



Revista de Ciencias Sociales

Depósito legal ppi 201502ZU4662
Esta publicación científica en formato
digital es continuidad de la revista impresa
Depósito Legal: pp 197402ZU789
● ISSN: 1315-9518 ● ISSN-E: 2477-9431

Universidad del Zulia. Revista de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales
Vol. XXXII, No. 2

Abril – Junio 2026

Revista de Ciencias Sociales

Esta publicación científica en formato
digital es continuidad de la revista impresa
Depósito Legal: pp 197402ZU789
ISSN: 1315-9518

Estrategias de inversión y acumulación de capital en horizonte infinito: Enfoque de control óptimo en tiempo continuo

Urdaneta Montiel, Armando José*
Huaita Acha, Delsi Mariela**
Vento, Juan Francisco***
Luza Castillo, Freddy Felipe****

Resumen

El objetivo general de la presente investigación es analizar la trayectoria óptima de inversión y acumulación de capital en horizonte infinito, bajo un enfoque teórico-analítico sustentado en la teoría del control óptimo en tiempo continuo y en los principios de la programación dinámica. El modelo de crecimiento con externalidades de capital físico muestra que la acumulación de capital de cada firma no solo incrementa su propia producción, sino que genera derrames positivos sobre la productividad del resto de la economía, de modo que, cuando a nivel agregado se cumple que la suma entre la elasticidad privada del capital y la intensidad de la externalidad es igual o superior a uno, la tecnología efectiva se aproxima a un esquema tipo AK con rendimientos constantes o crecientes al factor acumulable y desaparece el estado estacionario neoclásico típico del modelo de Solow. Este modelo aporta a los estudios relacionados con los modelos de crecimiento endógeno y explica por qué la acumulación de capital genera crecimiento sostenido sin tecnología exógena dominante. Se concluye que la investigación respalda la aplicación de subsidios a la inversión, incentivos a la acumulación de capital, y de transformaciones institucionales que promueven la asimilación parcial de esos beneficios externos.

Palabras clave: Acumulación de capital; estrategias de inversión; externalidades de capital físico; teoría del control óptimo; crecimiento económico.

* Postdoctorado en Integración y Desarrollo de América Latina. Doctor en Ciencias Económicas. Doctor en Ciencias Gerenciales. Magister en Telemática. Magister en Gerencia Empresarial. Ingeniero en Computación. Profesor Titular Agregado I en la Universidad Metropolitana, Machala, El Oro, Ecuador. Docente Titular en la Universidad Nacional Experimental "Rafael María Baralt", Zulia, Venezuela. Docente Titular invitado en la Universidad del Zulia, Maracaibo, Zulia, Venezuela. E-mail: urdaneta@umet.edu.ec ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9825-9453>

** Postdoctorado en Educación. Doctora en Educación. Magister en Docencia y Gestión Educativa. Magister en Políticas y Gestión de la Educación. Licenciada en Educación. Especialista en la Enseñanza de la Comunicación y la Matemática. Docente en la Universidad Inca Garcilaso de la Vega, Lima, Perú. Investigadora Renacyt Nivel IV. E-mail: delsi.huaita@uigv.edu.pe ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8131-624X>

*** Doctor en Contabilidad. Magister en Marketing y Comercio Internacional. Contador Público. Docente e Investigador en la Universidad Inca Garcilaso de la Vega, Lima, Perú. E-mail: j.ventor@uigv.edu.pe ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8857-5882>

**** Doctor en Educación. Posdoctorando en la Universidad de Tijuana, México. Magister en Educación. Licenciado en Educación Secundaria. Docente en la Universidad César Vallejo, Lima, Perú. Investigador Renacyt Nivel VII. E-mail: fluza@ucvvirtual.edu.pe ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1491-0251>

Investment and capital accumulation strategies over an infinite horizon: An optimal control approach in continuous time

Abstract

The overall objective of this research is to analyze the optimal trajectory of investment and capital accumulation over an infinite horizon, using a theoretical-analytical approach based on continuous-time optimal control theory and the principles of dynamic programming. The growth model with physical capital externalities shows that each firm's capital accumulation not only increases its own output but also generates positive spillovers on the productivity of the rest of the economy. Thus, when, at the aggregate level, the sum of the private elasticity of capital and the intensity of the externality equals or exceeds one, the effective technology approximates an AK-type scheme with constant or increasing returns to the accumulable factor, and the typical neoclassical steady state of the Solow model disappears. This model contributes to studies related to endogenous growth models and explains why capital accumulation generates sustained growth without a dominant exogenous technology. The research concludes that it supports the application of investment subsidies, incentives for capital accumulation, and institutional transformations that promote the partial assimilation of these external benefits.

Keywords: Capital accumulation; investment strategies; physical capital externalities; optimal control theory; economic growth.

Introducción

En las economías en desarrollo, el proceso de acumulación de capital es un determinante central de la capacidad de crecer y de cerrar las brechas estructurales de ahorroinversión y de divisas. Vergil y Saidy (2025), muestran, para el caso de Gambia, que los flujos de capital externo, especialmente la inversión extranjera directa y las remesas, complementan el ahorro interno, contribuyen a financiar la acumulación de capital y se asocian con un mayor crecimiento económico cuando se analizan dentro del marco del modelo de doble brecha de Chenery y Strout. La capacidad de un país para atraer y gestionar inversiones extranjeras, va a influir en cómo este crecerá y se desarrollará a futuro. Sin embargo, la falta constante de ahorro interno y de divisas va a restringir el impacto real de estos flujos de capital.

Un requisito previo para el papel del *stock* capital en el crecimiento económico es contar con mediciones consistentes y comparables del *stock* de capital físico. En tal

sentido, un estudio reciente enfocado en China presenta una metodología provincial mejorada que se basa en el sistema de inventario perpetuo e incluye datos de inversión más exactos, tasas de depreciación que varían según el activo y puntos de partida que se ajustan a la economía de cada región (Wang y Ma, 2024).

Este estudio prueba que, al calcular con más precisión el inventario total de *stock* de capital, es posible describir con mayor exactitud las diferencias en la capacidad de producción entre las regiones del país. Además, estos datos permiten evaluar cómo contribuye realmente el *stock* del capital físico al crecimiento económico de la región estudiada. Con esta base de datos empírica se pueden realizar análisis más profundos que permitan crear estrategias adecuadas para la política de inversión.

El análisis de la economía de Iraq también arroja conclusiones consistentes con lo antes mencionado, puesto que muestra que el ritmo de la inversión en capital fijo tiene un gran impacto en el PIB (Producto Interno Bruto), por lo que se confirma que existe una

estrecha relación entre los niveles de inversión y el resultado económico general del país (Dawood et al., 2024). No obstante, el mismo estudio indica que el hecho de que la inversión se concentre en pocos sectores, sobre todo en los relacionados con los hidrocarburos, frena el impacto de esa inversión en la diversificación productiva y en el crecimiento a largo plazo. Esto reafirma que el volumen de *stock* de capital es tan importante como también lo es la manera en que este se distribuye y se asigna (Labarca y Panchana, 2022; Dawood et al., 2024).

Los trabajos antes mencionados llegan a una conclusión común: el incremento del *stock* de capital, ya sea mediante aportes externos, inversión en activos fijos o por la expansión del capital físico medido con precisión, es un motor fundamental del crecimiento económico. Sin embargo, su efectividad final dependerá de las limitaciones intertemporales, de la estructura productiva que tiene el país y de la forma en que se organiza y dirige la inversión (Wang y Ma, 2024; Dawood et al., 2024; Vergil y Saidy, 2025).

En este contexto, la teoría del control óptimo en tiempo continuo proporciona un marco riguroso para modelar las decisiones dinámicas de inversión de la empresa cuando el objetivo es maximizar el valor presente de los beneficios netos a lo largo de horizonte infinito (véase, por ejemplo, el planteamiento formal en el artículo base de economía matemática). En dicho enfoque, la empresa elige la trayectoria de inversión $I(t)$, que determina la evolución del *stock* de capital $K(t)$ afectado por la depreciación y por la productividad marginal del capital, de manera coherente con las restricciones de acumulación y depreciación que están en la base de la medición del *stock* de capital y de los vínculos empíricos entre inversión y producto, documentados en China, Iraq y Gambia (Wang y Ma, 2024; Dawood et al., 2024; Vergil y Saidy, 2025).

El modelo que se maneja en este caso se basa en la función de los beneficios instantáneos que la empresa quiere obtener, los cuales van a depender de la producción como función del capital y de un costo de inversión

típicamente convexo. Esto permite realizar la derivación de condiciones de primer orden suaves y poner reglas de comportamiento inferior para alcanzar o determinar la inversión óptima. La incorporación en el modelo de la ecuación de estado del capital, del precio sombra de este, y de la condición de transversalidad, permite modelar trayectorias óptimas que tiendan al estado estacionario, en el cual el producto marginal del capital sea igual al costo intertemporal efectivo de mantener cada unidad adicional de capital.

El marco teórico revisado ayuda a interpretar por qué las variaciones de *stock* de capital en la formación de capital fijo y en los flujos de capital externo se traducen en cambios persistentes en el producto (Wang y Ma, 2024; Dawood et al., 2024; Vergil y Saidy, 2025).

El objetivo de esta investigación es analizar la trayectoria óptima de inversión y acumulación de capital en horizonte infinito mediante un modelo de control óptimo en tiempo continuo, y discutir cómo las soluciones teóricas permiten interpretar y complementar la evidencia empírica sobre flujos de capital, medición del capital físico y formación de capital fijo en economías como China, Iraq y Gambia (Wang y Ma, 2024; Dawood et al., 2024; Vergil y Saidy, 2025).

1. Fundamentación teórica

1.1. Acumulación de capital: Revisión de la literatura

La evidencia reciente sobre Gambia, China e Iraq, coincide en que la acumulación de capital es un canal central del crecimiento, pero también en que su impacto depende críticamente de restricciones externas, espaciales y sectoriales. Vergil y Saidy (2025) muestran que, en Gambia, los flujos de capital externo, en particular la inversión extranjera directa y las remesas, complementan el ahorro interno, alivian la restricción externa y se asocian positivamente con el PIB real de largo plazo dentro del modelo de doble brecha; mientras que la brecha de ahorro

resulta estadísticamente insignificante y la informalidad laboral limita el aporte del trabajo al crecimiento.

En el caso de China se hizo una medición del capital físico a nivel de varias provincias, y se pudo observar que el capital crece muy rápido; sin embargo, este incremento se comporta de manera desigual entre las diferentes regiones. El capital mayor se concentra en las provincias del este y la costa; mientras que, las zonas centrales y occidentales se quedan en desventaja relativa (Wang y Ma, 2024). Estos resultados indican que es importante considerar en este tipo de análisis cómo se comportan la distribución espacial del capital y las tasas efectivas de depreciación. En el caso de Iraq, la inversión en activos fijos es beneficiosa y relevante para el crecimiento del PIB; sin embargo, la fuerte dependencia del sector petrolero reduce la capacidad de esa inversión para diversificar la producción y, a la vez, hace al país más vulnerable frente a choques externos (Dawood et al., 2024).

Estos estudios demuestran en general que el capital (ya sea por inversión extranjera, aumento del capital físico o inversión en activos fijos) impulsa el crecimiento, pero su impacto real se ve limitado por factores como la escasez de divisas o el ahorro, las diferencias entre regiones, y por los sesgos de inversión en determinados sectores (Wang y Ma, 2024; Dawood et al., 2024; Vergil y Saidy, 2025).

Los resultados empíricos establecen la base para usar un modelo matemático óptimo (en tiempo continuo), en el que la trayectoria de inversión $I(t)$, así como la evolución del capital $K(t)$ se definen considerando la depreciación, las restricciones intertemporales y el precio sombra del capital. Esto permite reinterpretar los déficits externos, las diferencias regionales de capital y los desequilibrios sectoriales como casos específicos de parámetros y restricciones dentro de este problema dinámico.

1.2. Capital físico como motor del crecimiento

La acumulación de capital físico (infraestructura, equipamiento productivo,

instalaciones manufactureras y de servicios), es un determinante central del crecimiento de largo plazo, al elevar la productividad marginal del trabajo y la capacidad productiva agregada. En el marco neoclásico, trabajos pioneros como los de Solow (1956; 1962) y Swan (1956), subrayan que un aumento sostenido en la tasa de inversión en capital físico permite incrementar el nivel de producto por trabajador y acelerar temporalmente la tasa de crecimiento, especialmente en economías que parten de un capital relativamente bajo (Solow, 1956; 1962; Agusalim et al., 2022).

La evidencia empírica reseñada previamente, confirma, para diversos contextos, la existencia de una relación positiva entre la Formación Bruta de Capital que contiene la FBCF (Formación Bruta de Capital Fijo) y la variación de existencias y el crecimiento del PIB real, (Kuznets y Jenks, 1961).

Estudios para Nigeria, Pakistán, varios países europeos, Japón, Corea del Sur y 18 economías asiáticas, muestran que una mayor formación de capital fijo bruto se asocia con incrementos significativos de la producción, apoyando la tesis de que la inversión en infraestructura y activos productivos es un canal clave para impulsar el crecimiento económico (Sarel, 1996; Gibescu, 2010; Ali et al., 2012; Shuaib y Ndidi, 2015; Boamah et al., 2018; Ghosh, 2019; Khatoun et al., 2021; Agusalim et al., 2022). Esta evidencia es coherente con la visión planteada en la introducción, donde la trayectoria $I(t)$ y la dinámica de $K(t)$ determinan el valor presente de los beneficios, y sugiere que, empíricamente, muchos episodios de crecimiento han sido “*investmentled*”.

Sin embargo, la revisión de literatura también puntualiza que el vínculo capital físico-crecimiento no es universal ni automático. Para el caso de Singapur, Akalpler y Adil (2017) encuentran que en el largo plazo la acumulación de capital físico no tiene un impacto significativo sobre el crecimiento, debido a que una proporción importante de la inversión se dirige a usos no productivos o con retornos muy reducidos, lo que incluso

puede desplazar recursos de actividades de mayor productividad (Akalpler y Adil, 2017; Agusalim et al., 2022).

Algunas conclusiones parecidas se han encontrado en varios países del grupo BRICS y en Sudáfrica. En estos lugares la inversión de capital no siempre resulta en mayores tasas de crecimiento económico. Esto pone en duda la hipótesis de que “más capital siempre es mejor” si no se tienen en cuenta la distribución por sectores, la eficiencia y la calidad de los proyectos de inversión (Meyer y Sanusi, 2019; Rani y Kumar, 2019; Agusalim et al., 2022).

Estas observaciones concuerdan con lo siguiente: No basta con incrementar las inversiones para lograr el desarrollo de un territorio, puesto que el valor real del capital adicional va a depender del uso que se le asigne, de su productividad y del análisis de los costos y beneficios en el tiempo.

1.3. Capital humano, educación y salud

En paralelo, desde un enfoque macroeconómico y del crecimiento endógeno, se ha enfatizado el papel del capital humano como motor de la expansión del producto y de la productividad total de los factores. Autores como Uzawa (1965); Lucas (1988); Romer (1990); y, Mankiw et al. (1992), han argumentado que la acumulación de habilidades, conocimientos y salud eleva la productividad del trabajo y del capital físico, generando efectos de derrame tecnológico y de aprendizaje que sostienen el crecimiento de largo plazo (Uzawa, 1965; Lucas, 1988; Romer, 1990; Mankiw et al., 1992; Agusalim et al., 2022).

La evidencia reciente muestra que el capital humano puede incidir tanto en el nivel de crecimiento como en su inclusividad. Para África subsahariana, Oyinlola y Adedeji (2019) documentan, que mayores niveles de capital humano se asocian con un crecimiento más inclusivo; mientras que Raheem et al. (2018), usando panel de 18 países, encuentran que el aumento del gasto público en educación

y salud impulsa el PIB per cápita (Raheem et al., 2018; Oyinlola et al., 2021; Agusalim et al., 2022). Estos trabajos sugieren que, en un modelo de control óptimo ampliado, el capital humano podría entrar no solo en la función de producción $F(K)$, sino también en la ecuación que describe la productividad marginal del capital y , por tanto, en la dinámica del precio sombra $\mu(t)$.

No obstante, no todos los estudios encuentran un efecto directo y robusto. Para China y Brunei Darussalam, por ejemplo, se reporta que los indicadores de capital humano no guardan una relación estadísticamente significativa con el crecimiento cuando se controla por otros factores, lo que lleva a argumentar que su influencia puede ser indirecta, a través de la localización de inversión física y de la estructura regional del crecimiento (Chi, 2008; Tahir et al., 2022; Agusalim et al., 2022). En términos de modelización, esto implicaría que el capital humano actúa sobre los parámetros de la función $F(K)$ por ejemplo, sobre la eficiencia tecnológica más que como un factor independiente fácilmente identificable en regresiones estándar.

1.4. Interacción y transición entre capital físico y humano

Galor y Moav (2004); y, Agusalim et al. (2022), proponen un marco en el que, a lo largo del proceso de desarrollo, el motor del crecimiento se desplaza desde la acumulación de capital físico hacia la acumulación de capital humano. Por ejemplo, cuando un territorio en su proceso de desarrollo aún no cuenta con mucho capital físico (infraestructura, maquinaria, entre otros) pero tiene muchas oportunidades de inversión, cada nueva obra hace que el rendimiento de ese capital físico sea alto. En esta fase el dinero se va a concentrar en aquellas personas o grupos que suelen ahorrar más e invertir en esas obras. Luego en etapas posteriores, el crecimiento ya no dependerá tanto de nuevas inversiones en capital físico sino de la complementación entre

la tecnología y el talento, la preparación y las habilidades de las personas. Por ello el capital humano se convertirá en el motor principal y dominante del desarrollo económico.

Algunos trabajos empíricos basados en datos de panel muestran que existe una interdependencia entre ambas formas de capital. Amir-ud-Din et al. (2019), analizaron que la inversión en capital físico puede facilitar el crecimiento del capital humano; mientras que, en el proceso contrario, la influencia de la inversión en capital humano sobre el incremento del capital físico no es simétrica, y dependerá del nivel de ingresos y de las restricciones en los recursos.

Li et al. (2015); y, Pomi et al. (2021), hallan, para China y Bangladesh respectivamente, que el capital físico y humano contribuyen al crecimiento, pero con eficiencias y tiempos de impacto diferentes, lo que sugiere que la combinación óptima de inversiones cambia a lo largo del ciclo de desarrollo. Para un modelo de control óptimo, esto se traduciría en un problema de control con múltiples estados y controles, donde $IK(t)$ e $IH(t)$ se asignan intertemporalmente en función de retornos relativos que evolucionan en el tiempo.

1.5. Evidencia específica: Indonesia impulsada por el capital físico

Sobre esta base, Agusalim et al. (2022) plantean su pregunta central: ¿está la economía de Indonesia impulsada principalmente por el capital físico o por el capital humano? Estos autores, utilizando datos de panel para 33 provincias durante un periodo de ocho años (2010–2018), evaluaron modelos donde se observó de forma general que el ingreso per cápita de cada región se explica en su conjunto por la formación de capital fijo per cápita y por indicadores de capital humano (índice de capital humano, años promedio de escolaridad, esperanza de vida). En los modelos aplicados se utilizaron técnicas apropiadas para considerar las diferencias entre las regiones.

Sin embargo, los autores especifican que

en este país el modelo de crecimiento actual se apoya más fuertemente en la acumulación de capital físico, pero no se sustenta necesariamente en una mejora generalizada y uniforme del capital humano (educación, habilidades), ni tampoco en el reparto equitativo de los beneficios generados.

Desde el punto de vista de la teoría de control óptimo, el caso de Indonesia puede verse como una economía que aún está en la etapa donde la trayectoria óptima de $I(t)$ va a favor de que se invierta más en capital físico que en la educación. Esto se debe en parte a que la productividad marginal que se obtiene de invertir más en educación, de la forma en que se está implementando actualmente, o es muy baja o no se está utilizando de manera realmente eficiente. En contraste, la variable educativa medida por años promedio de escolaridad no resulta significativa cuando se incluye el conjunto completo de controles, lo que los autores asocian a ineficiencias en el gasto público en educación y a la falta de alineación entre recursos invertidos y resultados de aprendizaje (Agusalim et al., 2022).

El diagnóstico se refuerza con evidencia descriptiva sobre la posición de Indonesia en el Índice de Capital Humano del Banco Mundial y sobre la distribución del ingreso: a pesar de registrar tasas de crecimiento relativamente altas, el país se mantiene en el grupo de ingreso medio bajo y muestra una desigualdad significativa, con una alta concentración de la riqueza en el percentil superior (Agusalim et al., 2022). Esto sugiere que el patrón de crecimiento está apoyado en un fuerte componente de acumulación de capital físico, como una condición necesaria más no suficiente, puesto que de forma complementaria e ineludible se requiere de una mejora amplia y homogénea del capital humano, para lo cual se necesita de una distribución equitativa de los beneficios del crecimiento.

Para el marco de control óptimo, el caso indonesio puede interpretarse como una economía que se encuentra en una fase donde la senda óptima de $I(t)$ se inclina todavía hacia

la inversión en capital físico, en parte porque la productividad marginal de mejoras adicionales en educación (tal como se implementa hoy) es baja o mal aprovechada. En términos del modelo, el “precio sombra” del capital físico $\mu(t)$ seguiría siendo relativamente alto; mientras que el “precio sombra” implícito del capital humano educativo sería reducido por problemas de calidad y de diseño de políticas.

Luego de la revisión de la literatura, se confirma primero que la acumulación de capital físico sigue siendo un motor importante del crecimiento en economías en desarrollo, pero advierte que su impacto depende de la eficiencia y del destino de la inversión (Agusalim et al., 2022). En segundo lugar, se muestra que la formación de capital humano puede tener efectos significativos sobre el crecimiento, pero si la calidad del gasto no es la adecuada, la educación no siempre va a generar retornos económicos visibles. De esto se deriva que los parámetros del modelo, relacionados con la función de beneficios, deben considerar no solo las cantidades de gasto, sino también su eficiencia.

En tercer lugar, los marcos teóricos revisados indican que la combinación óptima de capital físico y humano va a evolucionar en el tiempo, por tanto, es importante aplicar un enfoque de control óptimo para decidir en cada momento cómo invertir entre los distintos tipos de capital para conseguir la mayor cantidad de beneficios.

El modelo de control óptimo permite explicar la razón por la cual, en países como Indonesia, el comportamiento de las inversiones se ha centrado principalmente en el capital físico. Además, logra identificar qué cambios en la estrategia de inversión, por ejemplo, destinar más recursos a la salud y elevar la calidad del gasto en educación, van a propiciar que se obtengan soluciones más eficientes y equitativas a largo plazo, para el desarrollo de un territorio.

2. Metodología

La investigación se desarrolla mediante

un enfoque teórico-analítico sustentado en la teoría del control óptimo en tiempo continuo y en los principios de la programación dinámica, siguiendo la estructura metodológica expuesta por Chiang y Wainwright (2006). El punto de partida consiste en formular rigurosamente el problema de maximización intertemporal de los beneficios de la firma como un programa de control óptimo autónomo. Se plantea que la empresa elige una variable de control $u(t)$, habitualmente la inversión neta o el gasto de inversión que determina la evolución de la variable de estado $K(t)$, el capital productivo. La formulación básica adopta la estructura estándar:

$$\max_{u(t)} \int_0^{\infty} \Pi(K(t), u(t)) e^{-rt} dt$$

Sujeto a la ecuación de movimiento de capital:

$$\dot{K}(t) = f(K(t), u(t)), \quad K(0) = K_0$$

Donde $\Pi(K, u)$ representa la función de beneficio corriente neto, y, $r > 0$ la tasa de descuento intertemporal. Esta formulación coincide con el esquema general de los problemas autónomos analizados en el artículo, donde la dinámica de la variable de estado está completamente determinada por la elección de la variable de control. Con este planteamiento se construye el Hamiltoniano en valor corriente:

$$H(K, u, \mu) = \Pi(K, u) + \mu f(K, u),$$

Se introduce la variable de coestado $\mu(t)$, que mide el valor sombra de una unidad adicional de capital. Se aplican las condiciones del Principio del Máximo de Pontryagin, que constituyen el núcleo de la metodología. La maximización puntual del Hamiltoniano exige que la trayectoria óptima del control cumpla:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = (K(t), u^*(t), \mu(t)) = 0 \quad (\text{condición de máximo en caso de restricciones sobre } u).$$

Mientras que las ecuaciones de movimiento del sistema hamiltoniano quedan dadas por:

$$\dot{K}(t) = \frac{\partial H}{\partial u} = (K(t), u(t), \mu(t)) = f(K(t), u(t))$$

$$\dot{\mu}(t) = -\frac{\partial H}{\partial K} = (K(t), u(t), \mu(t)) = -\frac{\partial \Pi}{\partial K}(K(t), u(t)) - \mu(t) \frac{\partial f}{\partial K}(K(t), u(t))$$

A estas ecuaciones se suma la condición de transversalidad apropiada para problemas de horizonte infinito:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) K(t) e^{-rt} = 0$$

Lo cual garantiza la no existencia de oportunidades de “arbitraje dinámico” y descarta trayectorias no óptimas que impliquen acumulación infinita o descapitalización ineficiente. Este conjunto de ecuaciones define un sistema dinámico autónomo en las variables $K(t)$ y $\mu(t)$.

Para su estudio se procede a reducir el sistema a estas dos ecuaciones diferenciales y, siguiendo la metodología cualitativa de Chiang y Wainwright (2006), se determinan los estados estacionarios resolviendo simultáneamente:

$$K' = 0, \quad \mu' = 0.$$

Ello conduce a la caracterización de los puntos (K^*, μ^*) que satisfacen:

$$F(K^*, \mu^*) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K}(K^*, u^*) + \mu^* \frac{\partial f}{\partial K}(K^*, u^*) = 0$$

Donde μ^* resulta de la condición de máximo del Hamiltoniano evaluada en el equilibrio. Una vez identificado el estado estacionario, se realiza una linealización local del sistema mediante el Jacobiano asociado a las ecuaciones K^*, μ^* , lo que permite evaluar la estabilidad del equilibrio. En la mayoría de los modelos económicos con control óptimo, la estructura del sistema genera un punto silla, cuya trayectoria estable define el único sendero que conduce a la solución óptima, de manera análoga al análisis a través de diagramas de fase.

Con el sistema dinámico caracterizado, la investigación procede a especificar formas funcionales particulares que permiten obtener soluciones cerradas o semiexplícitas. Por

ejemplo, una función de producción lineal o cóncava $F(K)$ junto con un costo de inversión convexamente creciente $C(u)$ permite escribir:

$$\Pi(K, u) = F(K) - C(u),$$

$$f(K, u) = u - \delta K,$$

De modo que el Hamiltoniano toma la forma: $H = F(K) - C(u) + \mu(u - \delta K)$

La condición de primer orden para el control se expresa como:

$$-C'(u^*) + \mu = 0 \Rightarrow \mu = C'(u^*)$$

Lo que permite reemplazar μ en la ecuación de coestado y obtener un sistema autónomo en K y u . Bajo estas condiciones se puede hacer la derivación de las trayectorias analíticas del par $K(t), u(t)$, lo que sería la solución clara del estado estacionario:

$$u^* = \delta K^*, \quad F'(K^*) = r + \delta$$

Además, se pueden realizar ejercicios de estática comparativa para observar cómo las variaciones en la tasa de descuento, la productividad marginal del capital o el costo de la inversión, influyen en la posición del equilibrio y en las trayectorias óptimas. Cuando la complejidad de las funciones no permite obtener una solución matemática exacta, el sistema se resuelve mediante las técnicas de integración numérica detalladas en este capítulo. Esto permite modelar con buena precisión la trayectoria óptima, para garantizar que los resultados tengan una interpretación económica que sea coherente y lógica.

Así, el método de investigación integra de manera coherente la formulación matemática rigurosa del problema de optimización, la derivación formal de las condiciones del Principio del Máximo, el análisis dinámico de estabilidad y el uso de soluciones explícitas o numéricas, proporcionando una caracterización completa del comportamiento óptimo intertemporal de la empresa.

3. Resultados y discusión

3.1. Modelo de crecimiento con externalidades de capital

En el modelo neoclásico estándar, la función de producción presenta rendimientos decrecientes al capital físico y el crecimiento de largo plazo viene solo del progreso tecnológico exógeno. En el modelo con externalidades de capital físico, el capital de cada firma genera derrames (*spillovers*) que elevan la productividad agregada, de modo que a nivel de economía hay rendimientos constantes o crecientes al capital. Una formulación típica es:

1. A nivel de firma: $Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}$ con $\alpha \in (0,1)$

2. A nivel agregado: $Y = K^\alpha (A L)^{1-\alpha} K^\varphi$ donde $\varphi > 0$ recoge la externalidad del capital agregado; si $\alpha + \varphi = 1$ se obtiene un modelo AK en términos agregados.

3.2. Efectos de las externalidades de capital

Debido a los efectos que generan las externalidades del capital físico, el crecimiento económico a largo plazo de un territorio va a depender en gran medida de los niveles de inversión que se alcancen. Esto ocurre porque el capital no solo elevaría la producción de manera directa, sino que también mejoraría la productividad de la economía en su conjunto y, además, se generarían beneficios para la sociedad. Como los beneficios sociales son mayores que los que obtienen los inversionistas privados, entonces se justifica la aplicación de políticas de subsidio para incentivar la inversión y la acumulación de capital.

a. Función de la producción

Cada empresa tiene su función:

$$Y = K_t^\alpha (A_t L_t)^\beta K_t^\varphi$$

La cual es equivalente a:
 $Y_t = K_t^{\alpha+\varphi} (A_t L_t)^\beta$

Donde los parámetros son: $\alpha > 0$, muestra la elasticidad del capital; $\varphi > 0$, corresponde a la fuerza de la externalidad que proviene del capital físico; y, $\beta > 0$, es la elasticidad que concierne al trabajo efectivo.

Rendimientos a escala:

$$RTS = \alpha + \varphi + \beta$$

1. Si $RTS=1$: indica que el crecimiento es balanceado.

2. Si $RTS > 1$: significa que los rendimientos crecientes son mayores que el crecimiento endógeno acelerado.

b. Acumulación de capital

Con tasa de ahorro constante s y depreciación δ :

$$\dot{K}_t = sY_t - \delta K_t = sK_t^{\alpha+\varphi} (A_t L_t)^\beta - \delta K_t$$

c. Variables por unidad de trabajo efectivo

Se define: $k_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t}$, $\dot{A}_t = g_A$, $\frac{L_t}{L_t} = n$

Usando la regla de cociente:

$$\dot{k}_t = \frac{\dot{K}_t}{A_t L_t} - (g_A + n)k_t$$

Sustituyendo:

$$\dot{K}_t = sK_t^{\alpha+\varphi} (A_t L_t)^\beta - \delta K_t \quad y \quad K_t = k_t A_t L_t:$$

$$\dot{k}_t = s \frac{(k_t A_t L_t)^{\alpha+\varphi} (A_t L_t)^\beta}{A_t L_t} - \delta k_t - (g_A + n)k_t$$

$$\dot{k}_t = s k_t^{\alpha+\varphi} (A_t L_t)^{\alpha+\varphi+\beta-1} - (\delta + g_A + n)k_t$$

1. Si $\alpha + \varphi + \beta = 1$:

$$\dot{k}_t = s K_t^{\alpha+\varphi} - (\delta + g_A + n)k_t$$

Dinámica cerrada tipo Solow modificado.

2. Si $\alpha + \varphi + \beta > 1$: El término $(A_t L_t)$ aparece con exponente positivo, no hay estado estacionario, sino crecimiento acelerado por externalidades.

d. Interpretación económica

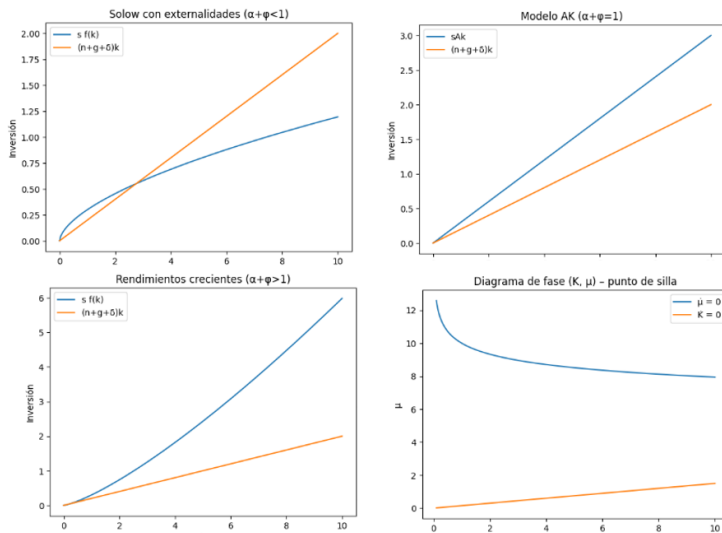
1. La condición $\alpha + \phi + \beta > 1$ implica que duplicar todos los factores genera más del doble de producción.

2. El crecimiento a largo plazo va a depender de factores como el ahorro, la inversión y del tamaño del capital, y no solo de la tecnología.

3. Los subsidios a la inversión van a estar justificados puesto que el rendimiento social del capital es mayor que los beneficios obtenidos por el inversionista privado.

En la Figura I, se observa cómo las externalidades positivas del capital físico influyen en el crecimiento económico según el modelo neoclásico estándar. Cuando la

elasticidad agregada del capital tiene un valor inferior a uno ($\alpha + \phi < 1$), este modelo mantiene la estructura básica de Solow-Swan, o sea, va a existir un estado estacionario estable y las externalidades solo van a elevar el nivel del capital de largo plazo, sin que por ellos se afecte la tasa de crecimiento. En el caso límite $\alpha + \phi = 1$, la tecnología agregada adopta la forma AK, desaparece el estado estacionario en niveles y la economía crece de manera sostenida a una tasa endógena determinada por la inversión. Si las externalidades son suficientemente fuertes ($\alpha + \phi > 1$), surgen rendimientos crecientes a escala, lo que genera crecimiento acelerado, ausencia de convergencia y fuerte dependencia de las condiciones iniciales.



Fuente: Elaboración propia, 2026 basada en Romer (1986); y, Barro y Sala-i-Martin (2004).

Figura I: Externalidades de capital y dinámica del crecimiento económico

Los diagramas de fase del problema de optimización muestran que, aun en presencia de externalidades, el equilibrio dinámico es un punto de silla con la única senda estable. La externalidad del capital eleva el rendimiento social de la inversión, incrementa el nivel

óptimo de capital y amplifica la respuesta de la economía a cambios en parámetros y políticas. En conjunto, la Figura I resume el tránsito desde la convergencia neoclásica hacia el crecimiento endógeno impulsado por la acumulación de capital.

e. Problema de optimización de la empresa

Tecnología: $Y_t = K_t^{\alpha+\varphi} (A_t L_t)^\beta$

1. Estado: $K(t)$.

2. Control: $\mu(t)$ (inversión neta).

Dinámica del capital: $\dot{K}(t) = \mu(t) - \delta K(t)$

Beneficio corriente: $\Pi(K, u) = P K^{\alpha+\varphi} (AL)^\beta - C(u)$

Problema: $\max_{u(t)} \int_0^\infty [P K(t)^{\alpha+\varphi} (AL)^\beta - C(u(t))] e^{-rt} dt$

Sujeto a: $\dot{K}(t) = \mu(t) - \delta K(t), \quad K(0) = K_0$

f. Hamiltoniano y condiciones de máximo

Hamiltoniano:

$$H = P K^{\alpha+\varphi} (AL)^\beta - C(u) + \mu[u - \delta K]$$

1. FOC para el control $\mu(t) = C'(u^*(t))$

2. Ecuación de estado $\dot{K}(t) = u^* - \delta K$

3. Coestado $\dot{\mu} = -P(\alpha + \varphi) K^{\alpha+\varphi-1} (AL)^\beta + \mu \delta$

4. Transversalidad $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) K(t) e^{-rt} = 0$

g. Sistema dinámico reducido

Usando :

$$\mu = C'(u): \dot{u} = -P(\alpha + \varphi) K^{\alpha+\varphi-1} (AL)^\beta + C''(u) \delta.$$

Sistema autónomo:

$$\begin{aligned} \dot{K} &= \dot{u} - \delta K \\ \dot{\mu} &= \frac{-P(\alpha + \varphi) K^{\alpha+\varphi-1} (AL)^\beta}{C''(u)} \end{aligned}$$

h. Estado estacionario

$$\dot{K} = 0 \rightarrow u^* = \delta K^*.$$

$$\dot{\mu} = 0 \Rightarrow P(\alpha + \varphi) K^{\alpha+\varphi-1} (AL)^\beta = \delta u^* = \delta C'(u^*).$$

Sustituyendo:

$$P(\alpha + \varphi) K^{\alpha+\varphi-1} (AL)^\beta = \delta C'(\delta K^*).$$

i. Estabilidad

La linealización del sistema (K, u) alrededor de (K^*, u^*) produce típicamente un punto de silla. La externalidad del capital $(\varphi > 0)$ hace que:

1. El nivel de capital óptimo K^* sea mayor.

2. La economía reaccione fuertemente a cambios en $s, r, \alpha, \varphi, \beta$ o el costo de inversión.

La diferencia clave frente al caso neoclásico es que, con $\alpha + \varphi + \beta > 1$, la productividad marginal del capital cae más lentamente (o incluso puede aumentar), de modo que:

1. El K^* de la firma puede ser mayor (mayor capital óptimo).

2. Cambios en el parámetro de externalidad pueden generar grandes desplazamientos en el equilibrio y en las trayectorias óptimas $K(t), u(t)$.

Esto permite, siguiendo el esquema metodológico, hacer estadística comparativa dinámica sobre $r, \varphi, \alpha, \beta$ o el costo de inversión $C'(\cdot)$, siempre con interpretación clara: la externalidad de capital físico potencia la acumulación y el crecimiento óptimo de la empresa.

La literatura sobre crecimiento endógeno ofrece un marco sólido para sustentar teóricamente tu modelo AK con externalidades de capital físico y rendimientos crecientes a escala. A continuación, se presenta una disertación sintética.

3.3. De Solow a Romer: de rendimientos decrecientes a crecimiento endógeno

El modelo clásico de Solow parte de las condiciones de Inada (1963) de que el capital físico tiene rendimientos decrecientes. Esto significa que, si no hay avances tecnológicos externos, la economía inevitablemente va a

estancarse alcanzando un estado estacionario (*steady state*), y deja de crecer la producción por trabajador. Según esta circunstancia, el crecimiento a largo plazo solo depende de la tecnología, que es un factor externo, y no de las decisiones económicas internas.

Por su parte, Romer (1986) cambió esta visión y añadió el concepto de “capital ampliado” el cual, además del capital físico, incluye el conocimiento (fórmulas, diseños, *software*, experiencia, entre otros). Esto permite que, a nivel global de la economía, este tipo de capital genere rendimientos que no van a decrecer puesto que el conocimiento multiplica el valor e incrementa los beneficios económicos y sociales. Su idea principal es que cada inversión individual crea conocimientos que contribuyen al resto de la economía mediante el efecto de derrame (*spillover*). Estos efectos no son considerados por el inversor individual, pero sí modifican la tecnología de toda la economía, lo que posibilita la existencia de un crecimiento sostenido sin tener que depender de una tecnología puramente externa.

En el modelo que se propone, la función de producción de la firma se puede expresar como:

$$Y_t = K_t^{\alpha+\varphi} (A_t L_t)^\beta$$

Donde: $\alpha > 0$ mide el efecto “privado” del capital de la firma; $\varphi > 0$ muestra la fuerza de la externalidad que proviene del capital físico; $\beta > 0$ es la elasticidad que corresponde al trabajo efectivo.

Si a nivel de firma se imponen rendimientos constantes “privados” y a nivel agregado se tiene $\alpha + \varphi + \beta > 1$, la economía exhibe rendimientos crecientes a escala, situándose en la tradición de los modelos AK con externalidades de capital.

Romer (1986) muestra que, cuando la tecnología agregada puede aproximarse por una forma $Y = AK$, donde K incorpora capital físico y/o conocimiento, la tasa de crecimiento de largo plazo viene dada por $gY = sA - \delta$, dependiendo directamente de la tasa de ahorro/inversión y no solo de un proceso tecnológico

exógeno.

En la formulación que se presenta en este trabajo, el límite donde $\alpha + \varphi = 1$ y $\beta = 0$ resulta exactamente en una tecnología de tipo AK agregada. Esto permite un crecimiento endógeno sostenido siempre que se cumpla que $sA > \delta$. La clave de esta interpretación es que la externalidad de capital (φ) impide la caída de la productividad marginal que caracteriza al modelo de Solow. Por lo tanto, en lugar de estancarse en un estado estacionario clásico, la economía sigue una ruta de crecimiento estable impulsada por las decisiones de inversión y acumulación.

3.4. Evidencia empírica sobre las externalidades del capital

Un debate central es si las externalidades de capital son relevantes en la práctica y de qué tipo son (físicas, humanas, de I+D, entre otros). Mankiw et al. (1992), demostraron que, si se expande el modelo de Solow para incluir el capital humano, esto explicaría mejor las diferencias de ingresos entre países. Sin embargo, este modelo mantiene los rendimientos decrecientes para cada tipo de capital por separado. Más tarde, autores como Klenow (2004), argumentaron que hay poca evidencia de que el capital físico puro mantenga rendimientos constantes, y que los rendimientos no decrecientes se observan más bien en agregados más amplios que combinan el capital físico con el humano.

Por su parte, Greiner y Semmler (2002) elaboró un modelo integrando criterios de Uzawa (1965); Romer (1986); y, Lucas (1988), donde la inversión en capital físico crea beneficios externos que se traducen en acumulación de “capital conocimiento”, siempre que haya inversión en educación. Este modelo respalda la idea de que la inversión privada en capital físico puede generar beneficios sociales mayores que los que obtienen los inversores privados, esto debido a los efectos de derrame, ya sea tecnológico o de aprendizaje, lo que justifica que el parámetro φ sea mayor que cero y muestre la fuerza de la externalidad que proviene del capital físico.

Otras investigaciones sobre el capital humano también confirman que existen externalidades positivas que están asociadas al nivel de escolaridad promedio de la población, y que esto influye en el aumento de la productividad de la colectividad. Aunque estos trabajos se enfocan más en el capital humano, el principio es el mismo: la acumulación de factores “ampliados” produce efectos colectivos que superan el retorno privado, lo que hace que las funciones de producción sean, en la práctica, similares y cercanas al modelo AK.

3.5. Dinámica del capital efectivo y ruptura del Solow clásico

Al formular la dinámica del capital por trabajador efectivo $k_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$, se obtiene una ecuación de la forma:

$$\dot{k}_t = s k_t^{\alpha+\varphi} (A_t L_t)^{\alpha+\varphi+\beta-1} - (\delta + g_A + n) k_t$$

Bajo la hipótesis $\alpha + \varphi + \beta > 1$, el término $(A_t L_t)^{\alpha+\varphi+\beta-1}$ crece en el tiempo porque tecnología y población crecen exógenamente, de modo que la ecuación no se “cierra” solo en función de k_t y desaparece el estado estacionario tradicional de Solow. La economía puede converger a trayectorias de crecimiento acelerado, donde el crecimiento del insumo efectivo amplifica los efectos de la acumulación de capital.

Los economistas Barro y Sala-i-Martin han organizado y analizado este tipo de modelos, y han demostrado que, cuando la economía presenta rendimientos constantes o crecientes sobre la acumulación total de factores, la tasa de crecimiento de largo plazo puede ser afectada por la tasa de inversión y por las decisiones de política económica, a diferencia de lo que ocurre con el modelo de Solow. Este resultado es lo que justifica el estudio de modelos donde la inversión en capital físico produce externalidades. Dichos modelos abren la puerta para que las políticas que cambian la tasa de ahorro o promueven la acumulación de capital puedan generar efectos

permanentes en la tasa de crecimiento de la economía.

3.6. Control óptimo, rendimientos crecientes y política económica

Desde el punto de vista de los microfundamentos, el modelo que se presenta, plantea un problema de control óptimo donde la empresa elige una trayectoria de inversión $u(t)$ que determina la dinámica del capital:

$$\dot{K}(t) = u(t) - \delta K(t)$$

Maximizando el valor presente de beneficios:

$$\max_{u(t)} \int_0^{\infty} [P K(t)^{\alpha+\varphi} (AL)^{\beta} - C(u(t))] e^{-rt} dt.$$

La condición de primer orden para el control vincula el multiplicador de coste de oportunidad del capital $\mu(t)$ con el coste marginal de inversión $C'(u)$; mientras que la ecuación de coestado $\dot{\mu}(t) = -\frac{\partial H}{\partial K}$ incorpora explícitamente la productividad marginal del capital, amplificada por $\alpha+\varphi$ y por $((AL)^{\beta})$.

En el modelo neoclásico estándar, la condición de optimalidad en el estado estacionario implica que $FK' = r + \delta$. Sin embargo, en el modelo actual, el término FK' incluye el beneficio de la externalidad de capital físico, lo que significa que el nivel óptimo de capital en este caso puede ser más alto. En este último modelo las trayectorias ideales de crecimiento van a ser mucho más sensibles a cualquier cambio en variables como la externalidad (φ), la tasa de ahorro (s), la tasa de descuento (r), o el costo de invertir. Esto va a influir de manera clara en la política económica: si el beneficio social total que genera una inversión (que incluye φ) es mayor que el rendimiento que recibe el inversor privado, entonces se justifica la implementación de subsidios para incentivar la inversión y de políticas que impulsen la acumulación de capital y, además, se respalda el diseño de instituciones que asimilen parte de esas externalidades.

Al analizar la evolución del sistema $K_t u$ en el punto de equilibrio hacia el cual este tiende a moverse (sistema estacionario) se obtiene el llamado punto de silla, el cual incluye una trayectoria estable que indica las rutas ideales para que un país crezca de forma óptima. Sin embargo, cuando una economía es capaz de producir cada vez más, gracias a los beneficios del conocimiento y la tecnología, esta se vuelve muy vulnerable a los cambios permanentes en las decisiones del gobierno o en la intensidad de las externalidades, lo que puede alterar de forma drástica su futuro. Esta sensibilidad explica que existan las llamadas divergencias condicionadas, o sea, la razón por la cual aquellos países que parecen similares presentan diferencias en sus tasas de inversión o en la solidez de sus instituciones, y como resultado tienen niveles de riqueza tan diferentes.

Conclusiones

Este modelo de crecimiento con externalidades de capital físico demuestra que los derrames del capital agregado generan rendimientos constantes ($\alpha + \varphi = 1$) o crecientes ($\alpha + \varphi > 1$) a escala, rompiendo el estado estacionario del Solow neoclásico. La tasa de crecimiento de largo plazo depende endógenamente de la tasa de ahorro/inversión s , la depreciación δ y la intensidad de la externalidad φ , con ecuaciones dinámicas como $\dot{k}_t = s k_t^{\alpha + \varphi} - (\delta + g + n) k_t$ que implican trayectorias de crecimiento balanceado o acelerado. Microfundado vía control óptimo, el equilibrio óptimo eleva el capital K^* por encima del nivel privado, justificando subsidios a la inversión puesto que el rendimiento social excede al privado.

El modelo de crecimiento con externalidades de capital físico muestra que la acumulación de capital de cada firma no solo incrementa su propia producción, sino que genera derrames (spillover) positivos sobre la productividad del resto de la economía, de modo que, cuando a nivel agregado se cumple que la suma entre la elasticidad privada del capital y la intensidad de la externalidad

es igual o superior a uno, la tecnología efectiva se aproxima a un esquema tipo AK con rendimientos constantes o crecientes al factor acumulable y desaparece el estado estacionario neoclásico típico del modelo de Solow, pasando la tasa de crecimiento de largo plazo a depender directamente de la tasa de ahorro e inversión, de la depreciación y del parámetro de externalidad, como en la tradición inaugurada por Romer, en la que el crecimiento deja de estar anclado exclusivamente en un progreso tecnológico exógeno para ser explicado por decisiones internas de acumulación y aprendizaje.

En este marco, la dinámica del capital por unidad de trabajo efectivo se transforma en una ecuación donde el término asociado al capital aparece con exponente no decreciente, lo que impide la convergencia a un único nivel estacionario de capital y abre la posibilidad de trayectorias de crecimiento balanceado o incluso acelerado, coherentes con la idea, desarrollada por Barro y Sala i Martin en la literatura de crecimiento endógeno, de que cuando existen rendimientos no decrecientes a un agregado de factores acumulables, la tasa de crecimiento de largo plazo se vuelve sensible y permanentemente afectable por parámetros de política como la tasa de inversión o el tratamiento fiscal del capital.

El modelo enriquece la tradición endógena al enfatizar externalidades de capital físico puro, más allá del conocimiento o del capital humano, explicando por qué la acumulación de capital genera crecimiento sostenido sin tecnología exógena dominante. Ruptura con Solow: evita rendimientos decrecientes agregados, haciendo el crecimiento sensible a políticas de inversión, con evidencia sobre divergencias condicionadas por s y φ .

Este modelo confirma que, debido al efecto de derrame que genera el capital físico se incrementan los beneficios sociales del capital, y esto justifica la necesidad de las intervenciones estatales. Un sistema económico con equilibrio inestable indica una alta sensibilidad a cambios en las tasas de interés (r), a los costos de inversión o a

la externalidad φ . Esto permite comprender por qué existen diferencias de crecimiento en regiones como América Latina.

Asimismo, el modelo permite validar la aplicación de políticas procíclicas en un medio influido por las externalidades, y se observa un vínculo entre las decisiones microeconómicas de las empresas y el crecimiento macroeconómico endógeno de un país.

La conclusión de este trabajo respalda la justificación normativa de los subsidios a la inversión, los incentivos a la acumulación de capital, y los cambios institucionales que promuevan la internalización parcial de esos beneficios externos.

El aporte principal del modelo se resume en lo siguiente: Primero, justifica por qué la tasa de crecimiento de largo plazo depende de la inversión y de la intensidad de las externalidades del capital físico y no solo del avance tecnológico externo. Y segundo, permite comprender por qué se generan altos retornos sociales cuando se invierte en capital físico y en conocimientos. El uso de la estadística comparativa dinámica propició analizar cómo las diferencias en la aplicación de las políticas de inversión, en la calidad de las instituciones o en la intensidad de los derrames, conlleva a trayectorias de crecimiento muy diferentes entre países o regiones.

Referencias bibliográficas

- Agusalim, L., Anggraeni, L., y Pasaribu, S. H. (2022). The economy of Indonesia: Driven by physical or human capital? *JEJAK: Journal of Economics and Policy*, 15(1), 10-28. <https://doi.org/10.15294/jejak.v15i1.34418>
- Akalpler, E., y Adil, H. (2017). The impact of foreign direct investment on economic growth in Singapore between 1980 and 2014. *Eurasian Economic Review*, 7, 435-450. <https://doi.org/10.1007/s40822-017-0071-3>
- Ali, S., Chaudhry, I. S., y Farooq, F. (2012). Human capital formation and economic growth in Pakistan. *Pakistan Journal of Social Sciences*, 32(1), 229-240. <https://pjss.bzu.edu.pk/index.php/pjss/article/view/147>
- Amir-ud-Din, R., Usman, M., Abbas, F., y Javed, S. A. (2019). Human versus physical capital: issues of accumulation, interaction and endogeneity. *Economic Change and Restructuring*, 52, 351-382. <https://doi.org/10.1007/s10644-017-9225-2>
- Barro, R. J., y Sala-i-Martin, X. (2004). *Economic Growth*. The MIT Press.
- Boamah, J., Adongo, F. A., Essieku, R., y Lewis, J. A. (2018). Financial depth, gross fixed capital formation and economic growth: Empirical analysis of 18 Asian economies. *International Journal of Scientific and Education Research*, 2(4), 120-130. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3424688>
- Chi, W. (2008). The role of human capital in China's economic development: Review and new evidence. *China Economic Review*, 19(3), 421-436. <https://doi.org/10.1016/j.chieco.2007.12.001>
- Chiang, A. C., y Wainwright, K. (2006). *Métodos fundamentales de economía matemática*. McGraw-Hill/Interamericana Editores S.A. de C.V.
- Dawood, S. S., Haidar, B. K., y Ghazi, M. (2024). The effect of fixed capital formation rate on gross domestic product in Iraq. *Public and Municipal Finance*, 13(2), 56-69. [http://dx.doi.org/10.21511/pmf.13\(2\).2024.06](http://dx.doi.org/10.21511/pmf.13(2).2024.06)
- Galor, O., y Moav, O. (2004). From physical to human capital accumulation: Inequality and the process of development. *Review of Economic Studies*, 71(4), 1001-1026. <https://doi.org/10.1111/0034-6527.00312>

- Ghosh, S. (2019). Foreign direct investment, female education, capital formation, and economic growth in Japan and South Korea. *International Economic Journal*, 33(3), 509-536. <https://doi.org/10.1080/10168737.2019.1600155>
- Gibescu, O. (2010). *Does the gross fixed capital formation represent a factor for supporting the economic growth?* MPRA Paper No. 50135. https://mpra.ub.uni-muenchen.de/50135/1/MPRA_paper_50135.pdf
- Greiner, A., y Semmler, W. (2002). Externalities of investment, education and economic growth. *Economic Modelling*, 19(5), 709-724. [https://doi.org/10.1016/S0264-9993\(01\)00076-1](https://doi.org/10.1016/S0264-9993(01)00076-1)
- Inada, K.-I. (1963). On a two-sector model of economic growth: Comments and a generalization. *The Review of Economic Studies*, 30(2), 119-127. <https://doi.org/10.2307/2295809>
- Khatoun Ali, R., Javed, I., y Hayat, M. M. (2021). Impact of human capital on economic growth: A case study of Pakistan. *Journal of Social Sciences Advancement*, 2(2), 64-69. <https://doi.org/10.52223/JSSA21-020202-15>
- Kuznets, S., y Jenks, E. (1961). *Capital in the American economy; its function and Financing*. Princeton University Press.
- Labarca, N. J., y Panchana, A. M. (2022). Crecimiento económico en América Latina: Algunos determinantes desde la perspectiva austriaca. *Revista de Ciencias Sociales (Vê)*, XXVIII(1), 216-233. <https://doi.org/10.31876/rcs.v28i1.37686>
- Li, Y., Wang, X., Westlund, H., y Liu, Y. (2015). Physical capital, human capital, and social capital: The Changing Roles in China's Economic Growth. *Growth Change*, 46(1), 133-149. <https://doi.org/10.1111/grow.12084>
- Lucas, R. E. (1988). On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics*, 22(1), 3-42. [https://doi.org/10.1016/0304-3932\(88\)90168-7](https://doi.org/10.1016/0304-3932(88)90168-7)
- Mankiw, N. G., Romer, D., y Weil, D. N. (1992). A contribution to the empirics of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, 107(2), 407-437. https://eml.berkeley.edu/~dromer/papers/MRW_QJE1992.pdf
- Meyer, D. F., y Sanusi, K. A. (2019). A causality analysis of the relationships between gross fixed capital formation, economic growth and employment in South Africa. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Oeconomica*, 64(1), 33-44. <https://doi.org/10.2478/subboec-2019-0003>
- Oyinlola, M. A., Adedeji, A. A., y Onitekun, O. (2021). Human capital, innovation, and inclusive growth in sub-Saharan Africa Region. *Economic Analysis and Policy*, 72, 609-625. <https://doi.org/10.1016/j.eap.2021.10.003>
- Pomi, S. S., Sarkar, S. M., y Dhar, B. K. (2021). Human or physical capital, which influences sustainable economic growth most? A study on Bangladesh. *Canadian Journal of Business and Information Studies*, 3(5), 101-108. <https://doi.org/10.34104/cjbis.021.01010108>
- Raheem, I., Isah, K., y Adedeji, A. (2018). Inclusive growth, human capital development and natural resource rent in SSA. *Economic Change and Restructuring*, 51(1), 29-48. <https://doi.org/10.1111/joes.12211>
- Rani, R., y Kumar, N. (2019). Panel data analysis of financial development, trade openness, and economic growth: Evidence from BRICS countries. *Emerging Economy Studies*, 4(1), 1-18. <https://doi.org/10.1177/2394901518767023>

- Romer, P. M. (1986). Increasing returns and long-run growth. *Journal of Political Economy*, 94(5), 1002-1037. <https://paulromer.net/speeding-up-and-missed-opportunities-evidence/IncreasingReturns.pdf>
- Romer, P. M. (1990). Endogenous technological change. *Journal of Political Economy*, 98(5, Pt. 2), S71-S102. https://web.stanford.edu/~klenow/Romer_1990.pdf
- Sarel, M. (1996). Nonlinear effects of inflation on economic growth. *IMF Staff Papers*, 43(1), 199-215. <https://doi.org/10.2307/3867357>
- Shuaib, I. M., y Ndidi, D. E. (2015). Capital formation: Impact on the economic development of Nigeria 1960-2013. *European Journal of Business, Economics and Accountancy*, 3(3), 23-40. <https://www.idpublications.org/wp-content/uploads/2015/03/CAPITAL-FORMATION-IMPACT-ON-THE-ECONOMIC-DEVELOPMENT-OF-NIGERIA-1960-2013.pdf>
- Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, 70(1), 65-94. <http://piketty.pse.ens.fr/les/Solow1956.pdf>
- Solow, R. M. (1962). Technical progress, capital formation, and economic growth. *American Economic Review*, 52(2), 76-86. <https://www.jstor.org/stable/1910871>
- Swan, T. W. (1956). Economic Growth and Capital Accumulation. *Economic Record*, 32(2), 334-361. <https://doi.org/10.1111/j.1475-4932.1956.tb00434.x>
- Tahir, M., Burki, U., y Hayat, A. (2022). Natural resources and economic growth: evidence from Brunei Darussalam. *International Journal of Emerging Markets*, 18(10): 4252-4269. <https://doi.org/10.1108/IJOEM-05-2021-0762>
- Uzawa, H. (1965). Optimum technical change in an aggregative model of economic growth. *International Economic Review*, 6(1), 18-31. <https://doi.org/10.2307/2525621>
- Vergil, H., y Saidy, S. (2025). Examining foreign capital inflows and growth in The Gambia: A dual-gap approach. *South African Journal of Economic and Management Sciences*, 28(1), a6031. <https://doi.org/10.4102/sajems.v28i1.6031>
- Wang, Q., y Ma, Z. (2024). The measurement of China's provincial physical capital stock based on the improved method and indicators. *PLoS ONE*, 19(8), e0307946. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0307946>