Rev. Téc. Ing., Univ. Zulia
Vol. 9, No. 1, 1986

INTEGRALES CON FUNCIONES GENERALIZADAS DE JACOBI Y POLINOMIOS DE RICE

José Sarabia
I.U. Politécnico
Barquisimeto, Venezuela

RESUMEN

Recientemente Kalla, Conde y Luke(Math.Comp., 38 (1982), 207-214) obtuvieron algunos resultados que involucran funciones de Jacobi. En este trabajo, extendemos sus resultados para obtener ciertas integrales que involucran polinomios de Rice e integrales Beta de funciones del tipo ${}_{p+1}F_p(\cdot)$.

ABSTRACT

Recently Kalla, Conde and Luke (Math.Comp., 38 (1982), 207-214) have studied some results involving Jacobi functions. In the present paper, we extend their results to obtain certain integrals involving Rice polynomials and Beta integrals of ${}_{p+1}F_p(\cdot)$ type functions.

1. INTRODUCCION

En [5], Kalla-Conde-Luke estudiaron la integral :

$$I^{a,b}_{\nu,\alpha,\beta} = \int_{-1}^{1} (1-x)^a (1+x)^b P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)dx \quad \text{con } Re(a)>-1,\ Re(b)>-1$$

$$\text{Donde } P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_\nu}{\Gamma(\nu+1)}\ {}_2F_1(-\nu,\nu+\lambda;\alpha+1;\ \frac{1-x}{2});$$

$\lambda = \alpha+\beta+1$, lo cual constituye una generalización de los trabajos de Blue [1], Gautschi [2] y Gatteschi [3]

En este trabajo se pretende extender los resultados anteriores, y a la vez usar estos resultados para establecer algunas integrales de polinomios de Rice [8], así como de algunas integrales tipo beta de ${}_{p+1}F_p$.

2. INTEGRAL DE FUNCIONES GENERALIZADAS DE JACOBI

Denominamos función generalizada de Jacobi de parámetros {c,p} a :

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(c,p,x) = \frac{(\alpha+1)_\nu}{\Gamma(\nu+1)}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-\nu,\ \nu+\lambda,\ c\\ \alpha+1,\ p\end{matrix};\ \frac{1-x}{2}\right) \qquad (1)$$

Donde $\lambda = \alpha+\beta+1$ y $p \neq 0,-1,-2,\ldots;\alpha,\nu \neq -1, -2,\ldots$. La cual es contínua en $[-1,1]$ si $Re(p-\beta-c) > 0$

Obsérvese que si $p=c$, $P_\nu^{(\alpha,\beta)}(c,c,x) = P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Consideremos la Integral :

$$I^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta} = \int_{-1}^{1} (1-x)^a (1+x)^b P_\nu^{(\alpha,\beta)}(c,p,x)\,dx \qquad (2)$$

con $Re(a)>-1$, $Re(b)>-1$ (manteniendo las condiciones anteriores para los demás parámetros).

Introduciendo :

$$L^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta} = \frac{(\beta+1)_\nu}{\Gamma(\nu+1)} \int_{-1}^{1} (1-x)^a (1+x)^b \times$$

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}-\nu,\nu+\lambda,c\\ \beta+1,p\end{matrix};\ \frac{x+1}{2}\right) dx \qquad (3)$$

Y si $y = -x$, obtenemos :

$$I^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta} = \int_{-1}^{1} (1-y)^b (1+y)^a P_\nu^{(\beta,\alpha)}(c,p,y)\,dy = I^{b,a,c,p}_{\nu,\beta,\alpha} \tag{4}$$

Sin embargo en general :

$P_n^{(\alpha,\beta)}(c,p,x) \neq (-1)^n P_n^{(\alpha,\beta)}(c,p,-x)$, como puede comprobarse con $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $n=1$, $c=1$, $p=2$. Y por lo tanto no se cumple una igualdad similar a la(6) de [5].

La evaluación de (2) viene del teorema 38, p. 104 de [7]. En efecto, haciendo $u=(1-x)/2$ se tiene :

$$I^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta} = \frac{2^{a+b+1}\,\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)(\alpha+1)_\nu}{\Gamma(a+b+2)\,\Gamma(\nu+1)} \times$$

$$ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-\nu,\ \nu+\lambda,\ c,\ a+1\\ \alpha+1,\ p,\ a+b+2\end{matrix};1\right) \tag{5}$$

Con $Re(a)>-1$, $Re(b)>-1$, $Re(p+1+b-c-\beta) > 0$

Derivando (5) respecto de a, tenemos :

$$\frac{\partial I^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta}}{\partial a} = J^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta} = \int_{-1}^{1} L_n(1-x)(1-x)^a(1+x)^b \times$$

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(c,p,x)\,dx = \left[L_n 2 + \psi(a+1) - \psi(a+b+2)\right] \times I^{b,a,c,p}_{\nu,\beta,\alpha}$$

$$+ \frac{2^{a+b+1}(\alpha+1)_\nu\,\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(a+b+2)} \times$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_k(\nu+\lambda)_k\,(c)_k(a+1)_k}{(\alpha+1)_k\,(p)_k\,(a+b+2)_k\,k!} \times$$

$$\left[\psi(a+1+k) - \psi(a+1) + \psi(a+b+2) - \psi(a+b+2+k)\right] \tag{6}$$

Así mismo, derivando con respecto a b, tenemos :

$$\frac{\partial I^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta}}{\partial b} = K^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta} = \int_{-1}^{1} L_n(1+x)(1-x)^a(1+x)^b$$

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(c,p,x)\,dx = \left[L_n 2 + \psi(b+1) - \psi(a+b+2)\right] \times$$

$$I^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta} + \frac{2^{a+b+1}(\alpha+1)_\nu\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(a+b+2)} \times$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_k\,(\nu+\lambda)_k\,(c)_k\,(a+1)_k}{(p)_k\,(\alpha+1)_k\,(a+b+2)_k\,k!} \times \left[\psi(a+b+2) - \psi(a+b+2+k)\right] \tag{7}$$

Observemos que si $\beta \neq -1,-2,\ldots$ y $Re(p-\alpha-c)>0$, (4) se cumple y :

$$\frac{\partial I^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta}}{\partial b} = \frac{\partial L^{b,a}_{\nu,\beta,\alpha}}{\partial b} \tag{8}$$

De (6) y (7), tenemos otras integrales de cierto interés como :

$$S^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta} = \int_{-1}^{1} L_n(1-x^2)(1-x)^a(1+x)^b\,P_\nu^{(\alpha,\beta)}(c,p,x)\,dx$$

$$= J^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta} + K^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta} \tag{9}$$

$$T^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta} = \int_{1}^{1} L_n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)(1-x)^a\,(1+x)^b\,P_\nu^{(\alpha,\beta)}(c,p,x)\,dx =$$

$$J^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta} - K^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta} \tag{10}$$

Finalmente si en (b) cambiamos x por $u=\frac{x+1}{2}$, se tiene ;

$$J^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta} = L_n 2\ I^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta} + W^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta} \qquad (11)$$

Donde : $W^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta} = 2^{a+b+1} \int_0^1 L_n(1-u)u^b\ (1-u)^a \times$

$R^{(\alpha,\beta)}_{\nu}(c,p,u)\ du$ y $R^{(\alpha,\beta)}_{\nu}(c,p,u) = P^{(\alpha,\beta)}_{\nu}(c,p,2u-1)$.

(Función de Jacobi-cc,p desplazada)

Luego ;

$$W^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta} = [\psi(a+1)-\psi(a+b+2)]\ I^{a,b,c,p}_{\nu,\alpha,\beta} +$$

$$\frac{2^{a+b+1}(\alpha+1)_\nu \Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(\nu+1)\ \Gamma(a+b+2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_k(\nu+\lambda)_k(c)_k(a+1)_k}{(p)_k(\alpha+1)_k(a+b+2)_k\ k!} \times$$

$$[\psi(a+1+k)-\psi(a+1) + \psi(a+b+2) - \psi(a+b+2+k)] \qquad (12)$$

3. OTRAS GENERALIZACIONES

Es obvio que los resultados (5), (6) y (7) se pueden generalizar para :

$$P^{(\alpha,\beta)}_{\nu}(\bar{c},\bar{p},x) = \frac{(\alpha+1)_\nu}{\Gamma(\nu+1)}\ {}_{\ell+2}F_{m+1}\left(\begin{matrix}-\nu,\nu+\lambda,c_1,\ldots,c_\ell \\ \alpha+1,p_1,\ldots,p_m\end{matrix};\frac{1-x}{2}\right)$$

Pág. 23 ✓

Donde $\bar{c} \in R^\ell$; $\bar{p} \in R^m$

En efecto de acuerdo a [7, t.38, p.104], tenemos :

$$I^{a,b,\bar{c},\bar{p}}_{\nu,\alpha,\beta} = \frac{2^{a+b+1}\ \Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\ (\alpha+1)_\nu}{\Gamma(a+b+2)\ \Gamma(\nu+1)} \times$$

$${}_{\ell+3}F_{m+2}\left(\begin{matrix}-\nu,\nu+\lambda,\ c_1,\ldots,c_\ell,\ a+1; \\ \alpha+1,\ p_1,\ldots,\ p_m,\ a+b+2;\end{matrix}\ 1\right) \qquad (13)$$

Con $p_i \neq 0,-1,-2,\ldots,\ (i=1,\ldots,m); \alpha,\nu \neq -1,-2,\ldots;$

$Re\ (\sum_{i=1}^{m} p_i - \sum_{j=1}^{\ell} c_j - \beta)>0$; $Re\ (\sum_{i=1}^{m} p_i - \sum_{i=1}^{\ell} c_{j+1} + b-\beta)>0$

Así mismo :

$$J^{a,b,\bar{c},\bar{p}}_{\nu,\alpha,\beta} = [L_n 2 + \psi(a+1) - \psi(a+b+2)]\ I^{a,b,\bar{c},\bar{p}}_{\nu,\alpha,\beta} +$$

$$\frac{2^{a+b+1}(\alpha+1)_\nu\ \Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)\ \Gamma(\nu+1)} \times$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_k(\nu+\lambda)_k \prod_{i=1}^{\ell}(c_i)_k(a+1)_k}{(\alpha+1)_k \prod_{j=1}^{m}(p_j)_k(a+b+2)_k\cdot k!} [\psi(a+1+k)-\psi(a+1)+$$

$$\psi(a+b+2)-\psi(a+b+2+k)] \qquad (14)$$

$$K^{a,b,\bar{c},\bar{p}}_{\nu,\alpha,\beta} = [L_n 2 + \psi(b+1) - \psi(a+b+2)]\ I^{a,b,\bar{c},\bar{p}}_{\nu,\alpha,\beta} +$$

$$\frac{2^{a+b+1}(\alpha+1)_\nu \Gamma(a+1)\ \Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)\ \Gamma(\nu+1)} \times$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_k(\nu+\lambda)_k \prod_{i=1}^{\ell}(c_i)_k (a+1)_k}{\prod_{j=1}^{m}(p_j)_k(\alpha+1)_k(a+b+2)_k\, k!}\left[\psi(a+b+2)-\psi(a+b+2+k)\right] \qquad (15)$$

Otro tipo de generalización es la siguiente :

Siendo : $$P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(c,p,s,x) = \frac{(\alpha+1)_{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} \times$$

$$_3F_2\left(\begin{matrix}-\nu,\ \nu+\lambda,\ c\\ \alpha+1,\ p\end{matrix};\ s\,\frac{1-x}{2}\right)$$

Tomando en cuenta [4, fórmula 12, Pág. 850]

$$I_{\nu,\alpha,\beta}^{a,b,c,p,s} = \int_{-1}^{1}(1-x)^a(1+x)^b\, P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(c,p,s,x)\,dx =$$

$$\frac{2^{a+b+1}\,(\alpha+1)_{\nu}\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(\nu+1)\ \Gamma(a+b+2)}\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-\nu,\ \nu+\lambda,c,a+1\\ \alpha+1,p,\ a+b+2\end{matrix};\ s\right) \qquad (16)$$

Donde además de las condiciones exigidas en (1), (2) y (5), se debe tener $|s|<1$.

Derivando con respecto a s, y tomando en cuenta [7, Prob. 2, P. 107] así como [4, fórmula (12), P. 850], se tiene :

$$U_{\nu,\alpha,\beta}^{a,b,c,p,s} = \frac{\partial I_{\nu,\alpha,\beta}^{a,b,c,p,s}}{\partial s} =$$

$$-\frac{2^{a+b+1}\ \Gamma(\alpha+1+\nu)\ (\nu+\lambda)c}{p.\ \Gamma(\alpha+2)\ \Gamma(\nu)}\int_0^1 u^{a+1}(1-u)^b \times$$

$$_3F_2\left(\begin{matrix}-\nu+1,\nu+\lambda+1,c+1\\ \alpha+2,\ p+1\end{matrix};\ su\right)du$$

$$= -\frac{2^{a+b+1}\Gamma(\alpha+1+\nu)(\nu+\lambda)c\ \Gamma(a+2)\Gamma(b+1)}{p\ \Gamma(\alpha+2)\Gamma(\nu)\Gamma(a+b+3)}$$

$$_4F_3\left(\begin{matrix}-\nu+1,\ \nu+\lambda+1,\ c+1,\ a+2\\ \alpha+2,\ p+1,\ a+b+3\end{matrix};\ s\right) \qquad (17)$$

Donde los parámetros cumplen las condiciones de (16) y además $\nu\neq 0$.

4. POLINOMIOS DE RICE

Si en (1), hacemos $\nu=n$ y $\alpha=\beta=0$, tenemos los denominados polinomios de Rice (Ver [8]). O sea :

$$P_n^{(o,o)}(c,p,x) = {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n,\ n+1,\ c\\ 1,\ p\end{matrix};\ \frac{1-x}{2}\right)=H_n(c,p;x) \qquad (18)$$

La evaluación de las integrales (5),(6),(7), (9),(10) y (11) para este caso particular no ofrece mayor interés, aparte de obtenerse polinomios en x.

Así por ejemplo :

$$I_{n,o,o}^{a,b,c,p} = \int_{-1}^{1}(1-x)^a(1+x)^b\, H_n(c,p,x)\,dx$$

$$= \frac{2^{a+b+1}\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n,n+1,c,a+1\\ 1,p,a+b+2\end{matrix};1\right) \qquad (19)$$

Sin embargo hay un caso de particular interés, y es cuando $p=a+1$ ($a\neq -1,-2,\dots$ y $a>-1$)

En efecto; de acuerdo a [4, fórmula 11, Pag. 850]

$$B_n^{a,b,c} = I_{n,o,o}^{a,b,c,a+1} = \int_{-1}^{1} (1-x)^a (1+x)^b H_n(c,a+1,x)dx =$$

$$\frac{2^{a+b+1}\,\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n,n+1,\ c\\ 1,a+b+2\end{matrix};1\right)$$

$$B_n^{a,b,c} = (1-x)^a(1+x)^b\, H_n(c,a+1;x)\, dx =$$

$$\frac{2^{a+b+1}\,\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}\, H_n(c,a+b+2;-1) \qquad (20)$$

Derivando respecto de a, tenemos :

$$\frac{\partial B_n^{a,b,c}}{\partial a} = \int_{-1}^{1} \left[L(1-x)H_n(c,a+1;x) + \frac{\partial H_n}{\partial a}(c,a+1;x)\right] \times$$

$$(1-x)^a(1+x)^b\, dx = \left[L_n 2 + \psi(a+1) - \psi(a+b+2)\right]\times B_n^{a,b,c}$$

$$+\ \frac{2^{a+b+1}\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}\, \frac{\partial H_n}{\partial a}(c,a+b+2;-1) \qquad (21)$$

$$a \neq -1,-2,\ldots\ ;\ a > -1,\ \mathrm{Re}(b) > -1$$

Así mismo, integrando término a término, tenemos

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^a(1+x)^b \frac{\partial H_n}{\partial a}(c,a+1;\ x\ )\, dx = 2^{a+b+1} \times$$

$$\Gamma(a+1)\Gamma(b+1) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k(n+1)_k(c)_k}{\Gamma(a+b+2+k)(k!)^2}\left[\psi(a+1)-\psi(a+1+k)\right] \qquad (22)$$

Finalmente, tenemos que en (16) para : $p=a+1$, $\nu=n$, $\alpha=\beta=0$

$$B_n^{a,b,c,s} = I_{n,o,o}^{a,b,c,a+1,s} = \int_{-1}^{1} (1-x)^a (1+x)^b H_n(c,a+1;sx)dx$$

$$= \frac{2^{a+b+1}\,\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}\, H_n(c,a+b+2;1-2s) \qquad (23)$$

$$a \neq -1,-2,\ldots;a>-1,\ \mathrm{Re}(b)>-1,\quad |s|<1$$

Reconocimiento

Agradezco al Dr. Shyam Kalla las valiosas sugerencias y conjeturas que dieron lugar a este trabajo.

BIBLIOGRAFIA

1) BLUE, J. : "*A Legendre Polynomial Integral*", Math. Comp. Vol. 33, 1979, pp. 739-741.

2) GAUTSCHI, W. : "*On the preceding paper*" " *A Legendre Polynomial Integral*", by James Blue, Math. Comp. Vol. 33, 1979, pp. 742-743.

3) GATTESCHI, L. : " *On Some Orthogonal Polynomial Integrals*", Math. Comp. Vol. 35, 1980, pp.1291-1298.

4) GRADSTEHYN, I.S. and RYZHIK, I.M. : *Tables of Integrals, Series and Products*", 4th ed., Academic Press, New York, 1965.

5) KALLA, S., CONDE, S. and LUKE, Y.L. :"*Integrals with Jacobi's Functions*", Math.Comp. Vol. 38, No. 157, 1982, pp. 207-214.

6) LEBEDEV, N.N. : "*Special Functions and Their Applications*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.

7) RAINVILLE, E.D. : "*Special Functions*", The Macmillan Co., New York, 1960.

8) RICE, S.O. : "*Some properties of* ${}_3F_2(-n, n+1;\xi;1,p;\nu)$".

Recibido el 10 de Enero de 1986