

UN MODELO MATEMATICO PARA PREDECIR LAS VARIACIONES DE TEMPERATURA DE UN CRUDO CALIENTE FLUYENDO EN UN

OLEODUCTO

José Rincón M.
Escuela de Ingeniería Mecánica
Facultad de Ingeniería
Universidad del Zulia
Maracaibo, Venezuela

RESUMEN

La finalidad del presente trabajo es la determinación analítica del valor medio y las variaciones longitudinales y radiales de temperatura, así como del número de Nusselt interno, en un crudo caliente fluyendo en estado permanente a lo largo de un oleoducto para diferentes condiciones de aislamiento (representadas en el trabajo por el número de Nusselt externo, Nu_e).

Se concluyó que para tramos de longitudes cortas y moderadas es posible mantener la temperatura media al final del tramo por encima del 75% del valor al comienzo del mismo para valores de $Nu_e < 1$, igualmente a medida que Nu_e aumenta, el perfil radial de temperatura se hace más abrupto cerca de la pared y menos plano en la dirección axial.

El coeficiente de película interno varía apreciablemente con la distancia, lo cual sugiere ser cuidadoso con el uso de modelos que lo supongan constante.

ABSTRACT

The objective of this work is the analytical determination of the mean value and the longitudinal and radial variations of the temperature, as well as the internal Nusselt number, in a hot crude oil in steady flow along a pipeline, considering different levels of thermal insulation by changing an external Nusselt number, Nu_e .

It was concluded that for short and moderate pipe lengths it is possible to keep the final mean temperature above 75 % of the initial value, provided that $Nu_e < 1$. Equally, when Nu_e increases, the radial temperature profile becomes more abrupt near the wall and less uniform a whole, in the axial direction.

The internal film coefficient varies appreciably with the distance, which suggests to be careful with the use of models assuming it constant.

INTRODUCCION

Durante la operación de oleoductos que transportan crudos calientes, es importante conservar la temperatura suficientemente alta, a fin de que la viscosidad del crudo sea moderada, y así mantener las pérdidas de carga y los costos de bombeo dentro de límites razonables.

Un problema clásico de transferencia de calor es el de Graetz [1] donde se tiene un flujo laminar completamente desarrollado con propiedades constantes a lo largo de una tubería circular, despreciando la conducción axial de calor. Por consiguiente el problema en consideración puede estudiarse a través de la formulación de Graetz. La ecuación diferencial resultante tiene varias soluciones, dependiendo de la condición de borde en la pared de la tubería. Usualmente se consideran los casos de transferencia de calor o temperatura de la pared axialmente uniforme [2], condiciones de borde bastante comunes en intercambiadores de calor [3], siendo así posible obtener soluciones analíticas. Sin embargo, en este caso el enfriamiento del crudo es debido a la transferencia de calor al ambiente, la cual no es conocida a priori, sino que por el contrario es una variable que, al igual que la temperatura de la pared, debe ser determinada. Esta situación, donde se conoce la resistencia térmica (finita) externa al fluido, es referida en la literatura especializada como condición T3, la cual ha sido estudiada para casos de poco aislamiento [4], por lo que no corresponde al problema en consideración, y para casos de coeficiente interno de película (hi) constante [5], lo cual no es razonable para crudos, ya que estos tienen un alto número de Prandtl (Pr).

En conclusión, en cuanto al autor respecta, no se ha presentado una solución analítica del problema de Graetz con transferencia de calor y temperatura en la pared a ser determinadas para el fluido de trabajo y las condiciones de aislamiento del problema considerado. Por consiguiente el objetivo de este trabajo es predecir la variación longitudinal y radial de la temperatura en un crudo pesado caliente, fluyendo a lo largo de un oleoducto.

CONSIDERACIONES GENERALES

El modelo se desarrolla bajo las siguientes

suposiciones :

a) Fluído completamente homogéneo y de propiedades constantes.

b) La temperatura y el caudal son lo suficientemente altos como para que el crudo se comporte como un fluído newtoniano [6,7].

c) Oleoducto completamente sumergido en el medio que lo rodea, por lo que el problema es **axi-simétrico**.

d) Flujo permanente, uni-dimensional, laminar y completamente desarrollado. Además, el perfil de velocidades se considera parabólico, lo cual es apropiado para líquidos con altos Pr intercambiando calor con el ambiente [2,8], con esto se omite la solución de la ecuación de la cantidad de movimiento.

e) Perfil uniforme de temperaturas en la entrada.

f) La transferencia de calor del crudo al ambiente se evalúa usando la diferencia de temperatura, entre la pared interna de la tubería y el ambiente.

FORMULACION MATEMATICA

La ecuación diferencial de energía, en coordenadas cilíndricas para un líquido caliente de propiedades constantes que fluye unidimensionalmente tiene la siguiente forma [2]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{v}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1)$$

donde :

- T = temperatura
- r = coordenada radial
- z = coordenada axial
- v = velocidad axial
- α = difusividad térmica = $K/\rho c$
- K = conductividad térmica
- c = capacidad calorífica
- ρ = densidad

La forma adimensional de la Ecuación (1), luego de introducido el perfil parabólico de velocidades, es :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{1}{(\text{RePr})^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = (1-Y^2) \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (2)$$

donde :

$$\theta = (T - T_\infty) / (\bar{T}_0 - T_\infty)$$

T_∞ = temperatura ambiental

\bar{T}_0 = temperatura media de entrada

$$Y = r/r_i$$

$$X = z/\text{Re. Pr. } r_i$$

r_i = radio interno de la tubería

Re = número de Reynolds, basado en el diámetro diámetro interno de la tubería.

El tercer término del lado izquierdo de la Ecuación (2) representa la conducción axial, la cual puede despreciarse frente al resto de los términos, al ser siempre el producto Re Pr mayor que 100 para aceites [2], luego la forma final de la ecuación a resolver es :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = (1-Y^2) \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (3)$$

Esta ecuación está sometida a las siguientes condiciones de borde :

$$\theta = (0, Y) = 1 \quad \dots \dots \dots (4a)$$

$$\theta = (X, 0) = \text{finita} \quad \dots \dots \dots (4b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = (X, 1) + \text{Nu}_e \theta(X, 1) = 0 \quad \dots \dots \dots (4c)$$

donde :

- Nu_e = número de Nusselt externo, $U_r i / K$
- U = coeficiente total externo de transferencia de calor (tubería - aislante-protección-ambiente)

La Ecuación (4b) es equivalente a un gradiente radial de temperatura en la línea central igual a cero.

SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL

La Ecuación (3) es lineal y homogénea, lo cual sugiere utilizar el método de separación de variables [9] i.e.

$$\theta(X, Y) = R(Y) S(X) \quad (5)$$

Sustituyendo la Ecuación (5) en la Ecuación(3), se obtienen :

$$\frac{dS}{dX} + \lambda^2 S = 0 \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$\frac{d^2 R}{dY^2} + \frac{1}{Y} \frac{dR}{dY} + \lambda^2 R(1-Y^2) = 0 \quad \dots \quad (7)$$

donde λ es la constante de separación.

La solución de la Ecuación (6) es exponencial, i.e.

$$S = C \exp(-\lambda^2 X) \quad (8)$$

donde C es una constante de integración.

La solución de la Ecuación (7) viene dada por una serie de potencias, la cual combinada con la condición de simetría (Ecuación (4b)) se reduce a [9, 10]

$$R(\lambda Y) = A G(\lambda Y) \quad (9)$$

donde A es una constante de integración y la serie G viene dada por :

$$G(\lambda Y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} (\lambda Y)^{2k} \quad \dots \quad (10)$$

donde :

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_2 &= -0,25 \\ a_{2k} &= \frac{1}{(Rk)^2} \left[\frac{a_{2k-4}}{\lambda^2} - a_{2k-2} \right] \end{aligned}$$

λ se obtiene mediante la condición de borde en la pared (Ecuación (4c)), i.e.

$$\lambda \left. \frac{dG}{d(\lambda Y)} \right|_{Y=1} + Nue G(\lambda Y) \Big|_{Y=1} = 0 \quad (11)$$

Esta ecuación presenta un número infinito de soluciones, por consiguiente la solución final de la Ecuación (3) es :

$$\theta(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp(-\lambda_n^2 X) G(\lambda_n Y) \quad (12)$$

donde b_n es una constante de integración, cuya evaluación se logra considerando la ortogonalidad de la serie G (Ecuación (10)) e introduciendo la condición de borde de entrada (Ecuación (4a)), lo cual conduce, siguiendo el procedimiento delineado por ARPACI [9], en primera instancia a :

$$b_n = \frac{\int_0^1 Y(1-Y^2) G(\lambda_n Y) dY}{\int_0^1 Y(1-Y^2) G^2(\lambda_n Y) dY} \quad (13)$$

y finalmente, usando las Ecuaciones (7), (9) y (4c) a :

$$b_n = \frac{-2}{\lambda_n \frac{\partial G(\lambda_n)}{\partial \lambda_n} + \frac{\lambda_n}{Nue} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \left[\frac{\partial G(\lambda_n)}{2Y} \right]} \quad (14)$$

La solución del problema bajo consideración vendría dada por la Ecuación (12), donde la serie G ($\lambda_n Y$) viene dada por la Ecuación (10), λ_n es una raíz de la Ecuación (11) y b_n se evalúa mediante la Ecuación (4). Sin embargo la serie G presenta un comportamiento problemático para altos valores de λ_n , situación reportada anteriormente [11] y que puede evitarse mediante la solución asintótica conocida como la aproximación WKB [8] establecida para valores altos de λ_n , a saber.

$$G(\lambda_n Y) = J_0(\lambda_n Y), \quad Y \text{ pequeño} \quad (15)$$

$$G(\lambda_n Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda_n Y}}$$

$$\frac{\cos \left[(\lambda_n/2) Y \sqrt{1-Y^2} + (\lambda_n/2) \text{Sen}^{-1} Y - \pi/4 \right]}{(1-Y^2)^{1/4}}$$

Y moderado (16)

$$G(\lambda_n, Y) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2S} \cdot \left[\text{Sen} \left(\frac{\lambda_n \pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right) \right]^{1/3}$$

$$(\lambda_n \sqrt{8} S^{3/2/3}) + \left[\text{Sen} \left(\frac{\lambda_n \pi}{4} - \frac{2\pi}{3} \right) \right]^{-1/3} (\lambda_n \sqrt{8} S^{3/2/3})$$

Y grande (17)

donde $S = (1 - Y)$

Los resultados obtenidos indican que, para el problema en consideración la solución asintótica debe usarse a partir del cuarto valor de λ_n (i.e. $n = 4$). Además, los límites de aplicabilidad en Y de cada una de las Ecuaciones (15) - (17) se establecen por ensayo y error, y dependen del valor de Nue .

La condición correspondiente a la Ecuación(11) para la solución asintótica viene dada por :

$$(1 + \gamma \cdot \frac{K}{U \cdot \gamma_i} \cdot \lambda_n^{2/3}) \tan(\lambda_n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3} = 0 \quad (18)$$

donde $\gamma = 1.836992943 \dots$

En resumen, el perfil de temperatura (Ecuación (12)) viene dado por

$$\theta(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2 \exp(-\lambda_n^2 X) G(\lambda_n Y)}{\lambda_n \left(\frac{\partial G(\lambda_n)}{\partial \lambda_n} + \frac{1}{Nu_e} \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \left[\frac{\partial G(\lambda_n)}{\partial Y} \right] \right)} \quad (19)$$

Siguiendo el procedimiento usado por KAYS [2] la temperatura media $\bar{\theta}(X)$ se determina mediante un balance de energía obteniéndose

$$\bar{\theta}(X) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{\lambda_n^2} \exp(-\lambda_n^2 X) \quad (20)$$

donde :

$$H_n = - \frac{b_n}{2} \frac{\partial G}{\partial Y}(\lambda_n)$$

Definiendo el número de Nusselt local como $2 r_i h_i / K$ se tiene :

$$Nu_x = \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} H_n \exp(-\lambda_n^2 X)}{\sum_{n=1}^{\infty} (4/\lambda_n^2 - 1/Nu_e) H_n \exp(-\lambda_n^2 X)} \quad (21)$$

Vale la pena reiterar que los valores de λ_n y G , usados en las ecuaciones (9) - (21), dependen del primero de estos, tal como se señaló durante la discusión sobre la solución asintótica.

RESULTADOS

TEMPERATURA MEDIA

La Figura 1, muestra los valores de la temperatura media vs. x para diferentes valores de Nu_e . Como era de esperar, a medida que el Nu_e sea

menor (i.e. mayor aislamiento), mayor será la longitud, a lo largo de la cual, la temperatura media se mantiene prácticamente constante. La Figura 2 muestra la temperatura media como una función del aislamiento (Nu_e) para diversas distancias a lo largo de la tubería.

NUMERO DE NUSSELT INTERNO LOCAL

La Figura 3 presenta la variación de Nu_x vs. x para diferentes valores de Nu_e , pudiendo observar que el efecto del aislamiento sobre Nu_x es relativamente débil, lo cual también puede notarse en la Figura 4. Igualmente Nu_x se hace constante sólo a partir de grandes distancias (dígase 0.1); de forma tal que en un cooducto como el Campo Boscán-Bajo Grande en el Occidente de Venezuela (longitud=0.025), el perfil de temperatura no se desarrolló completamente.

PERFIL RADIAL DE TEMPERATURA

Del análisis del comportamiento de los perfiles de temperaturas con respecto a la distancia axial adimensional (Figura 5), se observa que para tuberías bien aisladas, i.e. bajo Nu_e , los perfiles térmicos se mantienen bastante planos a lo largo de la dirección axial y tienden a adoptar la forma parabólica a medida que el número de Nusselt externo Nu_e aumenta.

Igualmente se nota en la Figura 5, que para valores altos del número de Nusselt externo la pendiente de los perfiles de temperaturas se hacen muy abruptos cerca de la pared, obteniéndose temperaturas muy bajas en la proximidad de ésta. Si tenemos en cuenta que para los crudos parafínicos existe una temperatura por debajo de la cual cesa el movimiento ("Pour Point"), la existencia de temperaturas bajas cerca de la pared podría implicar la formación de un anillo de crudo inmóvil adherido a la pared interna de la tubería, que reduciría el área de flujo y modificaría los parámetros térmicos del problema.

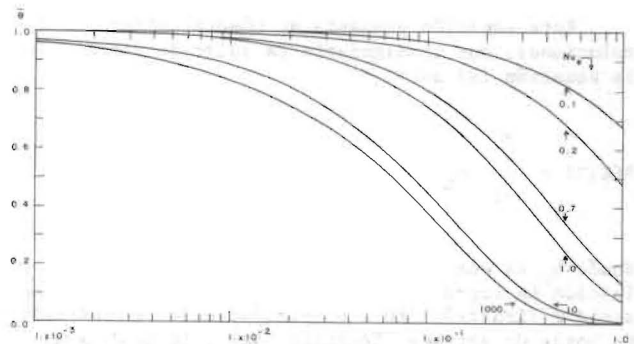


FIG. 1.- TEMPERATURA MEDIA VS DISTANCIA AXIAL PARA VARIOS VALORES DE Nu_e

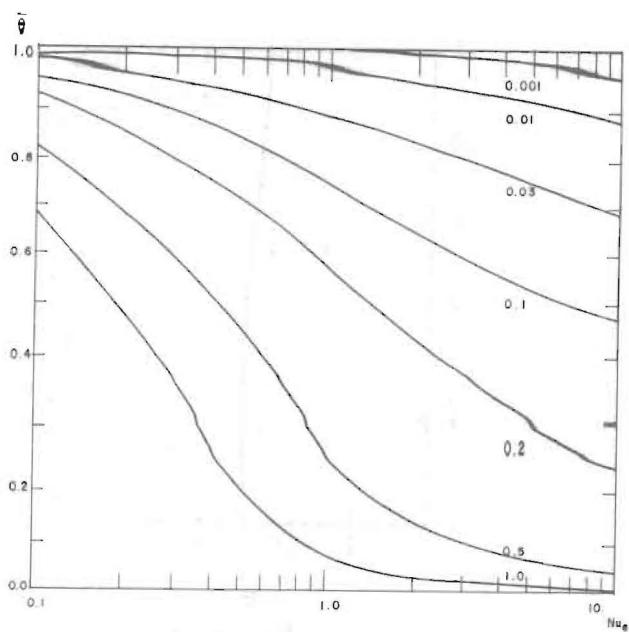


Fig. 2.- TEMPERATURA MEDIA ADIMENSIONAL VS NUSSELT EXTERNO PARA VARIAS DISTANCIAS ADIMENSIONALES

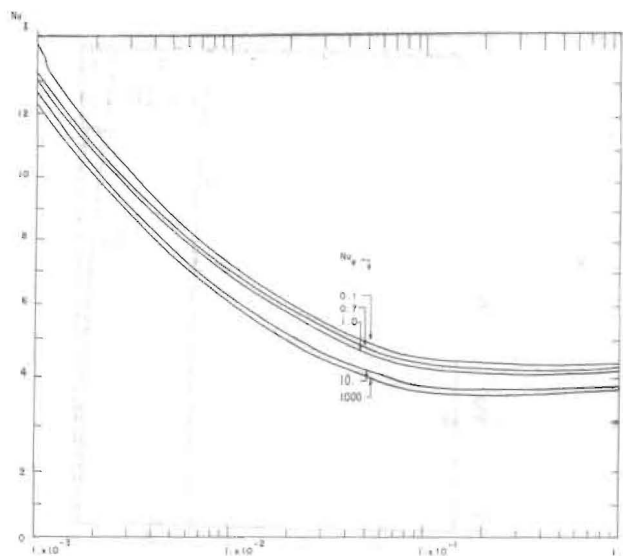


Fig. 3.- NUSSELT INTERNO LOCAL VS DISTANCIA ADIMENSIONAL PARA VARIOS VALORES DE NUSSELT EXTERNO Nu_e

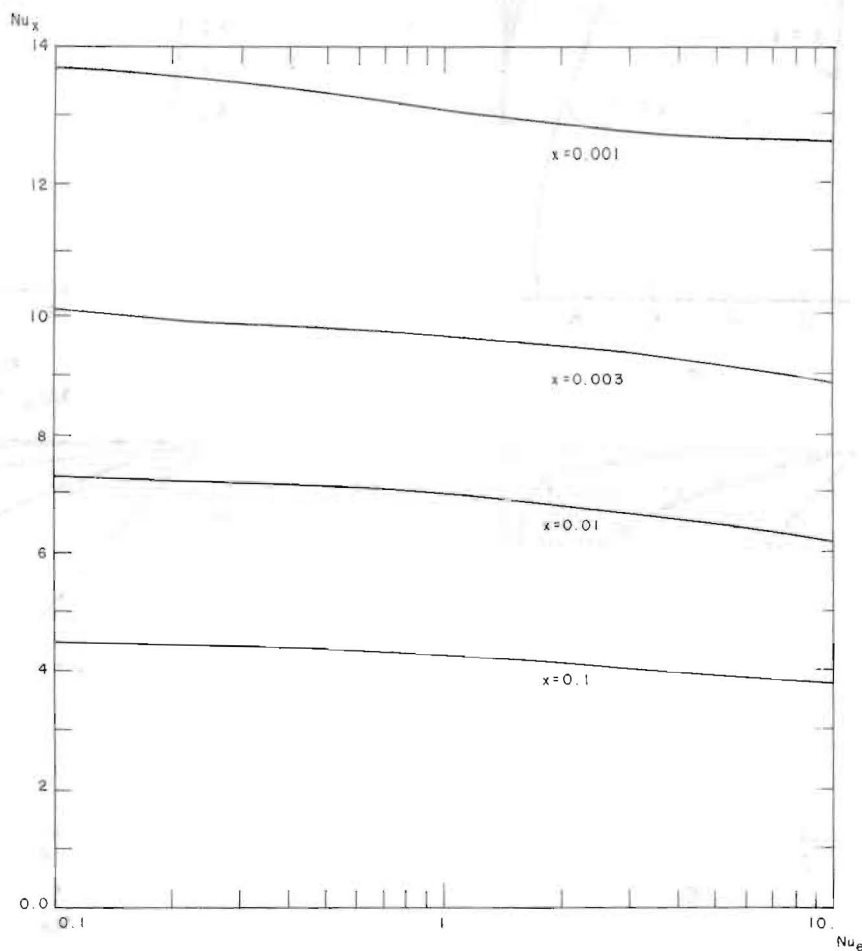


Fig. 4.- NUSSELT INTERNO LOCAL VS NUSSELT EXTERNO Nu_e PARA DIFERENTES DISTANCIAS ADIMENSIONALES

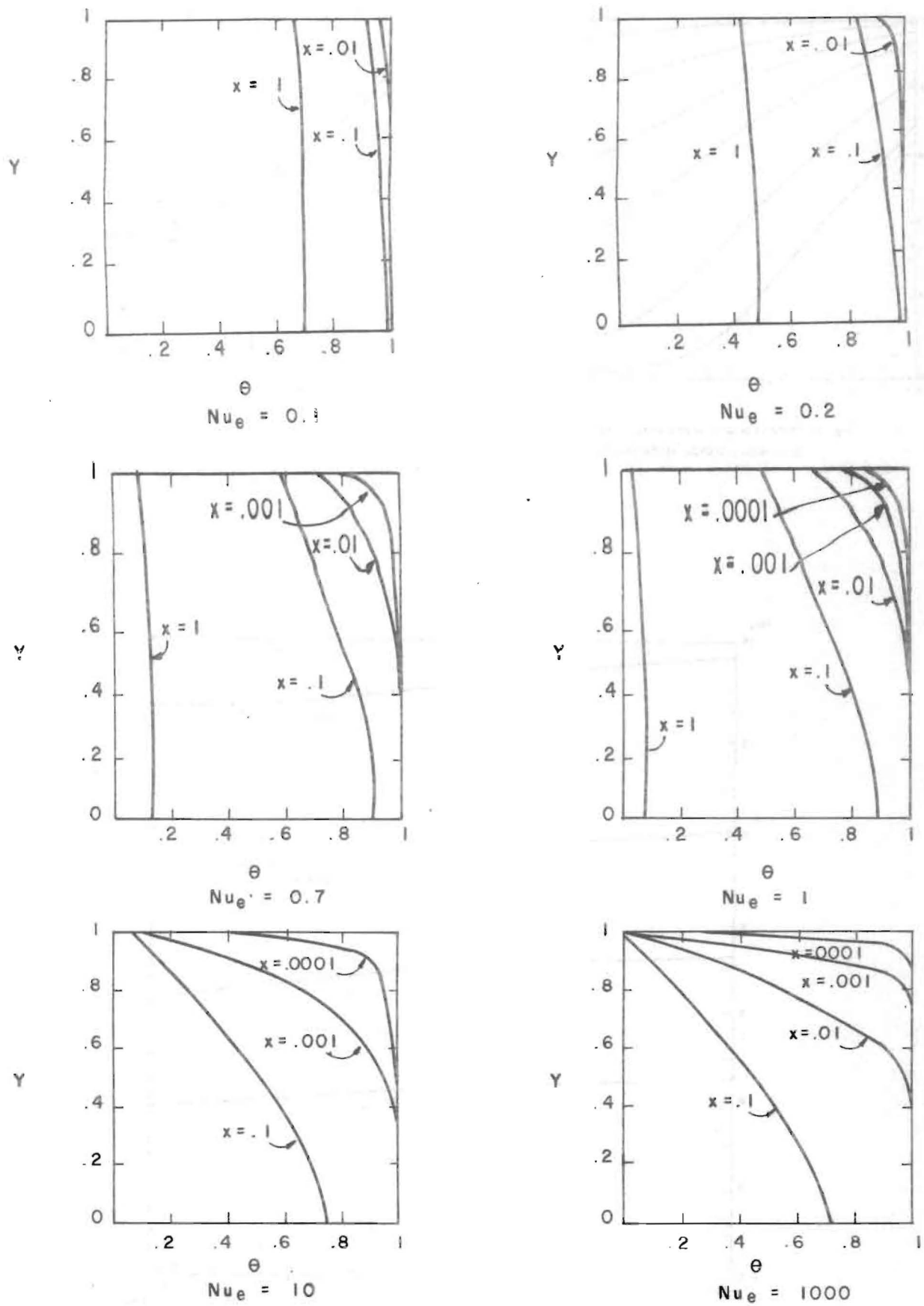


Fig. 5.- PERFILES RADIALES DE TEMPERATURA

CONCLUSIONES

1.- La serie infinita que satisface la ecuación de Graetz, la cual describe el flujo en consideración, presenta un comportamiento bastante problemático desde el punto de vista computacional, por lo que sólo puede usarse para evaluar las tres primeras raíces de la ecuación y sus soluciones; el resto de los autovalores y soluciones se tienen que obtener mediante una fórmula asintótica en términos trigonométricos y de Bessel.

2.- Para tramos de longitud cortas y moderadas (i.e.x. < 0.1 .) es posible mantener la temperatura media al final del tramo por encima del 75% del valor al comienzo del mismo para valores de $Nu_e < 1$.

3. El coeficiente de película interno local varía apreciablemente con la distancia, lo cual sugiere ser cuidadoso con el uso de modelos que lo supongan constante.

4.- Del análisis del comportamiento de los perfiles de temperatura con temperatura con respecto a la distancia axial adimensional y el número de Nusselt externo, podemos concluir que no es recomendable usar tuberías poco aisladas, ya que esto podría implicar la formación de un anillo inmóvil de crudo en la pared de la tubería.

5.- No es recomendable usar la temperatura media como parámetro de diseño decisivo, sino observar el comportamiento de los perfiles radiales de temperatura, por la razón señalada en el párrafo anterior.

NOMENCLATURA

a_{2k}	: Coeficiente de la serie de potencias.
b_n	: Constante de integración.
C	: Constante de integración.
c	: Calor específico del crudo.
G_1	: Serie en k.
h_i	: Coeficiente interno de película.
H_n	: $(-bn/2) \partial G / \partial Y$.
J	: Función Bessel
K	: Conductividad térmica
k	: Índice
Nu_e	: $U r_i / K$: Número de Nusselt externo.
P_e	: $Re Pr$: Número de Peclet.
Pr	: $\mu c / K$: Número de Prandtl.

Re	: $2r_i \bar{v} \rho / \mu$: Número de Reynolds.
r	: Coordenada radial.
r_i	: Radio interno de la tubería.
s	: Coordenada (1-Y).
T	: Temperatura.
T3	: Condición de borde de resistencia finita en la pared.
U	: Coeficiente externo de transferencia de calor.
V	: Velocidad.
x	: $X / Re Pr r_i$: Coordenada axial adimensional.
Y	: r / r_i : Coordenada radial adimensional.
z	: Coordenada axial.
α	: $K / \rho c$: Difusividad térmica del crudo.
Γ	: Función gamma
λ_n	: Constante de separación.
ρ	: Densidad del crudo.
θ	: $(T - T_w) / (\bar{T}_0 - T_w)$: Temperatura adimensional.
μ	: Viscosidad dinámica.
∞	: Condición ambiental.
-	: Valor medio.
o	: Condición a la entrada de la tubería.

REFERENCIAS

- 1) SMITH B. : "Pumping heavy crudes-1 : Guidelines Set out for pumping heavy crudes", Oil and Gas J., May 28, 1979, pp. 111-114.
- 2) SMITH B. : "Pumping heavy crudes-2 : Steps for finding crude properties", Oil and Gas J., June 4, 1979, pp. 150-152.
- 3) ARPACI V.S. : "Conduction Heat Transfer", Addison-Wesley, Reading, 1966.
- 4) TRIBUS M., KLEIN J. : "Forced Convection from Nonisothermal Surfaces". Symposium at the University of Michigan. Engineering Research Institute, 1953, pp. 211-235.
- 5) KAYS W.M. : "Convective Heat and Mass Transfer", McGraw-Hill, New York, 1966.

- 6) JAKOB M. : "Heat Transfer", Wiley, New York, 1949..
- 7) KAYS W.M. : "Compact Heat Exchangers", McGraw-Hill, New York, 1964.
- 8) SELLARS J.R., TRIBUS M. and KLEIN J.S.: "Heat Transfer to Laminar Flow in a Round Tube or Flat Conduit-The Graetz Problem Extended", Trans. ASME, 78, Feb., 1956, pp. 441-448.
- 9) DAVIS E.J. : "Exact Solutions for a Class of Heat and Mass, Transfer Problems", Can. J. Chem. Eng., 51, Oct. 1973, pp 562-572.
- 10) MICHELSEN M.L. and VILLADSEN J. : "The Graetz Problem with Axial Heat Conduction", Int. J. Heat Mass Transfer, 17, No. 11, 1974, pp.1391-1402.
- 11) KRIVOSHEIN B.L. YUFIN V.A. and AGAPKIN V. M.: "Stationary Thermal and Hydraulic Modes of Main Oil Pipelines", Soviet Power Engineering, 1972.

Recibido el 13 de marzo de 1985