

Revista de la Universidad del Zulia



Fundada en 1947
por el Dr. Jesús Enrique Lossada

Ciencias
Exactas
Naturales
y de la
Salud

Año 5 N° 12

Mayo - Agosto 2014

Tercera Época

Maracaibo - Venezuela

Radiación de una carga acelerada en un medio con resistencia

*David Sierra Porta**

*Terenzio Soldovieri***

RESUMEN

Se estudia el sistema dinámico consistente de una partícula cargada radiante en una dimensión cuya dinámica está descrita por la ecuación Lorentz-Dirac no relativista, sujeta a las siguientes fuerzas: (1) una fuerza armónica $-\omega_0^2 x$ donde ω_0 es la frecuencia angular natural, y (2) una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad $-Bdx/dt$, donde B es una constante positiva relacionada con las propiedades del medio en el que se mueve la partícula. Nuestra metodología consiste en resolver la ecuación diferencial en estas condiciones, de tal manera que su dinámica se determina completamente. A partir de un estudio de estabilidad de la solución exacta se determina un rango de valores para ω_0 en los cuales el sistema es estable, consiguiendo relación directa con el factor de amortiguamiento B . Se muestran gráficas para la aceleración de la partícula en función del tiempo para distintos valores del factor B , resultando muy dependiente de este último y persistiendo el problema de la pre-aceleración reportado en la literatura para dicha ecuación.

PALABRAS CLAVE: ecuación Lorentz-Dirac, partícula cargada, fuerza de resistencia.

* Centro de Modelado Científico (CMC) y Laboratorio de Astronomía y Física Teórica (LAFT).

** Departamento de Física, Facultad Experimental de Ciencias, Universidad del Zulia.

Maracaibo 4004. Venezuela. E-mail: dsporta@cmc.org.ve

Radiation of an accelerated charge in a medium with resistance

ABSTRACT

The aim of this project is to study the consistent dynamic system of a radiant charged particle in one dimension, whose dynamic is described by the Lorentz-Dirac no relativistic equation, subject to the following forces: (1) an harmonic force $-\omega_0^2 x$ where ω_0 is the natural angular frequency, and (2) a resistance force proportional to the speed $-Bdx/dt$, where B is a positive constant related to the properties of the medium in which the particle moves. Our methodology consists on solving the differential equation in these conditions, so like that, its dynamic is completely determined. A range of values for ω_0 was obtained from a stability study of the exact solution, in which the system is stable, achieving direct relationship with the damping factor B . Graphics of the particle acceleration versus time for the different values of the B factor are shown, being very dependent of the latter and persisting the pre-acceleration problem reported in literature for said equation.

KEYWORDS: Lorentz-Dirac equation, charged particle, resistance force.

Introducción y motivación

Desde La Ecuación de Lorentz-Dirac (ELD) es una ecuación diferencial no-lineal de tercer orden la cual describe la dinámica de una partícula cargada bajo la influencia de una fuerza externa que puede ser debida a su propio campo electromagnético. La expresión correcta de la ecuación LD para partículas puntuales que autointeractúan con sus propios campos ha sido tema recurrente en la búsqueda de una formulación coherente de la Electrodinámica Clásica a partir de la formulación del problema original (Lorentz, 1909). A pesar de que la ELD está soportada en sólidos basamentos físicos (Relatividad Especial y Electrodinámica) esta posee propiedades matemáticas inusuales. De hecho, ya de entrada, la formulación de la ecuación exhibe dificultades teóricas que se han debatido a lo largo de décadas en la extensa literatura dedicada al tema. Dos particularidades de la ELD que llaman mucho la atención son: (1) la presencia de soluciones con valores crecientes y sin límite (comportamiento fuera de control), es decir, soluciones en las que la aceleración de la partícula crece al infinito

en la medida que el tiempo aumenta, y (2) movimientos preacelerados con antelación a las fuerzas aplicadas, o en otras palabras, la presencia de una aceleración negativa en $t=0$, lo que indica que la partícula antes de sentir la interacción del campo electromagnético de fondo ya está acelerada, una cuestión que en la electrodinámica clásica es absurdo, puesto que como sabemos, una partícula cargada que entra en un campo electromagnético se acelera producto de la fuerza de interacción que provoca el campo mismo. Estas dos anteriores particularidades, forman parte de una lista de propiedades no físicas expuestas por la mencionada ecuación (Yaghjian, 1992). Una solución a este problema fue discutida por Yaghjian (Yaghjian, 2006) y fue discutida más adelante por Rohrlich (Rohrlich, 1997) y Medina (Medina, 2006). A. Cabo Montes de Oca y J. Castiñeiras (Cabo, 2013) sugieren, para solucionar las dificultades antes mencionadas, que la fuerza del campo que actúa sobre la partícula debe desaparecer de forma instantánea después de una eliminación repentina de la fuerza externa. Estos últimos, proponen una mínima modificación de la ecuación LD para tratar de poner en práctica esta propiedad. La modificación a la ecuación está asegurada dado que se construye a mano respetando la preservación de la covarianza de Lorentz, así entonces, con un ejemplo sencillo usando una fuerza constante se muestra que se elimina dicha aceleración descontrolada. En otros trabajos recientes (Vogt, 2003), se discute el carácter inestable de las soluciones de la ELD y se resalta la necesidad de métodos como la reducción de orden en aras de derivar una ecuación de movimiento física aceptable. La discusión se ilustra con el ejemplo paradigmático del oscilador armónico no relativista. Se ilustra la eliminación de la pre-aceleración no causal con la introducción de una pequeña corrección en la ELD.

Dirac en 1938 (Dirac, 1938) hace una deducción de la ELD, la cual escrita en lenguaje compacto y en este caso en D dimensiones, viene dada por,

$$\ddot{x}^\mu F_{ext}^\mu + b \left(\dddot{x}^\mu + \frac{1}{c^2} \dot{x}^\mu \ddot{x}^\nu \dot{x}_\nu \right), \quad (1)$$

donde las líneas de mundo de la partícula están descritas por las posiciones $x^\mu(\tau)$, las cuales dan las coordenadas de la partícula en función del tiempo propio τ . El índice $\mu=0,1,2,3$, indica la coordenada, siendo $x^0(\tau)$ la coordenada temporal y $x^{i=1,2,3}(\tau)$ las coordenadas espaciales. Los puntos indican derivadas con respecto al tiempo propio, F_{ext}^μ es la fuerza externa por unidad de masa, $b=2q^2k(3mc^3)^{-1}$, con $k=(4\pi\epsilon_0)^{-1}=8.988 \times 10^9 Nm^2C^{-2}$, m es la masa de la partícula, q su carga y $c=2.988 \times 10^{10} m/s$ es la velocidad de la luz en el vacío. Para el caso particular de un electrón se tiene que $b=6.25 \times 10^{-24} s$, donde $e=-1.6 \times 10^{-19} C$ es la carga del electrón y $m_e=9.1 \times 10^{-28} Kg$ su masa. El parámetro b es una escala temporal relacionada con el radio clásico del electrón $r_e \approx 2.818 \times 10^{-15} m$, también conocido como Radio de Lorentz: el cual

puede ser interpretado como el tiempo que necesita la luz para viajar una distancia igual a r_e . Dado que la ELD es una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden, no sólo deben ser dadas la posición inicial y la velocidad, sino también la aceleración para especificar una solución única.

El límite no relativista de la ELD (1) para una dimensión (eje X en el presente caso) viene dado por,

$$\ddot{x} = F_{ext} + b \ddot{x}, \quad (2)$$

que es precisamente la ecuación de movimiento que será considerada en el presente estudio. Aquí los puntos representan derivadas con respecto al tiempo t .

La principal motivación de este manuscrito es generalizar los resultados obtenidos recientemente por Vogt y Letelier (Vogt, 2003), en la cual han considerado las soluciones de la ecuación (2) anterior, bajo las consideraciones más simples posibles matemáticamente hablando. Los autores anteriores han encontrado soluciones haciendo la suposición de considerar la fuerza externa proporcional a las líneas de mundo de la partícula x , es decir, una fuerza armónica. Estas suposiciones se hacen en virtud de la simplicidad necesaria para obtener soluciones analíticas, sin el uso de métodos numéricos correspondientes.

Ahora bien, en vista de los problemas que hemos expuesto de la ELD, y en particular el de la aparición de una preaceleración existente antes de la interacción, una de las cosas que pudiera ser intentada para resolver este problema es la introducción de una fuerza externa que disipe, absorba o mitigue la energía, de modo que esto contribuya a hacer desaparecer la preaceleración. Una manera de lograr esto consiste en la inclusión de amortiguamiento al sistema, lo que significa que parte de la energía debe ser reducida producto de un proceso de dispersión o de transformación de energía de forma que la fuerza inicial se haga menor. El amortiguamiento es un parámetro fundamental en el campo de la mecánica ondulatoria, en el desarrollo de modelos matemáticos que permiten complejizar y enriquecen el estudio y análisis de tales sistemas. Análogamente al caso de una partícula que se mueve en el seno de un fluido en el régimen laminar, en la ELD, la partícula se mueve en un medio bajo la dominación de un campo electromagnético que le transmite una fuerza a dicha partícula y determina así su dinámica. En este caso es posible pensar en generalizar las soluciones ya existentes (Vogt, 2003) incluyendo además de la fuerza armónica, una fuerza proporcional a la velocidad, lo cual implica incorporar amortiguamiento interno en el medio, adicional a la ya presente por medio del campo electromagnético existente. Es de esperar que nuestra nueva solución incorpore a la solución encontrada

por Vogt y Letelier cuando se hace el límite en el que el amortiguamiento desaparece. Sin embargo, producto de la inclusión de un nuevo término proporcional a la velocidad (con factor de acoplamiento B), es necesario establecer ecuaciones analíticas adicionales que permitan relacionar este último con la frecuencia natural del sistema. Esto es necesario en aras de tener valores o rango de valores correctos y adecuados para que las nuevas soluciones tengan sentido físico y matemático. Lo que se consigue es que los nuevos parámetros están relacionados por medio de una relación que se obtiene con la ayuda de un estudio de estabilidad numérica de la solución encontrada.

En la siguiente sección se establece el problema y se exponen las soluciones de la ELD con la consideración de tanto fuerza armónica como de resistencia proporcional a la velocidad. Se expone el procedimiento de análisis de estabilidad de la solución encontrada para obtener relaciones adecuadas para los valores de ambos factores. Luego se exponen las consideraciones finales y por último las referencias bibliográficas.

1. ELD no relativista con fuerza armónica y amortiguamiento

Se considerará, mediante el uso de la ecuación LD en el límite no relativista, el sistema dinámico consistente en el movimiento en una dimensión (eje X) de una partícula cargada sujeta a una fuerza armónica $-\omega_0^2 x$ donde, como se sabe, ω_0 es la frecuencia angular, y una fuerza de resistencia o amortiguamiento proporcional a la velocidad $-Bdx/dt$, donde B es una constante positiva ($B \geq 0$) relacionada con las propiedades del medio en el que se mueve la partícula.

De esta manera la ecuación de movimiento (2) puede ser escrita como,

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - B\dot{x} + b\ddot{x}. \quad (3)$$

Esta ecuación representa una situación un poco más general que la estudiada en la referencia (Vogt, 2003), donde se considera el movimiento de la partícula sólo sometida a la fuerza armónica $-\omega_0^2 x$. La solución exacta de la ecuación (3) es

$$x = c_1 e^{\alpha_1 t} + e^{\alpha_2 t} (c_2 \cos \alpha_3 t + c_3 \sin \alpha_3 t), \quad (4)$$

donde a_1 , a_2 y a_3 son cantidades definidas en términos de los parámetros propios del sistema:

$$a_1 := \frac{12Bb + 4 + \beta^{2/3} + 2\beta^{1/3}}{6b\beta^{1/3}}, \quad a_2 := \frac{-12Bb - 4 - \beta^{2/3} + 4\beta^{1/3}}{12b\beta^{1/3}}, \quad a_3 := \sqrt{3} \frac{12Bb + 4 - \beta^{2/3}}{12b\beta^{1/3}}, \quad (5)$$

con $B := 36Bb + 108\omega_0^2 b^2 + 8 + 12b(81\omega_0^4 b^2 - 12B^3 b + 54Bb\omega_0^2 - 3B^2 + 12\omega_0^2 b)^{1/2}$, y c_1 , c_2 y c_3 son constantes de integración arbitrarias que pueden ser fijadas en función de las condiciones iniciales, tal que

$$c_1 = \frac{(\alpha_2^2 + \alpha_3^2)x_0 - 2\alpha_2 v_0 + a_0}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \alpha_3^2}, \quad c_2 = \frac{\alpha_1(\alpha_1 - 2\alpha_2)x_0 + 2\alpha_2 v_0 - a_0}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \alpha_3^2}, \quad (6)$$

$$c_3 = \frac{\alpha_1(\alpha_2^2 - \alpha_3^2 - \alpha_2\alpha_1)x_0 + (\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2)v_0 + (\alpha_2 - \alpha_1)a_0}{\alpha_3(\alpha_1)}.$$

En las expresiones anteriores x_0 , v_0 , y a_0 , son la posición, la velocidad y la aceleración iniciales, respectivamente, es decir, la posición, la velocidad y la aceleración en $t=0$. Podemos ver de manera evidente que a_1 es estrictamente definido positivo, cosa que no puede evidenciarse de a_2 y a_3 . En efecto podemos notar que en el caso particular de $B=0$ la solución de Vogt y Letelier puede ser recuperada. Esto quiero decir que la solución de estos últimos es sólo un caso límite de nuestra solución más general (4). Más aún, en vista de la presencia del primer término de la solución (4), uno pudiera hacer $c_1=0$ para poder eliminar las soluciones no físicas que se incrementan a infinito en la medida en que t también crece a un número muy grande. Esto puede hacerse porque en efecto como dijimos $a_1 > 0$. En este caso y luego de tomar primera y segunda derivada a $x(t)$ en la ecuación (4), podemos expresar desparametrizando las expresiones, a la aceleración en términos de la velocidad y la posición de la partícula, lo que quedaría expresado en forma más compacta como

$$a(t) = 2\alpha_2 v(t) - (\alpha_2^2 + \alpha_3^2)x(t), \quad (7)$$

que es la ecuación de un oscilador armónico con fricción, es decir, un oscilador amortiguado, con factor de amortiguamiento dado por $2\alpha_2$ y frecuencia natural de oscilación dada por $(\alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2}$. De esto último podemos inferir que dado que la ecuación (7) se encuentra expresada en su forma estándar entonces es lógico pensar que $\alpha_2 > 0$. Para examinar la

solución matemática de la ecuación diferencial, podemos describir dos tipos de escenarios posibles. Si el rozamiento es pequeño, esto es, pequeño comparado con la frecuencia ($\alpha_2 \ll \omega_0$), entonces la partícula oscilará de manera decreciente hasta que el sistema llegue al equilibrio. Si el rozamiento es grande, esto es $\alpha_2 \gg \omega_0$, entonces la partícula no oscilará y llegará a una posición de equilibrio lentamente.

Por otro lado, es posible encontrar un rango de valores para $b\omega_0$ de manera tal que el sistema sea estable (Aguirregabiria, 1997). En efecto, la ecuación (3) puede ser escrita como,

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = C e^{\lambda t}, \quad (8)$$

donde C es una constante arbitraria y donde λ , γ y ω son las soluciones de sistema de ecuaciones,

$$\lambda = \frac{1}{b} + \gamma, \quad \lambda \omega^2 = \frac{\omega_0^2}{B}, \quad -\frac{B}{b} = \omega^2 - \lambda \gamma, \quad (9)$$

que se obtienen al comparar término a término la ecuación (3) con la ecuación que resulta de la derivada respecto al tiempo t de (8), eliminando antes el factor $Ce^{\lambda t}$ mediante esta última. A partir de las anteriores ecuaciones es posible escribir $\omega^2 = \omega_0^2 - b\omega^2\gamma$, $\gamma = b(\omega^2 - \gamma^2) + B$, de tal manera que con la finalidad de simplificar notación al introducir cantidades adimensionales $x = b^2\omega^2$ e $y = b\gamma$ como variables dinámicas, tenemos que

$$x = x_0 - xy, \quad y = x - y^2 + B, \quad (10)$$

donde $x_0 = b^2\omega_0^2$. Equivalentemente,

$$x = y(1+y) - Bb, \quad x_0 = y(1+y)^2 - Bb(1+y). \quad (11)$$

Como $x_0 > 0$, entonces (11) tiene una sola raíz real dada por,

$$y = \frac{(\alpha - 2)^2 - 12Bb}{6\alpha}, \quad (12)$$

donde,

$$\alpha = \left(-36 Bb + 8 + 108x_0 + 12 \sqrt{12 B^3 b^3 - 3 B^2 b^2 - 54 Bbx_0 + 81 x_0^2 + 12 x_0} \right)^{1/3}. \quad (13)$$

Como $y > 0$, el sistema dinámico objeto de estudio tiene un punto fijo. Para estudiar su estabilidad en dicho punto hay que calcular los valores propios del diferencial de la transformación T establecida por (10). El problema de los valores propios para la diferencial de la anterior transformación conduce a los autovalores

$$\eta = \frac{-3y \pm \sqrt{-[y(3y+4) + 4Bb]}}{2}, \quad (14)$$

es obvio de (14) que los valores propios η son complejos y la condición para que exista estabilidad asintótica viene dada por $|\eta| < 1$, o bien $y < ((13 - 12Bb)^{1/2} - 1)/6$, esto nos da una relación tal que

$$b\omega_0 < \sqrt{\frac{23 - 72Bb + (712Bb)\sqrt{13 - 12Bb}}{54}}, \quad (15)$$

que para $B=0$ resulta en $b\omega_0 < 0.95$ en completa concordancia con el valor mostrado por J. M. Aguirregabiria (Aguirregabiria, 1997). Por último, como en (33) la cantidad subradical debe ser positiva entonces resulta que $0 < Bb < 0.40$.

Conclusiones

Para resumir, en el presente manuscrito se ha considerado el sistema dinámico consistente de la ELD para la descripción de una partícula cargada radiante en la región confinada por un campo electromagnético, en la oportunidad de añadir un ingrediente adicional al estudiado Vogt y Letelier (Vogt, 2003) y J. M. Aguirregabiria (1997), que consiste en agregar a la fuerza armónica $-\omega_0^2 x$ una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad hasta el primer orden $-Bdx/dt$ que produce amortiguamiento al sistema. Esto nos permite generalizar los resultados obtenidos anteriormente. La hipótesis principal consiste en que dicho amortiguamiento pudiera cancelar un poco el efecto de la preaceleración existente y que origina uno de los grandes problemas de este sistema en particular. En efecto se evidencia primeramente que la introducción de este término de amortiguamiento establece unas condiciones para los valores que pueden tomar dicho factor en términos de la frecuencia natural del sistema. El resultado anterior proporciona el rango

de valores de $0 < Bb < 0.40$ para los cuales el sistema es estable y condiciona la dinámica de la partícula lo cual puede verse en la figura 1.

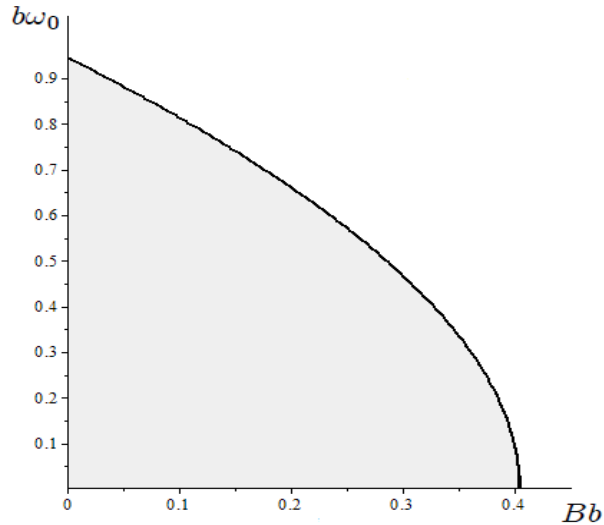


FIGURA 1. Región de valores posibles para $b\omega_0$ y Bb .

El diseño La figura 2(a) muestra las curvas de aceleración para un electrón en función del tiempo que se obtienen a partir de (7) para distintas frecuencias angulares ω_0 con valores $1.1 \times 10^{23} \text{s}^{-1}$, $1.0 \times 10^{23} \text{s}^{-1}$, $0.8 \times 10^{23} \text{s}^{-1}$, $0.5 \times 10^{23} \text{s}^{-1}$, tomándose como condiciones iniciales $x(0) = 2.818 \times 10^{-15} \text{m}$, $v(0) = 0$ y manteniéndose constante $Bb = 0.15$.

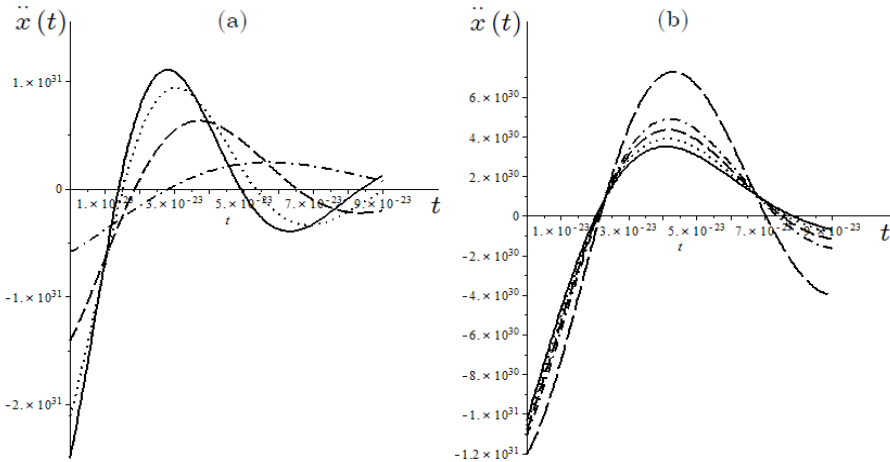


FIGURA 2. Curvas de aceleración de un electrón para (a) distintas frecuencias angulares $\omega_0 = 1.1 \times 10^{23} \text{s}^{-1}$ (línea continua); $1.0 \times 10^{23} \text{s}^{-1}$ (línea punteada); $0.8 \times 10^{23} \text{s}^{-1}$ (línea trazos), $0.5 \times 10^{23} \text{s}^{-1}$ (línea puntos y trazos) y manteniéndose constante $Bb=0.15$ y (b) distintos factores de amortiguamiento $Bb=0.30$ (línea continua); $Bb=0.25$ (línea punteada); $Bb=0.20$ (línea trazos cortos); $Bb=0.15$ (línea puntos y trazos); $B=0$ (línea trazos largos) y manteniéndose constante $\omega_0=0.8 \times 10^{23} \text{s}^{-1}$. Condiciones iniciales para ambos casos $x(0)=2.818 \times 10^{-15} \text{m}$, $v(0)=0$.

Este amortiguamiento es el debido a la radiación emitida por la partícula cargada acelerada, en este caso el electrón, representado por el término de tercera derivada en (2). Por otro lado, en la figura 2(b) se muestran las curvas de aceleración para un electrón en función del tiempo que se obtienen a partir de (15) pero esta vez para distintos factores de amortiguamiento Bb con valores 0.25, 0.20, 0.15, 0, respectivamente, manteniendo constante la frecuencia angular $\omega_0=0.7 \times 10^{23} \text{s}^{-1}$ y usando las condiciones iniciales antes fijadas. Se puede observar que a medida que disminuye B , la amplitud de la aceleración aumenta como era de esperarse, efecto que se complementa al amortiguamiento ya mencionado en el párrafo anterior. Finalmente se observa que el problema de la preaceleración persiste en esta solución, aunque resolver este problema no era objetivo del presente trabajo, puede evidenciarse que la consideración de B distinto de cero disminuye la preaceleración, lo que se corresponde con nuestra hipótesis inicial y puede ser observado en la figura 2(b).

La solución de las ecuaciones para las situaciones más complejas será explorada en una extensión del presente manuscrito. De particular interés parece conveniente la mejora de los cálculos numéricos de las soluciones de las ecuaciones plagadas sistemáticamente con inestabilidades debido

a la existencia de las soluciones fuera de control no físicas. Un problema específico que puede plantearse es la aplicación de esta metodología al movimiento dimensional de una partícula bajo la acción de un potencial de repulsión de Coulomb.

Se ha demostrado que las jerarquías de ecuación de la forma (8) y (9) son no sólo del interés teórico, sino que se puede utilizar para resolver problemas numéricos en la práctica. Un ejemplo lineal en la que todo puede ser calculado analíticamente ha sido analizado para hacerse una idea del problema general. Hemos descrito un conjunto de rutinas que pueden ser usados para poner a prueba con gran facilidad la convergencia del método y para calcular con bajo esfuerzo algunas soluciones de la Ecuación de Lorentz-Dirac (y ecuaciones con la misma estructura) que son difíciles o imposibles de obtener por medio de los métodos usuales. Puede uno esperar que dicha rutina no siempre converja, sin embargo, en este caso resuelve sorprendentemente bien coincidiendo bastante bien con los resultados previos en la literatura.

Agradecimientos

Agradecemos que este trabajo haya sido auspiciado y financiado por la División de Investigación (DI) de la Facultad Experimental de Ciencias (FEC) bajo el número 001-2013.

Referencias

- Aguirregabiria, J. M. (1997). *Solving forward Lorentz-Dirac-like equations*, J. Phys. A: Math. Gen. 30 (1997) 2391-2402.
- Cabo Montes de Oca, A. and J. Castiñeiras, *On radiation reaction and the Abraham-Lorentz-Dirac equation*, arXiv:1304.2203 [gr-qc].
- Dirac, P.A.M. (1938). *Classical theory of radiating electrons*, Proc. R. Soc. (London) A167 (1938) 148.
- Lorentz, H. A. (1909). *The theory of electrons*, Leipzig: Teubner, 1909 (2nd edition, 1916).
- Medina, Rodrigo (2006). *Radiation reaction of a classical quasi-rigid extended particle*, Journal of Physics A: Mathematical and General 39 (14): 3801-3816. 2006.
- Rohrlich F. (1997). *The dynamics of a charged sphere and the electron*, Am J Phys 65 (11) p. 1051 (1997).
- Vogt, D. and Letelier, P. S., *On the Solutions of the Lorentz-Dirac Equation*, arXiv:physics/0307005.
- Yaghjian, Arthur D. (1992). *Relativistic dynamics of a charged particle*, Lecture notes in Physcs, m11, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.

Yaghjian, Arthur D. (2006). *Relativistic Dynamics of a Charged Sphere: Updating the Lorentz-Abraham Model*. Lecture Notes in Physics 686 (2nd ed.). New York: Springer. Chapter 8, 2006.