



REVISTA TÉCNICA

DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA

Una Revista Internacional Arbitrada
que está indizada en las publicaciones
de referencia y comentarios:

- SCOPUS
- Compendex
- Chemical Abstracts
- Metal Abstracts
- World Aluminium Abstracts
- Mathematical Reviews
- Petroleum Abstracts
- Current Mathematical Publications
- MathSci
- Revencyt
- Materials Information
- Periódica
- Actualidad Iberoamericana

UNIVERSIDAD DEL ZULIA



REVISTA TÉCNICA
DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA

Hacia los 130 años de creación de la Universidad del Zulia

"Buscar la verdad y afianzar los valores trascendentales", misión de las universidades en su artículo primero, inspirado en los principios humanísticos. Ley de Universidades 8 de septiembre de 1970.

Richards's equation for the study of water flow in unsaturated soils, based on the Brooks Corey model

Jorge Milton Lara Sinaluisa^{1*} , Cristian Luis Inca Balseca¹ , Hugo Rolando Sánchez Quispe¹  y Julio César Mendoza³ 

¹Facultad de Informática y Electrónica, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, EC060155, Riobamba 060106, Ecuador

³Facultad de recursos naturales. Escuela Superior Politécnica De Chimborazo. Sede Orellana, el Coca. 220150, Ecuador.

³Decanato de Agronomía, Universidad Lisandro Alvarado, Barquisimeto, 3001, Venezuela.

*Autor de Contacto: j_lara@epoch.edu.ec

<https://doi.org/10.22209/rt.ve2020a02>

Recepción: 31/10/2019 | Aceptación: 14/01/2020 | Publicación: 01/03/2020

Abstract

The movement of water in the soil is one of the most important physical processes to be able to design irrigation systems, estimate the risks of contamination of agrotoxics, the recharge of aquifers and the hydrological balance in river basins, to describe this process is necessary the knowledge of a complex of physical processes which can be mathematically modeled in order to define the most precise models that allow estimating the flow of water in the soil for engineering purposes. For this, an analytical solution of Richards's equation applied to an unsaturated soil based on the Brooks-Corey model was obtained, which allowed to reduce the non-linearity of the differential equation, however the equation and its boundary conditions being non-homogeneous, merited the combined use of asymptotic approach methods and the development of self-functions. The results obtained in the solution of Richards's equation using the constitutive relation of Brooks Corey generated a Fourier series response dependent on the eigenvalues λ_n and the autofunctions $\phi_n(z)$.

Keywords: watersheds, hydrology, modeling, irrigation.

Ecuación de Richards para el estudio del flujo de agua en suelos insaturados, basada en el modelo de Brooks Corey

Resumen

El movimiento de agua en el suelo es uno de los procesos físicos más importante para poder diseñar sistemas de riego, estimar los riesgos de contaminación de agrotoxicos, la recarga de acuíferos y el balance hidrológico en cuencas hidrográficas, para describir este proceso es necesario el conocimiento de un complejo de procesos físicos los cuales pueden ser modelados matemáticamente, de tal manera de definir modelos más precisos que permitan estimar el flujo de agua en el suelo con fines ingenieriles. Para ello se obtuvo una solución analítica de la ecuación de Richards aplicada a un suelo insaturado basada en el modelo de Brooks Corey, lo que permitió reducir la no linealidad de la ecuación diferencial, sin embargo la ecuación y sus condiciones de contorno al ser no homogéneas, ameritaron el uso combinado de los métodos de aproximación asintótica y el desarrollo de auto funciones. Los resultados arrojados en la solución de la ecuación de Richards empleando la relación constitutiva de Brooks-Corey generaron una respuesta en series de Fourier dependiente de los autovalores λ_n y las autofunciones $\phi_n(z)$.

Palabras clave: cuencas hidrográficas; hidrología; modelización; riego.

Introducción

El suelo es un sistema natural abierto ubicado en la superficie terrestre y compuesto por las tres fases: líquida, sólida y gaseosa [1]. Estructuralmente, los suelos constituyen un medio particulado y poroso, el cual se puede definir como un material conformado por una parte sólida o matriz y un espacio poroso, en el cual puede ser circular gases y agua a través del perfil del suelo ocupado por agua o una o varias fases de fluido, ya sean líquidas o gaseosas [2].

El suelo, caracterizado desde una perspectiva física, es un material trifásico constituido por el esqueleto de partículas sólidas rodeado por cavidades intersticiales ocupadas por agua y aire (Figura 1). Una descripción física de un depósito de suelo se obtiene al considerar un conjunto de propiedades físicas entre las cuales destacan la relación de vacíos y la porosidad; el contenido de humedad, grado de saturación y contenido de aire; la gravedad específica y la densidad (saturada y seca); todas ellas expresadas en función de las proporciones en volumen y en masa de las fases que componen una parte de un depósito de un suelo [3].

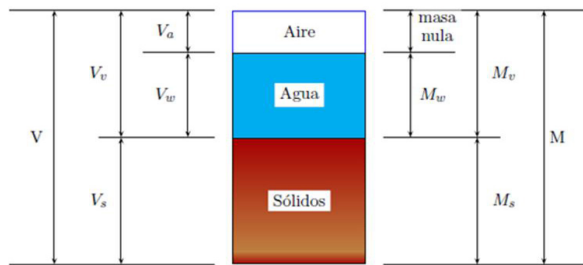


Figura 1. Esquema gráfico de las fases que componen el suelo. En donde: V: Volumen total el elemento. V_s : Volumen de sólidos. V_v : Volumen de vacíos. V_w : Volumen del agua intersticial. V_a : Volumen del aire en los poros. M: Masa total del elemento. M_s : Masa de sólidos. M_v : Masa de vacíos. M_w : Masa de agua intersticial.

En el suelo se da una variada gama de eventos de carácter físico entre los cuales destaca el movimiento del agua. El movimiento del líquido en el suelo es regulado por fuerzas de distinta naturaleza y de muy diversas intensidades y direcciones, lo cual crea gradientes de energía potencial entre puntos distintos del suelo y en consecuencia le permite al fluido discurrir entre ellos [4]. Ahora bien, la energía potencial en el suelo deriva de fuerzas de distinta naturaleza física, cada una de las cuales aporta una contribución al potencial total del agua en el suelo [5].

El agua se mueve en el suelo tanto en una condición saturada o no saturada. La zona no saturada de un suelo

representa el escenario en donde son protagonistas una serie de fenómenos, entre los cuales destaca de un modo preferente, el flujo de agua; responsable del transporte de calor y soluto en el subsuelo, además define la tasa de ocurrencia de procesos microbiológicos y de crecimiento vegetal, gobierna la transpiración, afecta la recarga de acuíferos subterráneos -controlando la escorrentía superficial- y posee otras muchas influencias sobre aspectos del medio natural [6].

El flujo vertical insaturado de humedad en un suelo puede describirse físicamente mediante una ecuación en derivadas parciales (parabólica y no lineal) conocida como ecuación de Richards. Esta, representa el modelo de flujo de agua con mayor uso en ámbitos como las ciencias agrícolas, en algunas áreas civiles, la hidrología y otras ciencias afines [7] [8].

No obstante, los modelos matemáticos usados para aplicar la ecuación de Richard tienen un alto componente no lineal, lo que hace que el mismo sea menos precisos, lo cual conlleva a una estimación inadecuada del flujo de agua en el suelo, lo cual repercute en el diseño óptimo de obras de ingeniería, en este sentido en este trabajo se propone una solución analítica de la ecuación de Richards basada en el modelo de Brook-Corey para disminuir la no linealidad de la ecuación de Richard.

Materiales y Métodos

Modelo matemático usado

El modelo matemático usado para describir el flujo de agua en el suelo fue la ecuación de Richards, el cual es una ecuación diferencial en derivadas parciales, parabólica y no lineal que se expresa como [9]:

$$\text{div}(K T^A \nabla h) = \frac{\partial \theta}{\partial t} + S_i \quad (1)$$

En donde: K es la conductividad hidráulica; h potencial del agua en el suelo; t tiempo; θ humedad presente en el suelo.; T^A es un tensor adimensional de segundo orden que representa la naturaleza anisótropa del medio; S es una fuente exterior.

Modelos analíticos evaluados

A través de la ecuación de Richards se pueden usar modelos analíticos para ajustar resultados experimentales mediante la curva tensión-humedad en medios porosos insaturados, lo cual permite estimar valores no determinados experimentalmente y en consecuencia la determinación con una mejor aproximación de magnitudes tales como la capacidad de campo, la microporosidad, el agua aprovechable y la conductividad hidráulica, entre otras [10], esta investigación se usó el modelo de Brooks-Corey para

resolver la solución analítica de la ecuación de Richards y ajustar los resultados provenientes de la curva de retención de humedad.

Curva Característica de Humedad en el Suelo

La curva característica de humedad en el suelo es la relación entre el contenido de humedad en los macro y micro poros y la succión del suelo, aunque estas se obtienen por procedimientos físicos, las mismas pueden ser de forma experimental, usando funciones de tipo matemáticas en este trabajo de investigación se usó el Brooks-Corey para ajustar un modelo matemático que permita estimar valores confiables de la curva de retención de humedad a través de la solución analítica de Richards [11].

Modelo de Brooks Corey

El modelo permite el estudio de las propiedades que caracterizan a un medio poroso insaturado y se expresa como:

$$S_e = (\alpha_{bc} h)^{-\lambda}; \quad \alpha_{bc} h > 1 \quad (2)$$

En donde S_e es, según se dijo anteriormente, el grado de saturación efectiva, el cual se calcula de acuerdo a la fórmula:

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (3)$$

Además α_{bc} es un parámetro relacionado con el valor de la presión de entrada de aire h_b de acuerdo a la expresión:

$$\alpha_{bc} = \frac{1}{h_b} \quad (4)$$

Donde h es la presión de succión y λ es un parámetro adimensional que caracteriza al índice de distribución del tamaño de los poros del suelo. Teóricamente, el valor de λ se hace muy grande (se aproxima a infinito) para un medio con una distribución de tamaño de poro uniforme; asimismo el valor de λ tiende a un valor nulo en la medida que el tamaño relativo de los poros no tiende a la uniformidad, sino que por el contrario estos tienden a valores distintos.

Método de desarrollo en auto funciones

La solución de una ecuación diferencial en derivadas parciales suele conseguirse empleando el método de separación de variables; siempre que dicha ecuación y sus condiciones de contorno sean lineales y homogéneas. Sin embargo, en muchas aplicaciones de ingeniería y en física aparecen problemas modelados por ecuaciones diferenciales parciales no homogéneas, con condiciones de contorno homogéneas o no homogéneas [12].

El método de desarrollo en auto funciones para un problema no homogéneo con condiciones de contorno homogéneas, permite desarrollar la solución desconocida $v(x,t)$ en serie de las autofunciones asociadas

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x) \quad (5)$$

Para cada t . Como $v(x,t)$ es función de x , entonces tendrá una serie de Fourier generalizada.

Método de aproximación asintótica

Muchos problemas del área de la física y de la ingeniería, en los que aparecen parámetros asintóticos, son en buena proporción modelados por medio de ecuaciones diferenciales que resultan en muchos casos de tal complejidad que su solución amerita reducirlos a problemas más sencillos, utilizando algún método de aproximación a la solución exacta de los mismos [13]. Si u es la variable independiente definida en la ecuación diferencial y $u = u(x_i, t)$, con $i=1,2,3$, entonces al incorporar ε en u se tiene que $u = u(x_i, t, \varepsilon)$. De esta manera la solución analítica aproximada es de la forma:

$$u(x_i, t, \varepsilon) = u_0(x_i, t) + \varepsilon u_1(x_i, t) + \dots \quad (6)$$

Resultados y Discusión

Formulación matemática

A continuación se presenta la formulación matemática considerando que Sea $\Omega \subset R^3$, el espacio donde se desarrolla la infiltración del fluido y $\partial\Omega$ el entorno de Ω . El contenido de humedad en el suelo se define como $\theta(x_i, t)$, en donde $x_i \in \Omega$, con $i=1,2,3$ y $t > 0$. La formulación se realizó para un suelo bajo condiciones no saturadas, como se muestra en la Figura 2.

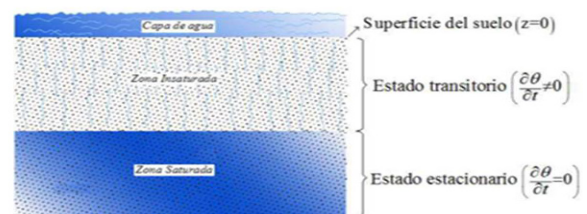


Figura 2. Esquemas de las condiciones del suelo utilizadas en el estudio.

La infiltración del agua en un suelo con una naturaleza física y mecánica conocidas se evaluó por medio de la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla q = 0 \quad (7)$$

y la Ley de Darcy, la cual establece que $q = -K \nabla h$ (8), Sustituyendo 8 en 7 y desarrollando adecuadamente se encontró la ecuación:

$$\operatorname{div}(K T^A \nabla h) = \frac{\partial \theta}{\partial t} + S_i \quad (8)$$

Esta es la ecuación conocida como la ecuación de Richards. Al expandir el término del lado izquierdo de esta ecuación y considerar que el valor del potencial en la zona no saturada se reduce a sus componentes matricial y gravitatoria, la ecuación de Richards la podemos escribir en la forma:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[K \left(T_{ij}^A \frac{\partial h}{\partial x_j} + T_{i3}^A \right) \right] - S \quad (9)$$

Si se considera que el líquido tiene solo un movimiento de descenso ($x_i = x_j = z$) y sin fuentes o sumideros ($S = 0$), la ecuación 6 se reduce a:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(K - D \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(K - D \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = -D \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\partial D}{\partial z} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial K}{\partial z}; \quad \frac{\partial K}{\partial z} = \frac{dK}{d\theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

Finalmente se consigue que:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\partial D}{\partial z} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{dK}{d\theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

Solución analítica

A objeto de reducir la no linealidad de la ecuación 10 y poder emplear métodos analíticos en su solución, se procedió a plantear una solución analítica para la ecuación de Richards considerando que:

$$\frac{\partial D}{\partial z} = 0$$

De esta manera la ecuación 10 quedó como sigue:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{dK}{d\theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

Donde la difusividad y conductividad hidráulica de un suelo se relacionan por medio de la expresión:

$$K(\theta) = - \frac{D(\theta)}{\frac{dh}{d\theta}}$$

Por medio de la relación constitutiva de Brooks Corey contenida en las ecuaciones 2 y 3 se encuentra que:

$$h = \frac{1}{\alpha_{BC}} \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^{-\frac{1}{\lambda}}$$

y además:

$$\frac{dh}{d\theta} = - \frac{1}{\alpha_{BC} \lambda (\theta_s - \theta_r)} \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^{-\frac{1}{\lambda} - 1} \quad (12)$$

$$K(\theta) = \alpha_{BC} \lambda D (\theta_s - \theta_r)^{-\frac{1}{\lambda}} (\theta - \theta_r)^{1 + \frac{1}{\lambda}};$$

$$\frac{dK}{d\theta} = \frac{\alpha_{BC} D (1 + \lambda)}{(\theta_s - \theta_r)^{\frac{1}{\lambda}}} (\theta - \theta_r)^{\frac{1}{\lambda}}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\alpha_{BC} D (1 + \lambda)}{(\theta_s - \theta_r)^{\frac{1}{\lambda}}} (\theta - \theta_r)^{\frac{1}{\lambda}} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

Sujeta a las condiciones iniciales y de contorno

$$\begin{cases} \theta(z, 0) = \theta_r \\ \theta(0, t) = \theta_s \\ \theta(L, t) = \theta_r \end{cases}$$

La solución de la ecuación en derivadas parciales sujeta a las condiciones de contorno no homogéneas, se desarrolló por medio de los métodos combinados de aproximación asintótica y desarrollo de autofunciones en series de Fourier. El resultado conseguido está expresado en la ecuación 13:

$$\theta = \Phi_0 + \varepsilon \left(\Phi_E + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(z) \right) + \theta_r$$

En donde

$$\Phi_E(z, t) = (\theta_s - \theta_r) \left(1 - \frac{z}{L} \right)$$

$$\Phi_0(z, t) = (\theta_s - \theta_r) \left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} z \right) \exp \left(-D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 t \right) + \left(1 - \frac{z}{L} \right) \right]$$

$$\phi_n(z) = \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} z \right)$$

$$a_n(t) = \frac{2(\theta_s - \theta_r)^2}{\pi L} \exp(-\lambda_n D t) \left[\frac{2\pi L^2}{(\theta_s - \theta_r)[n\pi L - \operatorname{sen}(n\pi L)]} \right]$$

$$\frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \left[D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \lambda_n \right]} \left[\exp \left(D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 t + \lambda_n \right) - 1 \right]$$

$$- \frac{\exp \left[\lambda_n - \exp \left(-D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 t \right) \right] - 1}{\lambda_n - D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2} - \frac{\exp(\lambda_n t) - 1}{n \lambda_n}$$

La solución de la ecuación de Richards en el caso de difusividad constante y el empleo de la relación de Brooks-Corey viene dada por la ecuación 13. Los datos de las propiedades físicas a considerar en este modelo, se encuentran reflejados en la Tabla 1.

Tabla 1. Características hidrodinámicas de un suelo franco arenoso usadas para la aplicación del modelo Brooks-Corey

θ_s ($cm^3 cm^{-3}$)	θ_r ($cm^3 cm^{-3}$)	α_{BC} (cm^{-1})	λ	D ($cm^2 h^{-1}$)	L (cm)
0,412	0,041	-0,095	1	0,65	100

Cuando se evaluó la evolución de la humedad en profundidad (Figura 3) usando el modelo de Brooks-Corey, los resultados observados muestran cierta similitud a los que se consiguieron con el modelo de Gardner. Aquí también se definen dos zonas de humedecimiento perfectamente diferenciadas. En la zona superior que corresponde a la parte superficial del suelo y a sus estratos más vecinos se observa que estos territorios están completamente saturados de agua, mientras que en la segunda zona, el contenido de humedad es menor pero tiende a alcanzar valores más elevados en una forma progresiva y continua mientras ocurra el proceso de infiltración.

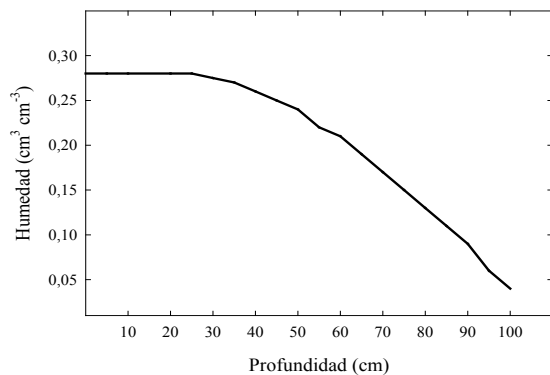


Figura 3. Evolución de la humedad en función de la profundidad, para el modelo de Brooks-Corey cuando $n=1$.

Los resultados fueron similares a los reportados [14], quienes al realizar un análisis numérico para estudiar el proceso de infiltración en suelos parcialmente saturados encontraron que el modelo COMVI (Consolidation Multiphase Viscoplastic Analysis) arrojó resultados satisfactorios en relación con la capacidad e idoneidad de modelar de manera continua la interacción y el comportamiento hidráulico de varios materiales durante el proceso de infiltración.

Previo a ello [15] evaluaron el modelo de proporcionalidad natural y los compararon con otros modelos como el de Fredlund y Xing, el de Brooks y Corey y el de van Genuchten, de lo cual se determinó que los ajustes obtenidos con el modelo de proporcionalidad y el modelo de Fredlund y Xing son similares para los casos en donde los datos de laboratorio están distribuidos de forma

uniforme y en un rango amplio de valores de succión.

Al estudiar un suelo insaturados usando el modelo de Brooks-Corey [16], encontraron que la solución analítica es fácil de usar y no requiere soluciones matemáticas complejas, los resultados expresan el comportamiento de la humedad en función de la profundidad y el tiempo, en términos generales la solución analítica puede ser aplicada para estudiar la infiltración en suelos insaturados.

Cuando se evaluó el comportamiento de la humedad del suelo a diferentes potenciales de presión (Figura 4), se observó el carácter asintótico de la función indica una relación de proporcionalidad inversa entre las variables tensión y humedad. Para valores de tensión cercanas a cero, el contenido de agua tiende al valor de saturación del suelo, mientras que si la succión se incrementa asintóticamente hacia valores elevados, la humedad en el suelo tiende a disminuir.

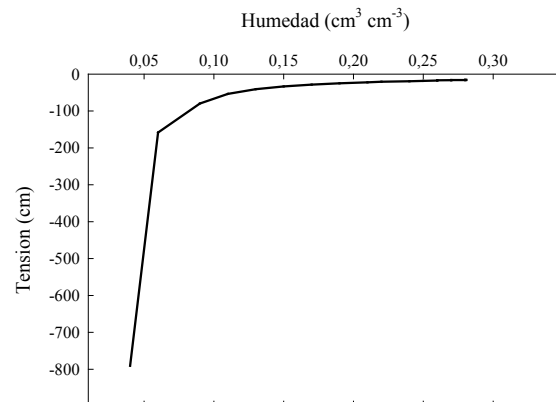


Figura 4. Evolución de la tensión en función de la humedad, para el modelo de Brooks-Corey cuando $n=1$.

Si bien el modelo de Brooks-Corey [17], expresa la curva de retención de agua como una función potencial, esta ecuación sin embargo no incluye un punto de inflexión (PI) bien definido, pero sí así un marcado AE, por lo que el modelo de Brooks-Corey funciona de forma más efectiva para tipos de suelo con un AE bien definido y para curvas de retención en forma de J, mientras que otros modelos como el de Van Genuchten, [18] sí incluye un PI pero no un AE, esto genera que este modelo represente de mejor manera los suelos con curvas en forma de S pero no las curvas tipo J, finalmente, el modelo de Vogel-Cislerova es el más reciente y se basa en una variante del modelo de Van Genuchten permitiendo la inclusión de un AE con lo cual combina las bondades del modelo de Brooks-Corey y el Van Genutche [19].

La solución analítica constituye un aporte para la eliminación de la no linealidad de la ecuación de Richards, permite extrapolar el modelo a una gama más amplia de suelos cuyo comportamiento de la humedad a diferentes tensiones responden a un modelo potencial, lo cual permite un mejor ajuste del mismo y obtener con mayor confiabilidad los parámetros hidrológicos que serán usados en modelos computarizados, para el diseño de sistemas de riego o estudios del movimiento de agua en cuencas hidrográficas con fines de evaluación de impactos ambientales y contaminación ambiental.

Conclusiones

Al considerar que la difusividad del suelo es constante se elimina la no linealidad de la ecuación de Richards y de esta forma al utilizar la relación de Brooks-Corey se pudo obtener una solución analítica de dicha ecuación, empleando los métodos de aproximación asintótica y el desarrollo en auto funciones en series de Fourier.

Referencias Bibliográficas

- [1] García, Y, Ramírez, Wendy y Sánchez, S: Indicadores de la calidad de los suelos: una nueva manera de evaluar este recurso. *Pastos y Forrajes*, Vol. 35, No. 2 (2012) 125-138.
- [2] Quintero, J. H. G., Anaya, O. C., Riobo, J. H. B. y Baquero, J. E: Evaluación de la estabilidad estructural y espacio poroso en un Oxisol de sabana de los Llanos Orientales de Colombia. *Revista de Investigación Agraria y Ambiental*, Vol. 7, No. 1 (2016) DOI:<https://doi.org/10.22490/21456453.1613>.
- [3] Aguirre-Forero, S.E., Piraneque-Gambasica, N.V. y Vásquez-Polo, J.R.: Características edáficas y su relación con usos del suelo en Santa Marta, Colombia. *Entramado*, Vol. 14, No. 1 (2018) 242-250.
- [4] Rodríguez, M.R.: Comparación del comportamiento del flujo del agua en un Ferrasol bajo riego por goteo superficial y sub superficial. *Revista Ingeniería Agrícola*, Vol. 4, No. 2 (2017) 3-9.
- [5] Saucedo, H., Zavala, M. y Fuentes C.: Modelo hidrodinámico completo para riego por melgas. *Tecnología y ciencias del agua*, Vol. 2, No. 2 (2012) 23-38.
- [6] Zavala, M., Saucedo, H. y Fuentes, C.: Modelos analíticos fractales para las propiedades hidráulicas de suelos no saturados. *Agrociencia*, Vol. 52, No. 8 (2018) 1059-1070.
- [7] Reina, I. C. N., Proaño, G. A. A., Flores, R. A. C. y Cabrera, C. F. I: Modeling and numerical simulation of the Richards equation for infiltration problems. *Enfoque UTE*, Vol. 7, No. 1 (2016) 46-58. DOI: <https://dx.doi.org/10.29019/enfoqueute.v7n1.87>
- [8] Sánchez, W. T., Aristizábal, E. F. G. y Posada, C. A. V.: Análisis numérico del proceso de infiltración de agua y localización de deformación en suelos parcialmente saturados. *Revista EIA*, Vol. 13, No. 25 (2016) 53-68.
- [9] Sadeghi, M.; Tuller, M.; Warrick, A.W.; Babaeian, E.; Parajuli, K.; Gohardoust, M.R. y Jones, S.B: An analytical model for estimation of land surface net water flux from near-surface soil moisture observations. *Journal of hydrology*, Vol. 570 (2019) 26-37.
- [10] Saucedo, H., Fuentes, C. y Zavala, M.: El sistema de ecuaciones de Saint-Venant y Richards del riego por gravedad: 3. verificación numérica de la hipótesis del tiempo de contacto en el riego por melgas. *Tecnología y ciencias del agua*, Vol. 21, No. 4 (2015) 135-143.
- [11] Carnero Carnero, E. G. y Carnero Guzmán, G. G.: Análisis numérico de infiltración de agua en un suelo residual no saturado utilizando la curva de retención de agua. *Revista de Investigaciones Altoandinas*, Vol. 20, No. 4 (2018) 439-450. DOI: <https://dx.doi.org/10.18271/ria.2018.421>
- [12] Sierra, E. Á., Díaz, L. Á. y González, M. T. A.: Una nueva alternativa numérica para la solución de la ecuación unidimensional de Richards: Estudio de drenaje e infiltración de fluidos en la zona no saturada. *Investigación & Desarrollo*, Vol. 6 (2006) 133-143.
- [13] Vigo, A. D., Zubezu, S. y Juana, L.: Algoritmo para la resolución de la ecuación de Richards en 3-d para riego por goteo: método, validación y resultados preliminares. In *Actas del XXXVII Congreso Nacional de Riegos, Don Benito (Badajoz)*, 4-6 de Junio de 2019. Asociación Española de Riegos y Drenajes y la Universidad de Extremadura. *Investigación & Desarrollo* (2019)
- [14] García-Aristizábal, E. F., Guzmán-Martínez, J. C., Gallego-Hernández, A. N y Vega-Posada, C. A.: Análisis Numérico Unidimensional del Proceso de Infiltración en Suelos Parcialmente Saturados Reforzados con Geosintéticos Permeables. *Scientia et Technica*, Vol. 24, No. 1 (2019) 46-56.
- [15] Pérez García, N., Garnica Anguas, P., & Pola Velázquez, J. C.: Predicción de la curva característica con el modelo de proporcionalidad natural.

- Publicación técnica, Vol. 361 (2013).
- [16] Hayek, M.: Analytical solution to transient Richards' equation with realistic water profiles for vertical infiltration and parameter estimation. *Water Resources Research*, Vol. 52, No. 6 (2016) 4438-4457. DOI: <https://doi.org/10.1002/2015WR018533>
- [17] Su, L., Yang, X., Wang, Q., Qin, X., Zhou, B. y Shan, Y.: Functional Extremum Solution and Parameter Estimation for One-Dimensional Vertical Infiltration using the Brooks-Corey Model. *Soil Science Society of America Journal*, Vol. 82, No. 6 (2018) 1319-1332. DOI: <https://doi.org/10.3390/w10050593>
- [18] Latorre, B. y Moret-Fernández, D.: Simultaneous estimation of the soil hydraulic conductivity and the van Genuchten water retention parameters from an upward infiltration experiment. *Journal of Hydrology*, Vol. 575 (2018) 461-469. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2019.03.011>
- [19] Stewart, R.D. y Abou Najm, M.R.: A Comprehensive Model for Single Ring Infiltration I: Initial 742 Water Content and Soil Hydraulic Properties. *Soil Science Society of America Journal*, Vol. 82, No. 3 (2018) 548-557. DOI: <https://doi.org/10.2136/sssaj2017.09.0313>



UNIVERSIDAD
DEL ZULIA

REVISTA TECNICA

DE LA FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DEL ZULIA

Volumen Especial, 2020, No. 1, pp. 03 - 55 _____

*Esta revista fue editada en formato digital y publicada en Febrero de 2020, por el **Fondo Editorial Serbiluz, Universidad del Zulia. Maracaibo-Venezuela***

www.luz.edu.ve
www.serbi.luz.edu.ve
www.produccioncientifica.luz.edu.ve