

## Lagrange's interpolation method and the evaluation of the hermetic compressor

**Leandro Ayarde Henríquez<sup>1</sup>, Karel Arencibia Ávila<sup>2</sup>,  
Franklyn González Segura<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Departamento de Física-Química-Electrónica, Universidad de Holguín. Cuba.

<sup>2</sup>Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Holguín. Cuba.

Profesor Invitado de la Universidad del Estado de Amazonas, Brasil.

layarde@facing.uho.edu.cu, arencibia.karel@facing.uho.edu.cu, frank@facing.uho.edu.cu

### Abstract

In many countries the private sector's consumption energy represents a measurable part of the total of energy the country is able to generate. Nowadays domestic refrigerator is a basic necessity which is an important user of electricity; therefore efforts to improve the efficiency of these appliances have been increased. However, in contradiction with this, the established conditions for calorimeter tests by international standards do not reach for tropical climate countries. Couple with all has been explained so far, such tests result too costly, that's the reason why the simulation of them based on a mathematical model had become a widespread technique among. Although it is important to notice that those mathematical models work on the established conditions for the international standards. Thus a brand-new mathematical model is being developed; this model does include particular characteristics of tropical climate countries. One of the bases over the mathematical model will be support of is the equations obtained by the interpolation Lagrange's method.

**Keywords:** evaluation, hermetic compressor, interpolation, tropical climate.

## Interpoladores de Lagrange y la evaluación del motocompresor hermético

### Resumen

En muchos países del mundo el consumo energético del sector residencial representa una parte importante del total consumido por el país. En la actualidad el refrigerador doméstico constituye un bien imprescindible, el cual, resulta ser uno de los mayores consumidores de energía eléctrica del hogar; de ahí que los esfuerzos para hacer que los sistemas de refrigeración sean cada vez más eficientes se hayan multiplicado. Sin embargo, y en contradicción con esto, las condiciones para los ensayos calorimétricos establecidas por las normas internacionales no logran abarcar las características climáticas de países tropicales. A esta lamentable realidad se le debe sumar el hecho de lo costoso que resultan tales ensayos, razón por la cual la simulación de estos, basada en modelos matemáticos, se ha convertido en una alternativa ampliamente utilizada por todos los países. No obstante los modelos matemáticos existentes operan sobre la base de las condiciones de ensayo dictadas por los estándares internacionales. Es por ello que se está trabajando en la elaboración de un modelo matemático que sí contemple las condiciones de clima tropical. Las bases del modelo son las expresiones polinómicas obtenidas a partir del método de interpolación de Lagrange.

**Palabras clave:** evaluación, motocompresor hermético, interpolación, clima tropical.

## Introducción

El consumo energético del sector residencial, en varios países del mundo, representa una parte importante del total generado por el país. Datos ofrecidos por la OLADE [1] revelan que en América Latina y el Caribe el consumo energético del sector residencial está entre un 16,70% y un 60,07% del total consumido por el país. De acuerdo con la IEA en dependencia de la zona geográfica el consumo energético de los refrigeradores domésticos representa entre un 5% y un 29% del total residencial [2]. En la actualidad el refrigerador doméstico resulta una necesidad básica, indispensable para el funcionamiento normal de todo hogar, una muestra de ello radica en el hecho de que hoy día se estima, que a nivel mundial, existe un refrigerador por cada seis personas [3].

Estos elementos han provocado que los esfuerzos para hacer que los sistemas de refrigeración sean cada vez más eficientes se hayan multiplicado [4]. Las condiciones para los ensayos están definidas para un único punto que corresponde en el caso de compresores de bajo torque de arranque y baja presión de aspiración (LBP) a 54,4°C de temperatura de condensación para una temperatura ambiente máxima de 32°C [5].

Varios países del mundo se encuentran dentro de la zona definida por los trópicos en donde se registran los valores picos de temperatura ambiente más altos del planeta, llegando a superar los 40°C en algunas zonas [6]. Estudios realizados por PRECIS (*Providing Regional Climates for Impacts Studies*) revelan que la temperatura superficial terrestre, en el Caribe, aumentará entre 2,3 y 3,4 grados Celsius [7]. Con lo cual se va a producir una consecuente pérdida de capacidad frigorífica de los motocompresores herméticos; desde el punto de vista energético esto significa que dicha máquina tenga que realizar un mayor trabajo para poder vencer la carga térmica y por tanto consumirá una mayor cantidad de energía eléctrica.

Lo altamente costosas que resultan las pruebas para la evaluación de los motocompresores herméticos en laboratorios certificados por los estándares internacionales de calidad es una razón más por la cual la simulación de las mismas, basadas en modelos matemáticos, se ha convertido en la alternativa más utilizada por los líderes

mundiales en la producción de motocompresores herméticos [8].

En la actualidad existe una amplia gama de modelos matemáticos entre los cuales se pueden mencionar el propuesto por Hermes y Melo [9], el de Goncalves [10], el de Borges [11] así como el de Martínez Ballester [12]. No obstante se debe reconocer que pese a la excelente modelación que se presenta en estos trabajos ninguno está referido a determinar la capacidad frigorífica del motocompresor hermético en condiciones de altas temperaturas ambiente, típicas de países de clima tropical.

De ahí la pertinencia de un novedoso modelo matemático que permita determinar la capacidad frigorífica del motocompresor hermético de bajo torque de arranque (LBP) y baja presión de aspiración (LST) para un intervalo de temperaturas más amplio que el que se establece en las condiciones de ensayo por las normas internacionales.

Las bases del modelo matemático que se propone serán expresiones polinómicas obtenidas a partir del método lagrangiano de interpolación mediante las cuales se determinan los valores de variables de naturaleza termodinámica como entalpía, entropía y volumen específico.

## Parte teórica

El modelo matemático que se propone posibilitará realizar una serie de operaciones matemáticas con el objetivo de determinar las bondades del motocompresor hermético, pero para ello se necesita conocer el valor de ciertas magnitudes físicas que caracterizan los puntos notables de operación de este, a saber, entalpía, entropía, presión y volumen específico.

Con el objetivo de deducir la expresión para el cálculo de la entalpía se consideraron los parámetros macroscópicos termodinámicos presión (P) y temperatura (T). Luego  $h = h(T, P)$  [13] y su diferencial total será:

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T dP \quad (1)$$

Utilizando la relación de Maxwell  $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T$ , sabiendo además que  $C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P$  y luego de algunas transformaciones llegamos a:

$$dh = C_v dT + d(PV) - \left[ P - \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v T \right] dV \quad (2)$$

donde:

$s$  : entropía.

$V$  : volumen.

$C_v$ : calor específico a volumen constante.

$C_p$ : calor específico a presión constante.

Si se integra la expresión (2) se tendrá el valor de la entalpía, para ilustrar las dificultades de esta vía consideremos la expresión que permite calcular el cuarto sumando de la ecuación (2) [14]:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v &= \frac{R}{V-b} + \frac{B_2 - C_2 \left( \frac{\mu k}{T_c} e^{\frac{kT}{T_c}} + \frac{3v}{T^4} \right)}{(V-b)^2} + \\ &\frac{B_3 - C_3 e^{\frac{kT}{T_c}}}{(V-b)^3} + \frac{B_4 - C_4 \left( \frac{k}{T} e^{\frac{kT}{T_c}} + \frac{v}{T} \right)}{(V-b)^4} + \\ &\frac{B_5 - C_5 \frac{k}{T_c} e^{\frac{kT}{T_c}}}{(V-b)^5} + \frac{B_6 - C_6 \frac{k}{T_c} e^{\frac{kT}{T_c}}}{e^{av} (1 + C' e^{av})} \end{aligned} \quad (3)$$

donde:

$R$  : constante universal de los gases.

$k$  : constante de Boltzmann.

$a, b, T_c, \mu, v, B_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4, 5$  y  $6$ ) y

$C_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4, 5$  y  $6$ ): constantes que se determinan experimentalmente.

Como se ve la expresión (3) está escrita sobre la base de ciertas constantes que toman valores diferentes para distintos gases y se deben determinar de manera experimental, ante esta dificultad se recurrió a los valores de las magnitudes termodinámicas que han sido tabulados para los diferentes refrigerantes.

Pero la tabulación de tales valores discretiza las magnitudes consideradas, de ahí la necesidad de utilizar polinomios interpoladores.

De acuerdo con el método de Lagrange [15], la ecuación para calcular la entalpía, en función de la temperatura, se puede expresar en forma polinomial de la manera siguiente:

$$h_{(t)} = L_{0(t)} \cdot h_0 + L_{1(t)} \cdot h_1 + \dots + L_{n(t)} \cdot h_n \quad (4)$$

Siendo:

$$L_{0(t)} = \frac{(t-t_1) \cdot (t-t_2) \cdot \dots \cdot (t-t_n)}{(t_0-t_1) \cdot (t_0-t_2) \cdot \dots \cdot (t_0-t_n)} \quad (5)$$

donde:

$h_n$  :  $n$ -ésimo valor de entalpía tabulado.

$t_n$  :  $n$ -ésimo valor de temperatura tabulado.

Como se muestra a continuación, los polinomios interpoladores  $L_{K(t)}$  ( $K = 1, 2, \dots, n$ ) se definen de manera análoga.

La combinación de (4) y (5) conduce a:

$$\begin{aligned} h_{(t)} &= \frac{(t-t_1) \cdot (t-t_2) \cdot \dots \cdot (t-t_n)}{(t_0-t_1) \cdot (t_0-t_2) \cdot \dots \cdot (t_0-t_n)} \cdot h_0 \\ &+ \frac{(t-t_0) \cdot (t-t_2) \cdot \dots \cdot (t-t_n)}{(t_1-t_0) \cdot (t_1-t_2) \cdot \dots \cdot (t_1-t_n)} \cdot h_1 \\ &+ \dots + \frac{(t-t_0) \cdot (t-t_1) \cdot \dots \cdot (t-t_{n-1})}{(t_n-t_0) \cdot (t_n-t_1) \cdot \dots \cdot (t_n-t_{n-1})} \cdot h_n \end{aligned} \quad (6)$$

La sustitución directa de los valores tabulados de entalpía y temperatura en (6), permite obtener un polinomio que, en nuestro caso, fue de grado cinco:

$$h_{(t)} = a \cdot t^5 + b \cdot t^4 + \dots + f \quad (7)$$

Si siguiendo el procedimiento para la entalpía, (4) – (6), se obtuvieron expresiones análogas para la entropía y el volumen específico:

$$s_{(t)} = a' \cdot t^5 + b' \cdot t^4 + \dots + f' \quad (8)$$

$$v_{e(t)} = a'' \cdot t^5 + b'' \cdot t^4 + \dots + f'' \quad (9)$$

donde:  $a, a', a'', b, b', b''$  y  $f, f', f''$  son coeficientes y términos independientes respectivamente.

Los polinomios (7), (8) y (9) permiten calcular el valor de la entalpía, entropía, y volumen específico respectivamente, como primer paso para la determinación de la capacidad frigorífica del motocompresor hermético.

## Resultados

En la segunda columna de la Tabla 1 aparecen los valores para la entalpía, entropía y volu-

Tabla 1  
Valores de entalpía, entropía y volumen específico para condiciones de ensayo y países de clima tropical

	32,00°C (305,15 K)	34,00°C (307,15 K)	35,00°C (308,15 K)	36,00°C (309,15 K)	37,00°C (310,15 K)	38,00°C (311,15 K)
h(kJ/kg)	300,1540	301,1566	301,6678	302,1857	302,7103	303,2415
s(kJ/kg·K)	1,1532	1,1562	1,1581	1,1594	1,1610	1,1626
v(m <sup>3</sup> /kg)	0,1868	0,1874	0,1878	0,1881	0,1884	0,1888

men específico que se obtienen bajo las condiciones establecidas para los ensayos calorimétricos (32°C) y en las restantes columnas los resultados arrojados por las ecuaciones (7), (8) y (9) para tres valores de temperatura ambiente típicos de países de clima tropical.

### Validación de los resultados

Para la validación se tomaron los resultados de experimentos realizados en los laboratorios de la Fábrica de Compresores Danfoss S.A de C.V México con ayuda de calorímetros.

En la Tabla 2 se muestran los valores de los errores absolutos máximos cometidos en la determinación de las magnitudes físicas en cuestión, los cuales se determinaron tomando el módulo de la diferencia entre los valores medidos en el laboratorio y los obtenidos por medio de las expresiones (7), (8) y (9).

### Discusión de resultados

Los valores recogidos en la Tabla 1 revelan la desviación existente entre las magnitudes físicas consideradas cuando son medidas bajo las condiciones de ensayo, 32°C de temperatura ambiente, respecto a cuándo se determinan en condiciones típicas de países de clima tropical, para temperaturas notablemente superiores a la que se establecen para los ensayos calorimétricos.

Si bien se debe reconocer que existen otros métodos de interpolación que permiten reducir el error absoluto en la determinación de una magnitud dada hasta el límite deseado, tales métodos resultan ser iterativos y por lo general requieren que los nodos se ordenen, lo cual complejizaría el modelo.

Tabla 2  
Errores absolutos máximos para la entalpía y volumen específico

$\Delta h$ (kJ/kg)	$\pm 0,0012$
$\Delta s$ (kJ/kg·K)	$\pm 0,0004$
$\Delta v$ (m <sup>3</sup> /kg)	$\pm 0,0002$

### Conclusiones

Se obtuvieron las expresiones polinómicas para calcular la entalpía, entropía y volumen específico, empleando el método de interpolación de Lagrange, las cuales permiten cuantificar la desviación que existe entre las magnitudes físicas en cuestión, cuando son medidos a través de los polinomios interpoladores, y cuando se calculan sobre la base de las condiciones de ensayo.

La desviación entre los valores de la entalpía, entropía y volumen específico, calculados para las condiciones de ensayo y por las ecuaciones (7), (8) y (9), está condicionada por la diferencia entre las condiciones que se establecen para los ensayos calorimétricos y las condiciones de temperaturas reales en los países de clima tropical.

### Referencias bibliográficas

1. Organización Latinoamericana de la Energía, en [www.olade.org.ec/sieehome/home\\_siee.htm](http://www.olade.org.ec/sieehome/home_siee.htm)
2. Ellis, M: "Gadgets and Gigawatts – Policies for Energy Efficient Electronics", Stedi Media, Paris, 2009.
3. Coulomb, D.: The Challenges associated with Sustainable Development, 6th International Conference on Compressors and Coolants, Slovakia, 2006.
4. Berger, E. y otros: 1D heat Exchanger Simulation to Capture the Cycling Transients of Do-

- mestic Refrigeration Appliances Working with R600a, International Refrigeration and Air Conditioning Conference, Estados Unidos de América, 2012.
5. Arencibia A. K.: Sistema de pruebas de control para la comprobación de la fiabilidad de los motocompresores herméticos en condiciones de países tropicales, Holguín, 2004. (Tesis de Doctorado, Refrigeración).
  6. Academia de Ciencias, Instituto de Meteorología, Departamento de Climatología, La Habana, Cuba, 2012.
  7. PRECIS Caribe, en <http://precis.insmet.cu/Precis-Caribe.htm>
  8. Elmegaar B.: Software for the simulation, 15th International Conference on Efficiency, Costs, Optimization, Simulation and Environmental Impact of Energy Systems, Alemania, 2002.
  9. Hermes L. y Melo C.: "A first-principles simulation model for start-up and cycling transients of household refrigerators". International Journal of Refrigeration, Vol. 31, No. 8 (2008) 1341-1357.
  10. Gonçalves M., Melo C. y Hermes L.: "A semi-empirical model for steady-state simulation of household refrigerators". Applied Thermal Engineering, Vol. 29, No.1 (2009) 1622-1630.
  11. Borges N., Hermes L., Gonçalves M., Melo C.: "Transient simulation of household refrigerators, a semi-empirical quasi-steady approach". Applied Energy, Vol. 88, No. 4 (2011) 748-754.
  12. Martínez S., León B., Nohales J., González J.: Dynamic Model of a Household Refrigerator Based on a Quasi-Steady Approach, VI Congreso Iberoamericano de Ciencias y Técnicas del Frío, España, 2012.
  13. Zemansky W. M. y Dittman H. R.: "Calor y Termodinámica", Félix Varela, La Habana, 2011.
  14. Héctor R.C.: "Compresores", ISPJAE, La Habana, 1987.
  15. Álvarez F. M., Alfredo H. G., Rogelio C. L.: "Matemática Numérica", Félix Varela, La Habana, 2008.

Recibido el 27 de Abril de 2014

En forma revisada el 13 de Abril de 2015