DEPÓSITO LEGAL ppi 201502ZU4666
Esta publicación científica en formato digital es continuidad de la revista impresa
ISSN 0041-8811
DEPÓSITO LEGAL pp 76-654

Revista de la Universidad del Zulia

Fundada en 1947
por el Dr. Jesús Enrique Lossada

Ciencias Exactas Naturales y de la Salud

Año 11 N° 30
Mayo - Agosto 2020
Tercera Época
Maracaibo-Venezuela

Soluciones numéricas para diferentes casos del modelo biológico no lineal de presa- depredador

Gilder Cieza Altamirano *
Manuel Jesús Sánchez-Chero **
Rafaél Artidoro Sandoval-Núñez ***
José Antonio Sánchez-Chero ****
María Verónica Seminario Morales*****

RESUMEN

La presente investigación se elaboró con el objetivo realizar una comparación de la solución numérica del modelo biológico no lineal de presa depredador, utilizando el método numérico Adams predicción-corrección junto con los métodos explícitos de Runge-Kutta. Los resultados numéricos para los métodos en mención comparan todos los casos de modelo de presa-depredador, encontrándose que los resultados se superponen entre si hasta un nivel de precisión de 7 a 8, cuando el intervalo se toma de [1,30] con el tamaño de paso de 1.

PALABRAS CLAVE: Modelo biológico; presa – depredador; no lineal; Runge – Kutta, método de Adams.

* Licenciado en Matemáticas. Universidad Nacional Autónoma de Chota. Perú. https://orcid.org/0000-0002-7936-1495

** Docente Investigador. Universidad Señor de Sipán S.A.C., Perú. https://orcid.org/0000-0003-1646-3037 E-mail: manuelsanchezchero@gmail.com

*** Licenciado en Estadística, Universidad Nacional Autónoma de Chota. Perú https://orcid.org/0000-0003-3930-2332

**** Docente posgrado. Universidad César Vallejo. Perú. https://orcid.org/0000-0002-3157-8935

***** Docente Auxiliar. Universidad Nacional de Frontera. Perú. https://orcid.org/0000-0002-6787-7371

Recibido: 8/04/2020 Aceptado: 4/06/2020

Numerical solutions for different cases of the non-linear biological model of prey-predator

ABSTRACT

The present investigation was carried out with the objective of making a comparison of the numerical solution of the non-linear biological model of predator prey, using the Adams prediction-correction numerical method together with the explicit Runge-Kutta methods. The numerical results for the mentioned methods compare all the predator-prey model cases, finding that the results overlap each other up to a precision level of 7 to 8, when the interval is taken from [1.30] with the step size of 1.

KEY WORDS: Biological model; prey - predator; nonlinear; Runge - Kutta, Adams method

Introducción

En los últimos años la comunidad investigadora está interesada en resolver los modelos biológicos. Los modelos biológicos se basan en las ecuaciones diferenciales lineales o no lineales. La mayoría de los modelos biológicos presentan el sistema de ecuaciones no lineales. El modelo presa- depredador es uno de ellos que muestra el sistema de ecuaciones no lineales. Este modelo tiene gran historia y ha sido presentado en el trabajo básico de Lotka y Volterra (Effati et al., 2015).

Este modelo se ha inventado para considerar el ejemplo de conejos y zorros: los zorros comen los conejos y los conejos comen el trébol. El número de conejos aumenta cuando el número de zorros disminuye y si el número de zorros aumenta, entonces comen conejos y, debido a esto, los conejos definitivamente disminuirán (Biazar, Montazeri, 2005).

El aumento o disminución de la población es el modelo de presa- depredador que representa el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales dadas como (Solis, 2008):

$$\begin{cases} L'(x) = L(x)(a - bM(x)), \\ M'(x) = -M(x)(c - dL(x)), \\ L(0) = a_1, M \quad (0) = a_2. \end{cases} \tag{1}$$

Donde *a*, *b*, *c* *y* *d* representan los valores de las constantes a_1 y a_2 son las condiciones iniciales y $L(x)$ y $M(x)$ son la cantidad de presas y depredadores en el tiempo x

Lotka y Volterra presentaron este modelo y (Holling, 1966) presentó tres porciones de las reacciones funcionales para la predicción de depredación para el modelo de presa – depredador.

En el campo biológico, la comunidad de investigación está interesada en resolver el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales. Debido a la no linealidad, el sistema de ecuaciones de este modelo a menudo obtuvo las posiciones rígidas y poco realistas, lo que no es fácil de resolver. Existen pocos métodos disponibles en la literatura para resolver modelos de presa - depredador (Jing and Yang, 2006), (Elsadany, et al., 2012), (Danca et al., 1997), (Liu, and Xiao, 2007) y (Summers, et al., 2000), resolvió el modelo de presa- depredador utilizando sus propias técnicas y formas.

Algunos métodos bien conocidos que se han utilizado para resolver el modelo de presa – depredador son el método de Runge – Kutta – Fehlberg, transformación diferencial (Batiha, 2014), método de descomposición de Laplace Adomian (Paul, Mondal and Bhattacharya, 2016.), técnicas de elementos finitos (Garvie et al., 2015), método de análisis de homotopía (Yu and Yu, 2014), método de descomposición Sumudu (Bildik and Deniz, 2016), método de transformación diferencial fraccional (Ray, 2015), y método de dominio de confianza (Bashkirtseva and Ryashko, 2014) .

Todos los métodos anteriores tienen su propio impacto y significado. Sin embargo, el presente estudio está relacionado con la resolución del modelo de presa- depredador en el gran dominio del intervalo para los diferentes casos del modelo de presa- depredador utilizando las técnicas implícitas Adams y Runge-Kutta.

1. Métodos Numéricos

Para resolver el modelo biológico no lineal de presa- depredador, se ha utilizado el método numérico Adams predicción-corrección, junto con los métodos explícitos de Runge-Kutta.

1.1. Esquema de Adams numérico predicción - corrección

La formulación del método numérico predicción-corrección se aplica y se diseña en dos fases:

Fase 1: Los resultados aproximados de la predicción son competentes

Fase 2: Para calcular los medidores numéricos de corrección

$$\begin{cases} \frac{dL}{dx} = L(a-bM), & L(0)=a_1 \\ \frac{dM}{dx} = -M(c-dL), & M(0)=a_2 \end{cases}. \tag{2}$$

Para el método generalizado de Adams-Bashforth usando el método numérico predicción-corrección es:

$$\begin{cases} D_{n+1} = L_n + \frac{3}{2}Lh(x_n, L_n) - \frac{1}{2}Lh(x_{n-1}, L_{n-1}) \\ D_{n+1} = M_n + \frac{3}{2}Mh(x_n, M_n) - \frac{1}{2}Mh(x_{n-1}, M_{n-1}) \end{cases}. \tag{3}$$

La corrección de Adams-Moulton de dos pasos es:

$$\begin{cases} L_{n+1} = L_n + \frac{1}{2}[fh(x_{n+1}, D_{n+1}) + h(x_n, L_n)] \\ M_{n+1} = M_n + \frac{1}{2}[gh(x_{n+1}, D_{n+1}) + h(x_n, M_n)] \end{cases} \tag{4}$$

El método numérico predicción-corrección de 4 pasos es:

$$\begin{cases} D_{n+1} = L_n + \frac{f}{24}\left(55h(x_n, L_n) - 59f(x_{n-1}, L_{n-1}) + 37f(x_{n-2}, L_{n-2}) - 9f(x_{n-3}, L_{n-3})\right) \\ D_{n+1} = M_n + \frac{g}{24}\left(55h(x_n, M_n) - 59g(x_{n-1}, M_{n-1}) + 37g(x_{n-2}, M_{n-2}) - 9g(x_{n-3}, M_{n-3})\right). \end{cases} \tag{5}$$

El método de Adams-Bashforth Moulton se da como:

$$\begin{cases} L_{n+1} = L_n + \frac{f}{24}\left(9h(x_{n+1}, D_{n+1}) + 19f(x_n, L_n) - 5f(x_{n-1}, L_{n-1}) + f(x_{n-2}, L_{n-2})\right) \\ M_{n+1} = L_n + \frac{g}{24}\left(9h(x_{n+1}, D_{n+1}) + 19g(x_n, M_n) - 5g(x_{n-1}, M_{n-1}) + g(x_{n-2}, M_{n-2})\right) \end{cases} \quad (6)$$

1.2. Método explícito de Runge – Kutta

Para resolver el modelo presa – depredador biológico no lineal, se da el método explícito de Runge – Kutta y su forma General se presenta como:

$$\begin{cases} L_{n+1} = L_n + f\sum_{j=1}^{s} b_j k_j, k_{21} = h(x_n, L_n), \\ M_{n+1} = M_n + g\sum_{j=1}^{s} b_j k_j, k_{12} = h(x_n, M_n), \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_{21} = h\left(x_n + c_2 f, L_n + f(a_{21}k_{11})\right) \\ k_{22} = h\left(x_n + c_2 g, M_n + g(a_{22}k_{21})\right) \end{cases}, \quad (7)$$

$$\begin{cases} k_{31} = h\left(x_n + c_3 f, L_n + f(a_{31}k_{11} + a_{32}k_{21})\right) \\ k_{32} = h\left(x_n + c_3 g, M_n + g(a_{31}k_{11} + a_{32}k_{21})\right) \end{cases} \ldots.$$

$$\begin{cases} k_{s1} = h\left(x_n + c_s f, L_n + f(a_{s1}k_{11} + a_{s2}k_{21} + \ldots + a_{ss-1}k_{s1-1})\right) \\ k_{s2} = h\left(x_n + c_s g, M_n + g(a_{s2}k_{21} + a_{s2}k_{22} + \ldots + a_{ss-1}k_{s2-1})\right) \end{cases}.$$

2. Simulaciones y Resultados

En esta sección se ha tomado una serie de casos utilizando diferentes valores constantes y las condiciones de contorno.

Caso I: Considerar $a = 0.1, b = 0.014, c = 0.012$ y $d = 0.08$, mientras $L(0)=1$, $M(0)=3$.

El sistema (1) se convierte en:

$$\begin{cases} L'(x) = L(x)(0.1 - 0.014M(x)), \\ M'(x) = -M(x)(0.012 - 0.08L(x)), \\ L(0) = 1, M(0) = 3. \end{cases} \tag{14}$$

Caso II: Considerar $a = 0.5, b = 0.014, c = 0.012$ y $d = 0.08$, mientras $L(0)=2$, $M(0)=4$. El sistema (1) se convierte en:

$$\begin{cases} L'(x) = L(x)(0.5 - 0.014M(x)), \\ M'(x) = -M(x)(0.012 - 0.08L(x)), \\ L(0) = 2, M(0) = 3. \end{cases} \tag{15}$$

Caso III: Considerar $a = 0.01, b = 0.014, c = 0.012$ y $d = 0.08$, mientras $L(0)=3$, $M(0)=5$. El sistema (1) se convierte en:

$$\begin{cases} L'(x) = L(x)(0.01 - 0.014M(x)), \\ M'(x) = -M(x)(0.012 - 0.08L(x)), \\ L(0) = 3, M(0) = 5. \end{cases} \tag{16}$$

Caso IV: Considerar $a = 0.05, b = 0.014, c = 0.012$ y $d = 0.08$, mientras $L(0)=4$, $M(0)=6$.

El sistema (1) se convierte en:

$$\begin{cases} L'(x) = L(x)(0.05 - 0.014M(x)), \\ M'(x) = -M(x)(0.012 - 0.08L(x)), \\ L(0) = 4, M(0) = 6. \end{cases} \tag{17}$$

Caso V: Considerar $a = 0.001, b = 0.014, c = 0.012$ y $d = 0.08$, mientras $L(0) = 5$, $M(0) = 7$.

El sistema (1) se convierte en:

$$\begin{cases} L'(x) = L(x)(2 - 0.014M(x)), \\ M'(x) = -M(x)(0.012 - 0.08L(x)), \\ L(0) = 5, M \quad (0) = 7. \end{cases} \tag{18}$$

Los resultados numéricos de todos los casos anteriores para L(x) y M(x) se dan en la tabla 1 al 5 para todos los casos de modelo de presa- depredador. Está claro que los resultados de los métodos Adams y Runge -Kutta se superponen entre si hasta un nivel de precisión de 7 a 8. El intervalo se toma como [1,30] con el tamaño de paso de 1 y las tablas se proporcionan como:

Tabla 1. Resultados de Adams y Runge – Kutta (RK), para el **caso I**

	$L(x)$		$M(x)$	
x	Adams	RK	Adams	RK
0	1.0000000	1.0000000	3.0000000	3.0000000
1	1.0581317	1.0581319	3.2185678	3.2185678
2	1.1159777	1.1159787	3.4691345	3.4691345
3	1.1725699	1.1725720	3.7563915	3.7563915
4	1.2267353	1.2267356	4.0855339	4.0855339
5	1.2770865	1.2770934	4.4621740	4.4621740
6	1.3220273	1.3220276	4.8922011	4.8922011
7	1.3597800	1.3597803	5.3815945	5.3815945
8	1.3884413	1.3884405	5.9356303	5.9356303
9	1.4060763	1.4060612	6.5590358	6.5590358
10	1.4108545	1.4108156	7.2545903	7.2545903
11	1.4012225	1.4012227	8.0219161	8.0219161
12	1.3761081	1.3760140	8.8589990	8.8589990
13	1.3351186	1.3350673	9.7567418	9.7567418
14	1.2787051	1.2786751	10.7037365	10.7037365
15	1.2082426	1.2081359	11.6835062	11.6835062
16	1.1259920	1.1259750	12.6744831	12.6744831
17	1.0349313	1.0349445	13.6542283	13.6542283
18	0.9384731	0.9385120	14.5994890	14.5994890

19	0.8401231	0.8401298	15.4896268	15.4896268
20	0.7431429	0.7432049	16.3048052	16.3048052
21	0.6502836	0.6503806	17.0329256	17.0329256
22	0.5636257	0.5636264	17.6670169	17.6670169
23	0.4845343	0.4846117	18.2023002	18.2023002
24	0.4137085	0.4137905	18.6420765	18.6420765
25	0.3512933	0.3512938	18.9914804	18.9914804
26	0.2970172	0.2970289	19.2568940	19.2568940
27	0.2503293	0.2503344	19.4474418	19.4474418
28	0.2105175	0.2105165	19.5721531	19.5721531
29	0.1768007	0.1767976	19.6399272	19.6399272
30	0.1483952	0.148395	19.6590185	19.6590185

Tabla 2. Resultados de Adams y Runge – Kutta (RK), para el **caso II**

	$L(x)$		$M(x)$	
x	Adams	RK	Adams	RK
0	2	2.0000000	4.0000000	4.0000000
1	3.101711	3.1017110	4.8324040	4.8324040
2	4.730434	4.7304335	6.5055707	6.5055707
3	6.962721	6.9627209	10.2229231	10.2229231
4	9.419416	9.4194161	19.4912043	19.4912043
5	10.2565	10.2564999	43.2289134	43.2289134
6	6.892167	6.8921671	87.1550423	87.1550423
7	2.521441	2.5214411	123.8051592	123.8051592
8	0.656411	0.6564110	136.8996036	136.8996036
9	0.155804	0.1558039	139.0959053	139.0959053
10	0.036782	0.0367825	138.3454748	138.3454748
11	0.008828	0.0088278	136.9092803	136.9092803
12	0.002165	0.0021645	135.3274036	135.3274036
13	0.000543	0.0005427	133.7256981	133.7256981
14	0.000139	0.0001392	132.1337083	132.1337083
15	0	0	130.5583790	130.5583790
16	0	0	129.0012501	129.0012501
17	0	0	127.4625420	127.4625420
18	0	0	125.9421474	125.9421474

19	0	0	124.4398775	124.4398775
20	0	0	122.9555241	122.9555241
21	0	0	121.4888757	121.4888757
22	0	0	120.0397216	120.0397216
23	0	0	118.6078534	118.6078534
24	0	0	117.1930649	117.1930649
25	0	0	115.7951524	115.7951524
26	0	0	114.4139146	114.4139146
27	0	0	113.0491527	113.0491527
28	0	0	111.7006699	111.7006699
29	0	0	110.3682722	110.3682722
30	0	0	109.0517680	109.0517680

Tabla 3: Resultados de Adams y Runge – Kutta (RK), para el **caso III**

	$L(x)$		$M(x)$	
x	Adams	RK	Adams	RK
0	3.0000000	3.0000000	5.0000000	5.0000000
1	2.8016233	2.8016233	6.2323044	6.2323044
2	2.5684641	2.5684641	7.6351788	7.6351788
3	2.3066467	2.3066467	9.1699569	9.1699569
4	2.0263048	2.0263048	10.7761278	10.7761278
5	1.7403375	1.7403375	12.3788660	12.3788660
6	1.4622571	1.4622571	13.9015337	13.9015337
7	1.2038410	1.2038410	15.2789995	15.2789995
8	0.9734164	0.9734164	16.4670913	16.4670913
9	0.7752420	0.7752420	17.4456316	17.4456316
10	0.6099094	0.6099094	18.2156418	18.2156418
11	0.4753429	0.4753429	18.7932270	18.7932270
12	0.3679266	0.3679266	19.2028774	19.2028774
13	0.2834431	0.2834431	19.4719757	19.4719757
14	0.2177178	0.2177178	19.6270922	19.6270922
15	0.1669797	0.1669797	19.6919583	19.6919583
16	0.1280154	0.1280154	19.6866577	19.6866577
17	0.0981893	0.0981893	19.6275852	19.6275852
18	0.0753970	0.0753970	19.5277901	19.5277901

19	0.0579894	0.0579894	19.3974731	19.3974731
20	0.0446898	0.0446898	19.2445163	19.2445163
21	0.0345183	0.0345183	19.0749581	19.0749581
22	0.0267277	0.0267277	18.8933957	18.8933957
23	0.0207493	0.0207493	18.7033196	18.7033196
24	0.0161519	0.0161519	18.5073705	18.5073705
25	0.0126079	0.0126079	18.3075464	18.3075464
26	0.0098694	0.0098694	18.1053550	18.1053550
27	0.0077476	0.0077476	17.9019359	17.9019359
28	0.0060993	0.0060993	17.6981475	17.6981475
29	0.0048155	0.0048155	17.4946380	17.4946380
30	0.0038127	0.0038127	17.2918954	17.2918954

Tabla 4. Resultados de Adams y Runge – Kutta (RK), para el **caso IV**

	$L(x)$		$M(x)$	
x	Adams	RK	Adams	RK
0	4.00000000	4.00000000	6.0000000	6.0000000
1	3.81198397	3.81198397	8.1087833	8.1087833
2	3.51400730	3.51400730	10.7481045	10.7481045
3	3.11122950	3.11122950	13.8512137	13.8512137
4	2.63171499	2.63171499	17.2267134	17.2267134
5	2.12280774	2.12280774	20.5869776	20.5869776
6	1.63668344	1.63668344	23.6350266	23.6350266
7	1.21339534	1.21339534	26.1597945	26.1597945
8	0.87200038	0.87200038	28.0804714	28.0804714
9	0.61253717	0.61253717	29.4277647	29.4277647
10	0.42371329	0.42371329	30.2945296	30.2945296
11	0.29035098	0.29035098	30.7906417	30.7906417
12	0.19798224	0.19798224	31.0163349	31.0163349
13	0.13476290	0.13476290	31.0519811	31.0519811
14	0.09177379	0.09177379	30.9574371	30.9574371
15	0.06262179	0.06262179	30.7753399	30.7753399
16	0.04285770	0.04285770	30.5352539	30.5352539
17	0.02943851	0.02943851	30.2573543	30.2573543
18	0.02030347	0.02030347	29.9552827	29.9552827

19	0.01406406	0.01406406	29.6382174	29.6382174
20	0.00978610	0.00978610	29.3123222	29.3123222
21	0.00684078	0.00684078	28.9817345	28.9817345
22	0.00480417	0.00480417	28.6492315	28.6492315
23	0.00338964	0.00338964	28.3166781	28.3166781
24	0.00240274	0.00240274	27.9853262	27.9853262
25	0.00171107	0.00171107	27.6560148	27.6560148
26	0.00122413	0.00122413	27.3293035	27.3293035
27	0.00087975	0.00087975	27.0055631	27.0055631
28	0.00063512	0.00063512	26.6850351	26.6850351
29	0.00046056	0.00046056	26.3678737	26.3678737
30	0.00033546	0.00033546	26.0541725	26.0541725

Tabla 5. Resultados de Adams y Runge – Kutta (RK), para el **caso V**

	$L(x)$		$M(x)$	
x	Adams	RK	Adams	RK
0	5	5	7.0000000	7.0000000
1	4.484123	4.484123	10.1176534	10.1176534
2	3.829592	3.829592	13.9521218	13.9521218
3	3.089425	3.089425	18.1868893	18.1868893
4	2.348923	2.348923	22.3300427	22.3300427
5	1.69112	1.69112	25.9136011	25.9136011
6	1.164451	1.164451	28.6756463	28.6756463
7	0.77603	0.77603	30.5935994	30.5935994
8	0.506095	0.506095	31.7972495	31.7972495
9	0.325827	0.325827	32.4647404	32.4647404
10	0.208397	0.208397	32.7591415	32.7591415
11	0.132988	0.132988	32.8060564	32.8060564
12	0.084912	0.084912	32.6937756	32.6937756
13	0.054342	0.054342	32.4812453	32.4812453
14	0.034898	0.034898	32.2066871	32.2066871
15	0.022504	0.022504	31.8944885	31.8944885
16	0.014578	0.014578	31.5600799	31.5600799
17	0.009488	0.009488	31.2131900	31.2131900
18	0.006206	0.006206	30.8599437	30.8599437

19	0.00408	0.00408	30.5041992	30.5041992
20	0.002695	0.002695	30.1483867	30.1483867
21	0.001789	0.001789	29.7940363	29.7940363
22	0.001194	0.001194	29.4421089	29.4421089
23	0.0008	0.0008	29.0932044	29.0932044
24	0.000539	0.000539	28.7476925	28.7476925
25	0.000365	0.000365	28.4057962	28.4057962
26	0.000248	0.000248	28.0676438	28.0676438
27	0.00017	0.00017	27.7333031	27.7333031
28	0.000117	0.000117	27.4028023	27.4028023
29	8.04E-05	8.04E-05	27.0761446	27.0761446
30	5.57E-05	5.57E-05	26.7533166	26.7533166

Conclusiones

La solución del modelo presa- depredador, que es un modelo biológico no lineal, se resuelve con éxito. Se han tomado cinco casos diferentes y se proporcionan sus resultados numéricos para resolver el modelo biológico histórico utilizando el método de Runge – Kutta y Adams. La superposición de los resultados numéricos hasta un mayor nivel de precisión se ha notado para resolver este famoso modelo biológico. Los resultados del modelo se tabulan para ambos parámetros.

Referencias

Ash, J. H. (1965). An Adams Runge-Kutta subroutine for systems of ordinary differential equations. Toronto. University of Toronto.

Batiha, B. (2014). The solution of the prey and predator problem by differential transformation method. International Journal of Basic and Applied Sciences, 4(1), pp.36-43.

Bashkirtseva, I. and Ryashko, L. (2014). Analysis of the noise-induced regimes in Ricker population model with Allee effect via confidence domains technique. BioMed research international, 2014.

Biazar, J. and Montazeri, R. (2005). A computational method for solution of the prey and predator problem. Applied Mathematics and Computation, 163(2), pp.841-847.

Bildik, N. and Deniz, S. (2016). The Use of Sumudu Decomposition Method for Solving Predator-Prey Systems. Mathematical Sciences Letters, 5(3), pp.285-289.

Danca, M., Codreanu, S., Bako, B. (1997). Detailed analysis of a nonlinear prey-predator model, J. Biol. Phys. 23 (1997) 11–20.

Effati, S., Mansoori, A. and Eshaghnezhad, M. (2015). An efficient projection neural network for solving bilinear programming problems. Neurocomputing, 168, pp.1188-1197

Elsadany, A. E. A., El-Metwally, H. A., Elabbasy, E. M. and Agiza, H. N. (2012). Chaos and bifurcation of a nonlinear discrete prey-predator system. Computational Ecology and Software, 2(3), p.169.

Garvie, M.R., Burkardt, J. and Morgan, J. (2015). Simple Finite Element Methods for Approximating Predator–Prey Dynamics in Two Dimensions Using Matlab. Bulletin of mathematical biology, 77(3), pp.548-578.

Holling, C. S. (1966). The functional response of invertebrate predators to prey density. Memoirs of the Entomological Society of Canada, 98(S48), pp.5-86.

Jing, Z. and Yang, J. (2006). Bifurcation and chaos in discrete-time predator–prey system. Chaos, Solitons & Fractals, 27(1), pp.259-277.

Liu, X. and Xiao, D. (2007). Complex dynamic behaviors of a discrete-time predator–prey system. Chaos, Solitons & Fractals, 32(1), pp.80-94.

Moulton, Forest R. (1926). New methods in exterior ballistics, University of Chicago Press.

Paul, S., Mondal, S.P. and Bhattacharya, P. (2016). Numerical solution of Lotka Volterra prey predator model by using Runge–Kutta–Fehlberg method and Laplace Adomian decomposition method. Alexandria Engineering Journal, 55(1), pp.613-617.

Ray, S.S. (2015). A New Coupled Fractional Reduced Differential Transform Method for the Numerical Solution of Fractional Predator-Prey System. CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, 105(3), pp.231-249.

Solis, F. J. (2008). Self-limitation in a discrete predator–prey model. Mathematical and Computer Modelling, 48(1), pp.191-196

Summers, D., Cranford, J. G. and Healey, B.P. (2000). Chaos in periodically forced discrete-time ecosystem models. Chaos, Solitons & Fractals, 11(14), pp.2331-2342.

Yu, J. and Yu, J. (2014). Homotopy Analysis Method for a Prey-Predator System with Holling IV Functional Response. Applied Mechanics & Materials.