and 0.10 respectively.

1. INTRODUCCION

Los procesos de transferencia de calor en fluidos no-newtonianos han tenido mayor desarrollo experimental que una real interpretación teórica. Bassett y Welty (1) presentan una excelente revisión histórica de los diferentes trabajos investigativos experimentales y analíticos para las condiciones térmicas-temperatura a la pared o flujo de calor a la pared.

La incorporación de la dependencia de temperatura sobre las condiciones constitutivas en estudios de transferencia de calor para fluidos no-newtonianos ha sido completamente ignorada, sólo existen aproximaciones empíricas para correcciones de propiedades reológicas a la pared y en el seno del fluido. Los modelos isotérmicos son incluidos dentro del efecto de disipación viscosa, por ejemplo Bird (2) obtuvo la siguiente relación asintótica en la zona de entrada térmica usando el Modelo de Oswald DeWaele,

$$N_{u_x} = 1.411 \left(\frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} G_{z_x}^{1/3} \quad (1)$$

De igual manera pueden citarse los trabajos de Mitsubishi y Mayatake (3) quienes utilizaron el Modelo de Ellis con los parámetros reológicos independientes de temperatura; Michiyoshi y asociados (4) utilizaron el Modelo plástico de Bingham; Schenk y Van Laar (5) utilizaron el Modelo de Prandtl-Eyring.

En un intento por incluir la dependencia de temperatura, Cochrane (6) define el Modelo de Potencia de la siguiente manera:

$$\tau_{rz} = m e^{nAH/RT} \left(- \frac{dv_z}{dr} \right)^n \quad (2)$$

donde AH es la energía de activación de flujo.

Otro trabajo como García y asociados (7) desarrollaron un Modelo Generalizado de Robinowitsch que permite incorporación de los efectos térmicos sobre las propiedades reológicas, con la determinación de la velocidad de deformación a la pared como función de la temperatura media del fluido, temperatura a la pared y del esfuerzo cortante a la pared.

La transferencia de calor en la zona laminar de entrada térmica en fluidos no-newtonianos es controlada por contribuciones de varias fuentes, y en consecuencia resulta difícil aislar el grado de contribución de cada fuente a nivel experimental. Adicional a los mecanismos de conducción y convección forzada, podrían desarrollarse flujos secundarios debido al efecto de convección natural y presencia de esfuerzos viscosos normales. La literatura no ofrece modelos teóricos de transferencia de calor que incluyan las contribuciones de convección axial, conducción axial, conducción radial y disipación viscosa según el criterio de Cochran.

El efecto de conducción axial en la transferencia de calor para flujo turbulento en una tubería con temperatura uniforme a la pared ha sido analizado por Lee (8). Sus resultados demuestran que el efecto de conducción axial es importante a bajos números de Peclet ($P < 100$), pero despreciable en la zona térmica completamente desarrollada. Así mismo encontró que el Número de Nusselt depende solamente del Número de Reynolds.

$$N_u = 2.77 R_e^{0.0656} \quad (3)$$

válida para metales líquidos en rango $0.001 < Pr < 0.022$ para $P_e < 100$.

Hanna y Sandall (9) estudiaron el transporte convectivo de calor con disipación viscosa para fluidos Newtonianos en régimen turbulento con Números de Prandtl mayores a 1. La ecuación desarrollada es una expresión asintótica para el número de Nusselt obtenida en combinación con la difusividad térmica turbulenta de Van Driest.

En el presente trabajo se analiza el comportamiento de fluidos no-newtonianos, de naturaleza orgánica e inorgánica, con propiedades reológicas dependientes de temperaturas (aproximación de Cochrane), en un proceso de transferencia de calor con temperatura constante a la pared incluyendo convección axial, conducción radial y axial, y disipación viscosa para la componente tangencial del esfuerzo viscoso. Los resultados globales en función del número de Nusselt se analizan con variaciones de Número de Prandtl, Número de Reynolds (rango laminar), Número de Brinkman y Relación longitud/diámetro. La resolución numérica combina el Método de Colocación Ortogonal en la dirección radial y la integración en la dirección axial usando el Método de Euler para el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineales.

II. FUNDAMENTOS TEORICOS

La mayor parte de los fluidos no-newtonianos son procesados en régimen laminar a condiciones de temperatura constante, sin embargo, para estos fluidos, la transferencia de calor es controlada por la velocidad de deformación a la pared. A tal efecto conviene desarrollar modelos teóricos que incluyan el efecto de disipación viscosa sobre el proceso de transferencia de calor para un fluido viscoso a través de una tubería de radio y longitud conocidos, con el objeto de analizar las variaciones del Número de Nusselt en función del número de Reynolds, Número de Prandtl, Número de Brinkman, Número de Peclet y de las condiciones térmicas del fluido, expresadas por la ley de potencia y analizadas numéricamente por el método de colocación ortogonal.

Para un fluido puramente viscoso a través de una tubería de radio R y longitud L, con las siguientes consideraciones:

i) Perfil de velocidades completamente desarrollado y en régimen laminar; ii) No hay generación interna de calor; iii) Las propiedades de densidad, capacidad calorífica y conductividad térmica se consideran como valores promedios; la ecuación diferencial de temperatura resulta:

$$\rho C_{v,t} V \frac{\partial T}{\partial z} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{778} \tau_{rz} \frac{\partial V}{\partial r} \quad (1)$$

donde $T(r,z)$ Temperatura del fluido a cualquier posición (r,z) , V_z Componente axial de la velocidad del fluido, τ_{rz} componente tangencial del esfuerzo viscoso.

Sustituyendo del término de disipación viscosa en función de temperatura media por la aproximación de Cochrane, así combinando la definición de viscosidad aparente y el Modelo de Potencia:

$$\mu = \frac{gc\tau_{rz}}{\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)}, \quad gc\tau_{rz} = m \left(\frac{-\partial V}{\partial r}\right)^n \quad (2)$$

aproximado $\mu = \mu_{\infty} e^{A/T_m}$ resulta la siguiente expresión para la velocidad de deformación:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \left(\frac{\mu_{\infty}}{m}\right)^{\frac{1}{n-1}} e^{\frac{A}{(n-1)T_m}} \quad (3)$$

y la componente de disipación viscosa:

$$\tau_{rz} \frac{\partial v_z}{\partial r} = \left(\frac{m}{gc}\right) \left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^{n+1} = + \frac{Br\Omega}{Pe} e^{\frac{A(n+1)}{(n-1)T_j}}; j=1 \dots N \quad (8)$$

$$= \frac{m}{gc} \left(\frac{v_z}{m}\right)^{\frac{n+1}{n-1}} e^{\frac{A(n+1)}{(n-1)T_m}} \quad (4)$$

donde T (z) representa la temperatura media del fluido T_m o mixing cup temperature, dada por la definición

$$T_m(z) = \frac{\int_0^R v_z T(r,z) r dr}{\int_0^R v_z r dr} \quad (5)$$

El coeficiente convectivo de transferencia de calor, al combinar la Ley de Enfriamiento de Newton con un balance diferencial de calor, resulta

$$h = \frac{\rho c v_z \hat{V} D}{4} \frac{d}{dz} \left(\frac{T_m - T(r,o)}{T_w - T(r,o)} \right) \quad (6)$$

Las condiciones de transferencia :

i) Perfil de velocidad aproximado a un Modelo de Potencia

$$\frac{v_z}{v_z(o)} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{1+1/n}$$

ii) Temperatura de entrada constante, T(r,o); Temperatura del fluido a la pared constante en la región de transferencia T(R,Z); Flujo axial de calor al extremo de la tubería, $q_z = -k \partial T / \partial z = h(T_m - T_w)$.

Adimensionando con $u = v_z / v_z(o)$, $\bar{z} = z/L$, $x = r/R$, $\theta = [T(r,z) - T(r,o)] / [T(R,z) - T(r,o)]$ e introduciendo los Números adimensionales, Peclet (Pe) = $v_z(o) L / \alpha$, Prandtl (Pr) = $\mu / \rho \alpha$, Reynolds (Re) = $v_z(o) D / \mu$, Brinkman (Br) = $(1/778) m^{n+1} v_z(o)^{n+1} / gc k L^{n+1} \Delta T$ y Parámetro $\Omega = (L/v_z(o))$

$(\mu/\rho m)^{(n+1)/(n-1)}$; puede escribirse así en colocación ortogonal (10,11) las Ecs(1), (5), (6) :

$$U_j \frac{d\theta_j}{dz} = \frac{1}{Pe} \frac{d^2\theta_j}{dz^2} + \left(\frac{2L}{R}\right) \left(\frac{1}{Re Pr}\right) \sum_{j=1}^{N+1} B_{ji} \theta_{ij} +$$

donde

$$\frac{T_j - T(r,o)}{T_w - T(r,o)} = \frac{\sum_{i=1}^{N+1} W_i U_i \theta_{ij}}{\sum_{i=1}^{N+1} W_i U_i} \quad (9)$$

$$Nu_k = \frac{Re Pr}{4L/D} \frac{\sum_{j=1}^{M+1} W_j U_j \theta_{ji}}{\sum_{j=1}^{M+1} W_j U_j} \quad (10)$$

De igual manera, las condiciones de transferencia: $U_j = 1 - x_j^{1+1/n}$ donde x_j punto de colocación ortogonal (11)

$$\theta_{M+1,i} = 1.0 \quad a \quad x_{M+1} = 1 \quad (12)$$

$$\theta_{j,0} = 0 \quad a \quad z = 0 \quad (13)$$

$$- \sum_{L=1}^{N+1} A_{N+1,L} \theta_{jL} = Nu_u \left(\frac{\sum_{j=1}^{M+1} W_j U_j \theta_{j,N+1}}{\sum_{j=1}^{M+1} W_j U_j} - 1 \right) ; j = 1 \dots M \quad (14)$$

Mediante la utilización de un programa de computación (12) se logró resolver el sistema de ecuaciones diferenciales obtenido al aplicar el método de colocación ortogonal (asumiendo geometría planar asimétrica y geométrica cilíndrica simétrica) a la ecuación diferencial en derivadas parciales proveniente del balance diferencial de temperatura para un fluido viscoso a través de una tubería de radio R y longitud L.

El programa calcula el perfil de temperatura tanto en la dirección radial como axial en los diferentes puntos de colocación ortogonal, así como también la variación del Número de Nusselt en la posición axial. Debe indicarse además, que dicho programa previamente calcula las matrices del método de colocación ortogonal para las diferentes geometrías involucradas en el proceso.

III. DISCUSION DE RESULTADOS

El análisis realizado tomando $N=5$ y $N=6$ puntos de colocación ortogonal, para geometría planar asimétrica y geometría cilíndrica simétrica respectivamente; considerando un factor pesante $W=1$, lo que permite un mejor enfoque del proceso, ya que se estudian siete (7) posiciones radiales en la tubería; implicando ésto una mayor exactitud de los cálculos.

Se estudiaron soluciones de Polímeros WSRN 3000-Agua en las concentraciones de 2000 y 4000 ppm respectivamente, mezclas de Bentonita-Agua en las composiciones de 4, 6 y 8% P/V, mezclas de Crudo-Gas Oil en las relaciones volumétricas de 1:1, 2:1, 3:1 y 3:2 respectivamente, y Aceite Diesel Lubricante. De la caracterización reológica, condiciones de flujo y rango de calentamiento de los experimentos de la literatura (7), se promediaron valores de los Números de Reynolds, Prandtl y Brinkman, presentados en la Tabla No. 1.

A partir de los resultados obtenidos mediante el computador, se construyeron las gráficas de Número de Nusselt en función de la posición axial; para diferentes valores de Número de Reynolds (10, 200 y 1000), manteniendo el resto de los datos del sistema constantes, tanto para el sistema Polímero WSRN 3000-Agua de concentración 2000 ppm como para el sistema Bentonita-Agua de concentración 6% P/V; para estos dos sistemas se presentan la discusión y resultados obtenidos.

En las Figuras Nos. 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se observa que para una misma posición axial un aumento en el número de Reynolds implica un incremento en el respectivo valor del Número de Nusselt, con la aproximación asintótica hacia el extremo de la longitud de transferencia.

De igual manera se observa en las Figuras 7 y 8, el Número de Nusselt en función de la posición axial para diferentes valores del Número de Prandtl (10000, 5000 y 1000), manteniendo el resto de los datos del sistema constantes.

De este caso la disminución del Número de Prandtl hace que el valor del Número de Nusselt sea menor para una misma posición axial. Como consecuencia el perfil de temperatura tanto en la dirección axial como radial es creciente, esto determina una disminución en la conductividad térmica, un incremento en el Número de Prandtl y a su vez en el Número de Nusselt.

Los efectos asociados de los Números de Reynolds y Prandtl sobre el Número de Nusselt se correlacionan así :

Para la mezcla Polímero-Agua :

$$Nu = 1.803 R_e^{0.2693} P_r^{0.2789} ;$$

$$(L/D) \leq 30 \text{ y } Br \leq 0.00348$$

Para la mezcla Bentonita-Agua :

$$Nu = 0.492 R_e^{0.3402} P_r^{0.3408} ;$$

$$(L/D) \leq 30, \text{ Br } \leq 0.000228$$

En las Figuras No. 9 y 10 muestran los efectos del Número de Brinkman (o efectos de disipación viscosa) sobre el número de Nusselt a través de la longitud de transferencia. Demuestran que esta variación guarda una relación directamente proporcional con respecto al valor del Número de Nusselt para una misma posición axial; así como también, a medida que se aumenta la posición axial, el valor del Número de Nusselt se hace cada vez menor. El incremento del Número de Brinkman implica una mayor conversión de los efectos friccionales del fluido en energía térmica y en consecuencia un mayor gradiente de temperatura a la pared del fluido, y disminuye en la medida que resulta completamente desarrollada el perfil de temperatura o resultan menos apreciables los efectos viscosos frente a la contribución convectiva de calor. Los efectos sobre el Número de Nusselt para el sistema Polímero-Agua son mayores que para el sistema Bentonita-Agua.

En las Figuras No. 11-12 se observa la influencia de la relación (L/D) sobre el Número de Nusselt en función de la posición axial. Se observa que a medida que aumenta esta relación el valor del Número de Nusselt disminuye para una misma posición axial, lo que indica que se mantiene una relación inversamente proporcional. El incremento de la relación L/D tiende a reducir el gradiente de temperatura entre la pared y el centro de la tubería, y en consecuencia el Número de Nusselt.

En las Figuras No. 15-16 se muestra el perfil de temperatura en la dirección radial a las posiciones axiales $Z/L = 0.769$ y 0.958 para los sistemas Polímero-Agua y Bentonita-Agua respectivamente, la aproximación numérica por colocación ortogonal satisface los extremos de borde a $r/R=0, \theta(0,z) \rightarrow 0$ y $r/R=1, \theta(1,z) \rightarrow 1$. Se puede observar que para una misma posición axial, el perfil de temperatura se desarrolla en forma creciente desde el centro de la tubería hacia la pared, lo cual es de esperarse ya que a medida

que se tiende a la pared aumenta la transferencia de calor, así como también se observa que al aumentar la posición axial, el perfil de temperatura sufre un incremento para una misma posición radial.

La característica del perfil de temperatura para el sistema Polímero-Agua es de amplia distribución con gradientes de temperaturas diferenciadas entre $r/R=0$ hasta $r/R=1$, mientras para el sistema Bentonita-Agua se desarrolla el gradiente de temperatura para la región del fluido próxima a la pared del fluido a partir de $r/R=0.40$ hasta $r/R=1.00$.

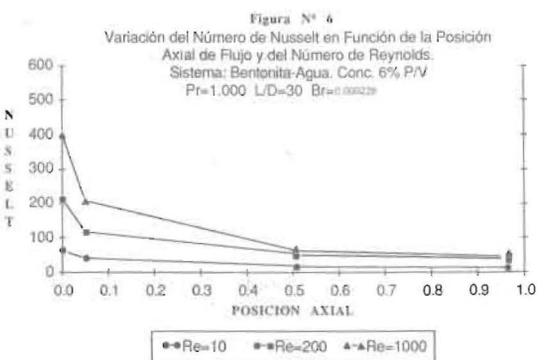
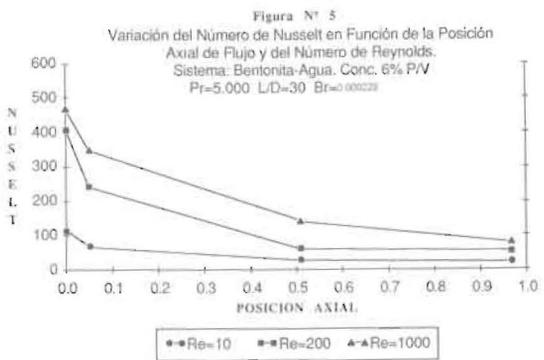
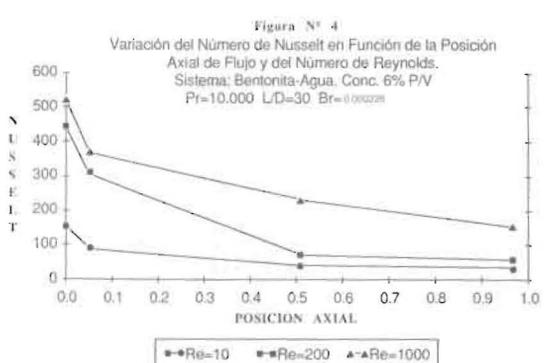
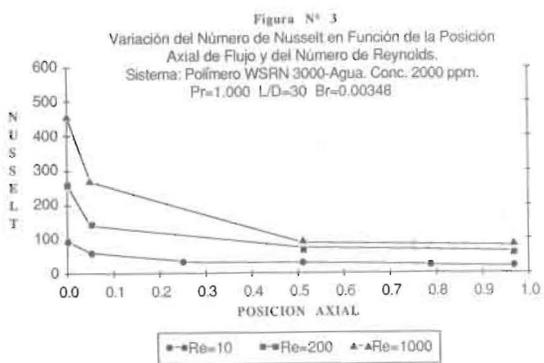
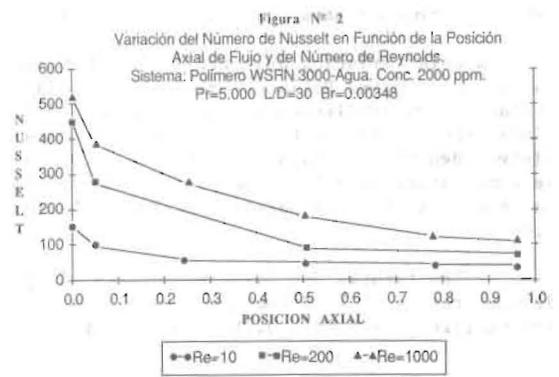
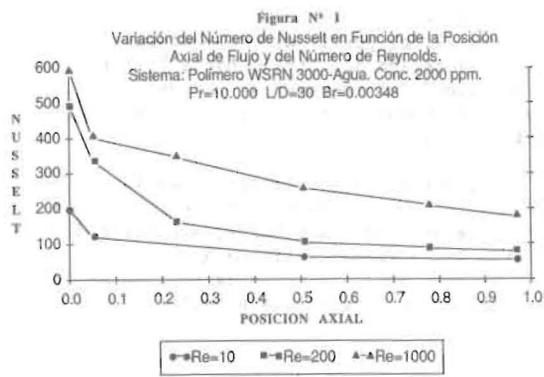
En las figuras No. 13-14 se muestra el perfil de temperatura en la dirección axial a las posiciones radiales $r/R=0.787$, 0.912 y 0.983 para los sis-

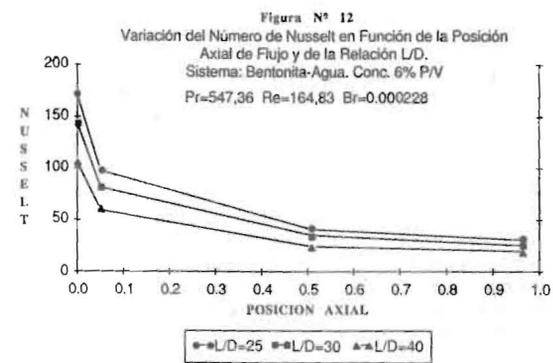
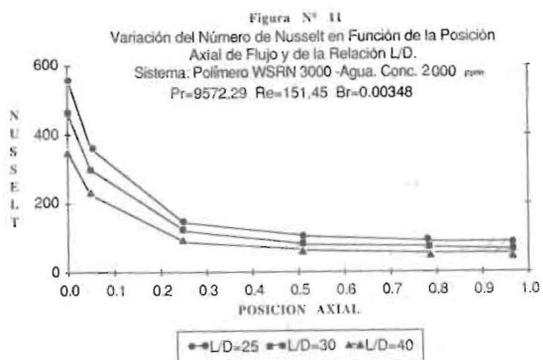
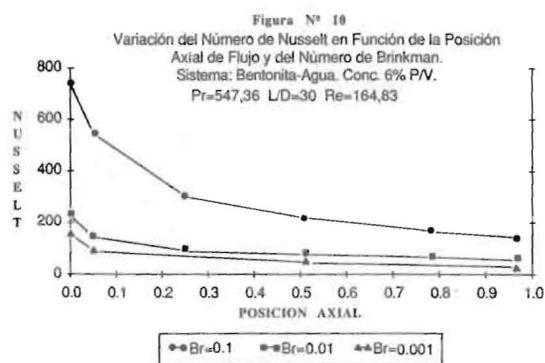
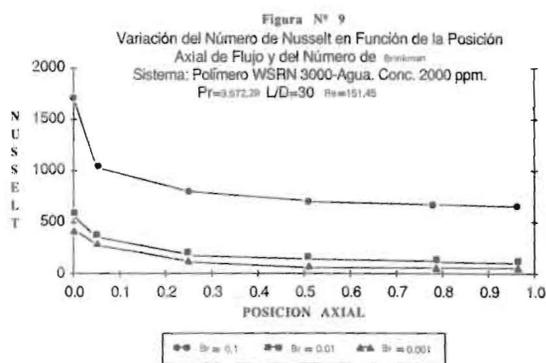
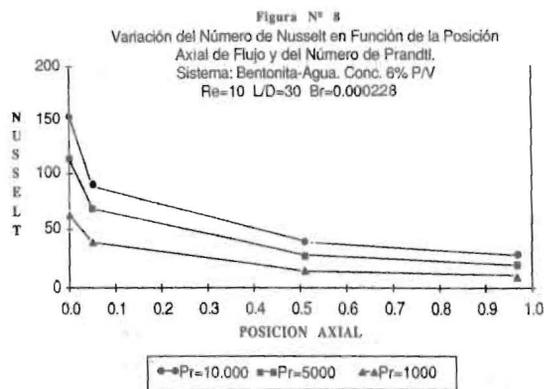
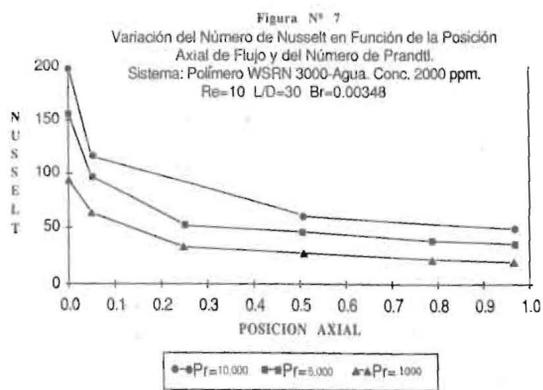
temas Polímero-Agua y Bentonita-Agua respectivamente, la aproximación numérica por colocación ortogonal satisface los extremos de borde a $z=0$, $\theta(0,r) \rightarrow 0$ y a $z=L$, $\theta/\partial z \rightarrow 0$. Se observa que para una misma posición radial, el perfil de temperatura es creciente desde la región de entrada hacia lo largo de la tubería, además al incrementar la posición radial el perfil de temperatura sufre un aumento para una posición axial.

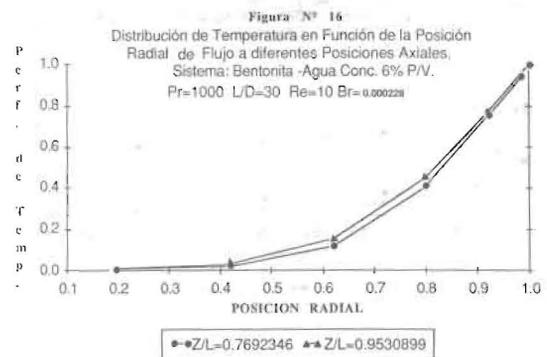
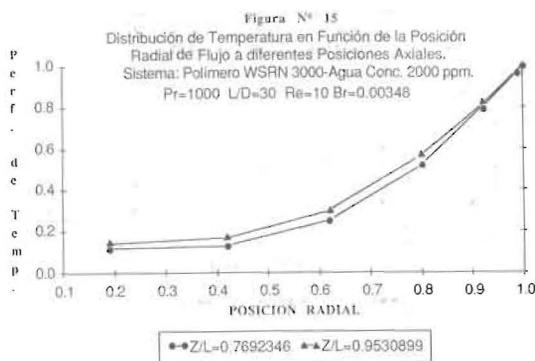
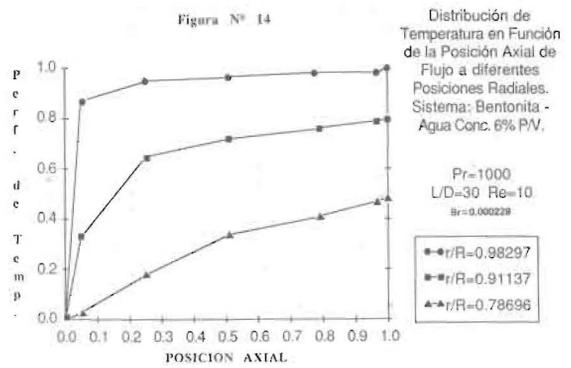
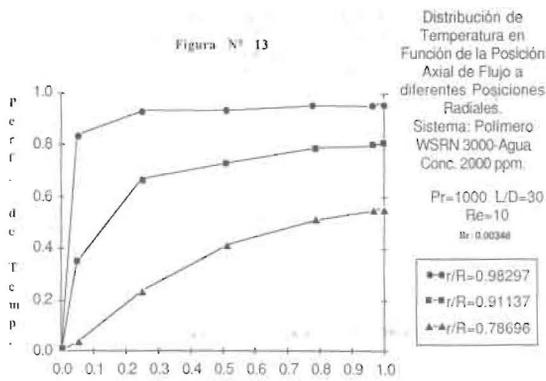
La característica diferencial es la relación de gradientes en incremento como se aproxima el fluido a la pared de la tubería, sin mayor diferencia entre los sistemas Polímero-Agua y Bentonita-Agua, excepto para las capas de fluidos en la vecindad del eje central de la tubería.

TABLA No. 1 : VALORES DE REYNOLDS, PRANDTL Y BRINKMAN OBTENIDOS DE LA DATA EXPERIMENTAL (7)

SISTEMA	PRANDTL	REYNOLDS	BRINKMAN
Polímero WSRN 3000-Agua Conc. 2000 ppm	9572.29	151.45 179.50	3.489×10^{-3}
Polímero WSRN 4000-Agua Conc. 4000 ppm	9485.12	112.43 147.25	2.81×10^{-2}
Bentonita-Agua Conc. 4% P/V	428.21	301.26 318.47	1.388×10^{-5}
Bentonita-Agua Conc. 6% P/V	547.36	164.83 207.06	2.288×10^{-4}
Bentonita-Agua Conc. 8% P/V	588.16	137.76 104.88	3.48×10^{-8}
Crudo-Gas Oil Rel. 1:1 V/V	4619.10	36.33 42.81	1.25×10^{-5}
Crudo-Gas Oil Rel. 2:1 V/V	2883.45	37.38 40.29	3.25×10^{-12}
Crudo-Gas Oil Rel. 3:1 V/V	1929.35	61.52 72.71	3.74×10^{-3}
Crudo-Gas Oil Rel. 3:2 V/V	1244.75	66.59 75.09	7.64×10^{-3}
Aceite Diesel Lubricante	7804.04	53.93 54.44	1.05×10^{-2}







IV. CONCLUSIONES

La utilización del método de colocación ortogonal en combinación con un método numérico, permite resolver y analizar en forma rápida el modelo diferencial que rige el proceso de transferencia de calor.

El comportamiento de fluidos no-newtonianos, de naturaleza orgánica e inorgánica, con propiedades dependientes de temperatura fueron analizadas incluyendo convección axial, conducción radial y axial y disipación viscosa para la componente tangencial del esfuerzo viscoso.

Los resultados de transferencia de calor expresados en función del Número de Nusselt se correlacionaron así:

$$\text{Sistema Polímero-Agua } N_u = 1.803 R_e^{0.2693} P_r^{0.2789}$$

y

$$\text{Sistema Bentonita-Agua } N_u = 0.492 R_e^{0.3402} P_r^{0.3408}$$

El efecto de disipación viscosa mostró la mayor variación sobre el Número de Nusselt, así para el Sistema Polímero-Agua el Número de Nusselt en condiciones de transferencia completamente desarrolladas varía entre 100 a 600 para Número de Brinkman entre 0.001 a 0.10 respectivamente, mientras para el sistema Bentonita-Agua varía entre 25 a 100 el Número de Nusselt.

V. NOMENCLATURA

A_{ji} = Matriz de colocación en la primera derivada
 A = Parámetro de temperatura en la expresión de viscosidad aparente °R
 B_{ij} = Matriz de colocación en la segunda derivada
 Br = Número de Brinkman
 $C_{v,T}$ = Capacidad Calorífica del fluido BTU/lbm °F
 D = Diámetro de tubería ft
 h = Coeficiente convectivo de transferencia BTU/hrft °F
 k = Conductividad térmica del fluido BTU/hrft °F
 L = Longitud de tubería ft
 m = Parámetro del Modelo de Potencia
 Nu = Número de Nusselt
 n = Parámetro del modelo de potencia
 Pr = Número de Prandtl
 R = Radio de tubería ft

Re = Número de Reynolds
 T = Tempertura del fluido °F
 u_j = Velocidad axial en notación de colocación
 v_z = Velocidad axial ft/sg
 z = Dirección axial ft
 w = Matriz de cuadratura

LETRAS GRIEGAS

ρ = densidad del fluido lbm/ft³
 θ = temperatura adimensional
 θ_{ji} = temperatura adimensional en notación de colocación
 τ = componente tangencial del esfuerzo cortante lbf/ft²
 ν = viscosidad cinemática ft²/sg
 α = difusividad térmica ft²/sg
 Ω = parámetro cinemático no-newtoniano

VI. LITERATURA CITADA

- 1) BASSETT CH. and WELTY J. : A.I.C.H.E.J., 21, 699 (1975).
- 2) BIRD R.B. : Chem. Ing. Teck., 31, 569 (1959).
- 3) MITSUISHI N. and MIYATEKE O. : Chem. Eng. Japan, 5, 82 (1967).
- 4) MICHYOSHI I. and MATSUMATO R. : Bull. Jap. Soc. Mec. Engrs., 7, 376 (1964).
- 5) SCHENK J. and VAN LAAR J. : Appl. Scientific Res., 7, 449 (1958).
- 6) COCHRANE, G.F. : Ph.D. Thesis, Oregon State University, Corvallis (1969).
- 7) GARCIA C., FONTALVO A. y SANCHEZ A. : Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia 5, 22 (1982).
- 8) LEE S.L. : The Can. Journal. Chem. Eng., 60, 482 (1982).
- 9) HANNA O.T. and SANDALL O.C. : Chem Eng. Commun., 18, 163 (1982).
- 10) FINLAYSON B. : "The Method of Weighted Residuals and Variational Principles", Academic Press, New York (1972).
- 11) FINLAYSON, B.: "Non-linear analysis in Chemical Engineering". Mc-Graw Book Co. New York (1980).
- 12) CORONEL J. y ZERPA R. : Tesis de Grado, Escuela de Ingeniería Química, LUZ, Maracaibo (1986).

Recibido el 1^o de abril de 1987