

Competencias procedimentales en alumnos que ingresan a la Licenciatura en Educación Mención Matemática y Física respecto a las fracciones

Yaneth Josefina Ríos García

Universidad del Zulia; Facultad de Humanidades y Educación.

División de Estudios para Graduados; Centro de Estudios

Matemáticos y Físicos.

Resumen

Este artículo es producto de una de las etapas, la preliminar, de una investigación bajo la metodología denominada Ingeniería Didáctica aplicada durante los años 2001-2005. Las teorías soporte son dos: Las Situaciones Didácticas y El Procesamiento de la Información. Este estudio se plantea como propósito establecer las competencias procedimentales que tienen los alumnos que ingresan a la Licenciatura en Educación Mención Matemática y Física respecto a las fracciones. El diseño es de tipo inductivo, descriptivo, explicativo y longitudinal. La muestra estuvo conformada por 189 alumnos. La información se recolectó a través de cuestionarios, entrevistas y observaciones de clase. Entre los resultados tenemos que muchas de las respuestas asociadas a las competencias procedimentales fueron azarosas, pues los alumnos no saben justificar sus respuestas; estos manifestaron en las entrevistas que las competencias que se desarrollan en los primeros dos niveles de nuestro sistema educativo son las procedimentales, pues no se explican las bases teóricas de los mismos, por lo que se descuidan las competencias conceptuales, lo que repercute en el uso de las representaciones externas por parte de los estudiantes, pues lo que priva en los niveles educativos previos, es el uso de las representaciones aritméticas.

Palabras clave: Competencias procedimentales, representaciones externas, niveles de estructuración, errores y obstáculos.

Recibido: 01-12-2008 ~ Aceptado: 20-10-2010

Procedural Competences Related to Fractions in Students Entering the Mathematics and Physics Major for Undergraduate Studies in Education

Abstract

This article is a product from the preliminary stage of research performed under the methodology called Didactic Engineering, applied from 2001-2005. It uses two support theories: didactic situations and information processing. The purpose of this study is to establish the procedural competences that students who enter the undergraduate School of Education, Mathematics and Physics Major, have with regard to fractions. The design is of an inductive, descriptive, explanatory and longitudinal type. The sample consisted of 189 students. Information was collected through questionnaires, interviews and class observations. Results showed that many of the answers associated with procedural competences were random, because the students do not know how to justify their responses. In the interviews, students demonstrated that competences developed in the first two levels of our educational system are procedural, since their theoretical bases are not explained; therefore, conceptual competences are neglected, affecting the use of external representations by the students, because the use of arithmetical representations prevails in the previous educational levels.

Key words: Procedural competences, external representations, levels of structuring, errors and obstacles.

Introducción

Uno de los conceptos matemáticos que ocupa un amplio espacio en los programas de la Escuela Básica es el de las fracciones; el tema se encuentra ubicado directamente en los bloques de contenidos referidos a Números y Operaciones de la primera y segunda etapa de Educación Básica; en los programas de Matemática de séptimo y octavo grado de Educa-

ción Básica se ubican una gran cantidad de objetivos destinados a este tema. Por otro lado, en los demás grados del Sistema Educativo Venezolano, se encuentra implícito en todos los contenidos pues cuando se trabaja con números, las fracciones aparecen constantemente.

Las fracciones, además de tener varias interpretaciones, tiene múltiples relaciones con otros conceptos, como el de proporción y el sistema

de numeración decimal, y con otros procedimientos, tales como la regla de tres y la división. Así pues, es un hecho casi obligante que los estudiantes de nuestro Sistema Educativo dominen tanto las competencias conceptuales como procedimentales relacionadas a las fracciones.

Se observa como los estudiantes del Sistema Educativo Venezolano, en general, obtienen niveles de logros bajos en esta área como lo demuestran la siguiente investigación realizada por el CENAMEC (1982-1983) a una muestra de 23772 estudiantes de séptimo grado. El 38% logró reconocer las propiedades aplicadas en la suma de fracciones (considerada por los especialistas con un grado de dificultad nulo), el 23% logró resolver una resta de fracciones (considerada por los especialistas con un grado de dificultad promedio). Estos resultados permiten concluir que esta es una evidencia del problema de la enseñanza de las fracciones (Ríos y Escalona, 2002; Ríos, 2005).

Por otra parte, el Sistema Nacional de Evaluación de los Aprendizajes (SINEA) realizó una investigación con una muestra de estudiantes de todos los estados de Venezuela en el año 1998, concluyéndose que los alumnos de tercer grado, entre otras cosas: no saben comparar fracciones de iguales denominadores, confunden los conceptos de mayor que y menor que, no relacionan la parte rayada de una figura

con el concepto de fracción, y desconocen la representación gráfica de fracciones; y los alumnos de sexto grado: desconocen la interpretación de la milésima como fracción, la equivalencia entre fracciones, concepto de fracción y expresión decimal, confunden el algoritmo de la multiplicación con la suma de numeradores y denominadores, confunden el algoritmo de la multiplicación con el de la división, y no utilizan el algoritmo de la multiplicación de las fracciones (Ríos y Escalona, 2002; Ríos, 2005).

1. El problema del aprendizaje de las fracciones en el nivel superior

Desde el inicio de mi labor como docente en la asignatura Fundamentos de Matemática, desde el año 1997, en la Licenciatura en Educación Mención Matemáticas y Física de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia, he venido observando el bajo dominio de las competencias conceptuales y procedimentales, que presentan los estudiantes que ingresan en la Licenciatura.

Una investigación al respecto que se realizó en el año 1999 (Ríos, 2000), a un grupo de 42 estudiantes (en esta asignatura), donde tomando como referencia La Estrategia de Resolución de Problemas denominada "La Escalera", elaborada por La Fundación CENAMEC (1985), se

trabajaron problemas donde se aplicaron las cuatro operaciones básicas de los números enteros. Se observó en las producciones de los alumnos, deficiencias en el dominio los procesos asociados a las competencias conceptuales, la elaboración y la organización; en este estudio, 42 estudiantes exhibieron deficiencias en la comprensión lectora pues muestran dificultades cuando identifican y relacionan datos, y hacen inferencias erradas en cuanto a las estrategias aplicadas en la resolución de problemas, asociados a las cuatro operaciones básicas.

En otro orden de ideas, las deficiencias en el aprendizaje de las fracciones persiste en los alumnos que ingresan al nivel superior del Sistema Educativo Venezolano como lo corrobora una investigación realizada por Ríos y Escalona (2002), donde en los estudiantes del primer semestre de la Licenciatura en Educación, Mención Matemática y Física en el año 2001, se evidenció que los procedimientos utilizados en la suma y multiplicación de fracciones, cálculo de porcentajes y de fracciones equivalentes, no tienen significado alguno para ellos, pues al preguntarles por qué los aplican, en su gran mayoría responden que no saben o sencillamente que así se lo explicaron.

En el mismo estudio se hizo un análisis de los errores conceptuales frecuentemente cometidos por los 72 estudiantes de la muestra. Se ob-

servó que de los estudiantes que respondieron el cuestionario, éstos cometieron errores en: la definición de fracción (59,69%), la relación porcentaje y fracción (41,28%), la proporcionalidad (100%) y las fracciones equivalentes (63,87%).

Producto de lo descrito anteriormente, surgen varias interrogantes con respecto a las interpretaciones adquiridas por los alumnos que ingresan a nivel superior con respecto a las fracciones, a saber: ¿cuáles son las representaciones externas que utilizan los alumnos para comunicar las ideas matemáticas referidas a las competencias procedimentales asociadas a las fracciones?, ¿qué tipo de errores y obstáculos, y cuáles son los más frecuentes en los procesos de interpretación?, y ¿cuáles son los niveles de aprendizaje logrados en las competencias procedimentales asociadas al concepto de fracción?

Para darle respuesta a las preguntas anteriores, se plantea el siguiente objetivo general: "Establecer las competencias procedimentales que tienen los alumnos que ingresan a la Licenciatura en Educación Mención Matemática y Física respecto a las fracciones"; y los siguientes objetivos específicos:

- Determinar los niveles de estructuración progresiva que logran los alumnos que ingresan a la Licenciatura en Educación Mención Matemática y Física respecto a las competencias pro-

cedimentales asociadas a las fracciones.

- Determinar el tipo de representación externa que utilizan los alumnos que ingresan a la Licenciatura en Educación Mención Matemática y Física, al comunicar ideas matemáticas referidas a las competencias procedimentales asociadas a las fracciones.
- Determinar y categorizar los errores que presentan los alumnos que ingresan a la Licenciatura en Educación Mención Matemática y Física respecto a las competencias procedimentales asociadas a las fracciones.

2. Bases Teóricas

Dos aspectos teóricos sustentan esta investigación, uno referido al componente cognitivo y otro, el componente didáctico. El primero, se refiere a la teoría de aprendizaje constructivista que sustenta esta investigación, la Teoría del Procesamiento de la Información; en esta teoría se explican los tipos de conocimientos asociados a las competencias conceptuales y procedimentales, los tipos de representaciones externas y los niveles de estructuración progresiva.

En el segundo componente, el didáctico, se tomó como soporte la Teoría de Situaciones Didáctica de la Escuela Francesa, donde se establece una caracterización de las si-

tuaciones que se deben implementar en aula, considerando para nuestro estudio dos conceptos claves, los errores y los obstáculos.

2.1. Teoría del Procesamiento de la Información

Gagné (1991) define la psicología cognitiva como el estudio científico de los procesos mentales. La mayoría de los psicólogos cognitivos apoyan como modelo de aprendizaje el **Modelo de Procesamiento de la Información**. Este modelo concibe al cerebro como un computador donde la información de entrada se transforma, originando una información de salida distinta a la original. Riviére (1987, citado por Pozo, 2001) agrega que refiere la explicación de la conducta, a entidades mentales, a estados, procesos y disposiciones de naturaleza mental para los que reclaman un nivel de discurso propio. Así pues, se observa que este modelo, bajo esta metáfora, permitirá el estudio de los procesos mentales, cosa que no hace el conductismo.

Este modelo concibe que el conocimiento se puede almacenar de dos maneras: a través de proposiciones y producciones. La primera forma de organización recibe el nombre de conocimiento declarativo, que constituye las características de objetos, hechos o acontecimientos, y la segunda forma de organización se le denomina procedimental que

consiste en un conjunto organizado de pasos o actividades (Gagné, 1995). En el primero se desarrollan las competencias conceptuales, en el segundo las procedimentales.

Estos dos tipos de conocimientos en la Matemática, en la mayoría de los casos son inaccesibles a nuestros sentidos, pues solo se pueden ver con los ojos de la mente. Generalmente muchas de las representaciones que se asocian a los conceptos matemáticos son abstractas, en el mejor de los casos pueden ser representados gráficamente, de allí la complejidad del aprendizaje de estos conceptos y procedimientos.

2.1.1. Interpretaciones del conocimiento matemático

La interpretación que hace el alumno de un objeto matemático, es un modelo personal y particular, que le permite explicar el fenómeno que observa. Este modelo está asociado a aspectos tales como las experiencias o concepciones previas, la estructura cognitiva, los obstáculos, la memoria, entre otros (Astolfi, 2001). A este respecto Koyré, establece que el paso de una interpretación al concepto matemático no debe concebirse como la eliminación de elementos subjetivos y una reducción de factores comunes identificados por el conocimiento científico, esta implica la reorganización de los procesos cognitivos, una "mutación intelectual" (Astolfi, 2001).

En lo que respecta a esta investigación, el objeto matemático que

hemos escogido, es la fracción; esta puede ser dotada de varias interpretaciones, tales como reparto, cociente, división indicada, razón, porcentajes y número racional, que al ser desconocidos por los estudiantes no les permite resolver problemas donde se necesite el conocimiento de estas interpretaciones.

A este respecto, Segovia y Rico (2001) y Azcarate (1995) opinan que se deben establecer conexiones entre los diferentes significados, pues los procesos de relacionar las diversas interpretaciones de un mismo concepto no son espontáneos en los estudiantes, muy por el contrario, son procesos elementales que los profesores deben ayudar que sus alumnos adquieran. Llinares y Sánchez (1997) al particular expresan que a los niños se les debe proporcionar una adecuada experiencia con las interpretaciones de las fracciones si se quieren que lleguen a comprender el concepto; esta idea es apoyada por Kieren (1976) y Dienes (1972).

Para determinar el nivel de comprensión del concepto de las fracciones, por parte de los alumnos, se trabajó con unas categorías llamados niveles de estructuración progresiva, que explican el proceso de formación de conceptos matemáticos en la estructura conceptual; dicha categorización fue creada por Sfard (1991, citada por Azcarate, 1995) para el área de Matemática.

- Interiorización: en donde se entra en contacto con los procesos que dan lugar a un nuevo concepto. Dichos procesos son operaciones con objetos matemáticos de nivel más elemental.
- Condensación: es un período en donde se concentran las largas secuencias de operaciones en unidades más manejables. En esta etapa se puede dar un nombre a un concepto que nace, se hace cada vez más factible combinar procesos, hacer comparaciones y generalizaciones y aumenta la factibilidad para alternar diversas representaciones del concepto.
- Cosificación o reificación: la persona es capaz de concebir la noción como un objeto matemático. Es una habilidad repentina para concebir algo familiar desde una nueva perspectiva. Las primeras dos etapas son graduales y la tercera es un salto informacional.

En el estudio que nos atañe, estos niveles de estructuración se manifestaron en las competencias conceptuales adquiridas por los alumnos; para establecer el nivel de logro de cada una de las competencias se utilizaron los siguientes criterios:

2.1.2. Representaciones externas del conocimiento matemático

Para poder razonar y comprender cualquier concepto matemático, es necesario hacer una representación interna o una construcción

mental, para poder operar sobre él. Por otro lado, para poder comunicarlas hacemos uso de notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las cuales se expresan los conceptos y procedimientos, así como sus características y propiedades más relevantes. Este conjunto de gráficos, reglas o símbolos es lo que se denomina sistemas de representación o representaciones externas (Segovia y Rico, 2001).

Las representaciones externas o los sistemas de representación constituyen un aspecto fundamental en la enseñanza, pues ellas permiten la representación interna, con lo que se puede razonar; así pues que para lograr los procesos del pensamiento y aumentar la capacidad cognitiva es adecuado que se logre una variedad de representaciones externas del mismo concepto. Eso lo sugiere Romero (2000) pues las representaciones se complementan y muestran diversos aspectos de un mismo concepto con mayor o menor claridad, porque todos son limitados y necesitan de los otros (Blázquez y Ortega, 2001).

Maza (1995) distingue cinco representaciones externas: los modelos manipulativos (objetos tridimensionales), los dibujos o diagramas (objetos bidimensionales), el lenguaje formal, lenguaje informal y los símbolos escritos (propios de la Matemática). Las representaciones simbólicas son las que necesi-

Cuadro 1
Indicadores que permiten establecer los niveles de estructuración progresiva en el área de fracciones

Niveles de Estructuración Progresiva	Competencias Precedimentales
Interiorización	<ul style="list-style-type: none"> - Al realizar la representación gráfica de cualquier situación, solo representa las fracciones involucradas y la respuesta. - Al realizar la representación aritmética de cualquier situación, opera directamente. - Al realizar la representación algebraica de cualquier situación, se establece el algoritmo directamente, sin especificar los rangos de las variables involucradas. - En la resolución de problemas aplica correctamente los conceptos matemáticos directamente sin ninguna justificación.
Condensación	<ul style="list-style-type: none"> - Al realizar la representación gráfica de cualquier situación, mediante símbolos o palabras intenta explicar el proceso. - Al realizar la representación aritmética de cualquier situación, establece algunas transformaciones correctamente. - Al realizar la representación algebraica de cualquier situación, se establece el algoritmo, y especifica algunos rangos de las variables involucradas, correcta o incorrectamente. - En la resolución de problemas aplica correctamente los conceptos matemáticos, justificando algunos pasos.
Cosificación	<ul style="list-style-type: none"> - Al realizar la representación gráfica de cualquier situación, explicar el proceso mediante el lenguaje formal. - Al realizar la representación aritmética de cualquier situación, establece todas las transformaciones involucradas. - Al realizar la representación algebraica de cualquier situación, se establece el algoritmo y especifica todos los rangos de las variables involucradas, correctamente. - En la resolución de problemas aplica correctamente los conceptos matemáticos, justificando todos los pasos.

Fuente: Ríos (2008).

tan un esfuerzo mayor en el aprendizaje de los estudiantes. Su carácter arbitrario, propio de la comunidad científica, condiciona su relación con las representaciones internas y las hacen materia de aprendizaje, pues no evidencias las propiedades del referente, por lo que su transpa-

rencia no podrá medirse por preservar las propiedades del referente, sino por presentar la menor cantidad de significados adicionales de otros conceptos propios de la cultura particular.

Con respecto a lo anterior, en esta investigación se plantea una

hipótesis con respecto al orden de complejidad en cuanto al uso de las representaciones externas; se ordena de menor complejidad a mayor de la siguiente forma: lenguaje informal, manipulativas, icónicas, lenguaje formal, simbólica. Esta secuencia, a nuestro parecer y en correspondencia a lo que aporta Maza (1995), se adecua al grado de accesibilidad al referente, es decir, la transparencia que ofrece cada representación. El mayor grado de transparencia caracteriza a las representaciones del lenguaje informal y la de menor transparencia corresponde a las representaciones simbólicas.

2.2. Teoría de las situaciones didácticas

Esta teoría nace por los años 70 en Francia por el análisis crítico que le hace el grupo de investigación, guiado por Guy Brousseau, a los métodos de enseñanza de la Matemática. Este grupo realiza un análisis de cuales son las interacciones que se presentan en el aula de clase entre los actores del proceso de enseñanza aprendizaje de los conocimientos matemáticos, desarrollando así una teoría de este proceso; esta maneja términos tales como la transposición didáctica, fenómenos didácticos, situaciones: fundamental, didáctica y a-didáctica, contrato didáctico, variable didáctica, salto informacional, obstáculos, y erro-

res, entre otros. Para efecto de esta investigación solamente trabajaremos con los últimos dos.

2.2.1. El error

La utilización del análisis del error como método de observación indirecto para el análisis de los procesos mentales del individuo que aprende, se hace consistente pues el individuo muestra regularidades en el modo de realizar tareas, con poca variabilidad en cortos períodos de tiempo (Kilpatrick y col., 1995).

En esta investigación se tomó en cuenta la siguiente categorización del error: debido a la incomprensión del símbolo, de tecnología (errada elección de la técnica), de técnica (errada ejecución de tareas), de teoría (deficiencia en el manejo de conceptos), debido a la incomprensión del ítem o pregunta, debido a la no especificidad de la respuesta (aun y cuando el proceso es correcto), y sintáctico.

2.2.2. Obstáculo

Bachelard fue el primero en plantear el obstáculo en las ciencias físicas. Lo define como lo que ya se sabe y, que como ya se sabe, esto genera una inercia que dificulta el proceso de construcción de un saber nuevo, lo que constituye el acto de conocer. Es una barrera que se produce al momento de intentar conocer y pueden aplicarse tanto en la epistemología como a la historia, al principio pudo haber sido eficiente pero luego se muestra inadecuado (Rumelhard, 1997).

En esta investigación se tomó en cuenta la siguiente categorización de los obstáculos: debido a las experiencias previas, por la incompreensión de conceptos matemáticos y la incompreensión del problema.

3. Operacionalización de categorías

Para poder verificar el cumplimiento de los objetivos, las categorías que los conforman se operacionalizaron de la siguiente manera:

4. Metodología

Según diversos criterios, mencionados por Bisquerra (1989), el método utilizado para la realización de ésta investigación es: inductivo, descriptivo, explicativo longitudinal.

La muestra para la aplicación de la propuesta didáctica fue no probabilista, elegida de manera intencional, pues estuvo constituida por 189 alumnos que ingresaron a la Licenciatura de Educación Mención Matemática y Física de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia, en los años 2001, 2002, 2004 y 2005.

Para recolectar la información se aplicaron cuestionarios iniciales durante cuatro años 2001, 2002, 2004 y 2005 (ver Anexo 1); esto se complementó con entrevistas realizadas en el año 2001 (ver anexo 2),

y observaciones de clase durante los cuatro años.

El procedimiento que se siguió para el análisis de la información estuvo guiado en términos generales por la técnica de teorización, la cual fue utilizada para describir los fenómenos, descubrir las categorías abstractas, establecer relaciones entre éstas e inferir explicaciones sobre los fenómenos estudiados. Esta técnica fue complementada con la determinación de frecuencias para las cuatro propiedades.

5. Análisis de la información

Para cada una de las cuatro competencias procedimentales se realizó el estudio de las representaciones externas utilizadas por los estudiantes, los niveles de estructuración logrados por los alumnos, y los tipos de errores y obstáculos presentes en las respuestas. A continuación se describen los resultados:

5.1. Categoría: Representación de números racionales en la recta real

Se trabajaron con cinco ítem, donde los alumnos debían ubicar el número racional en la recta real. La representación externa de estas respuestas, por la naturaleza de las cinco preguntas, es la simbólica, las cuales fueron respondidas entre el 41% y 52% de la población.

Cuadro 2. Operacionalización de los objetivos

Categorías	Propiedades	Item	Item
		Cuestionario	Entrevista
Representación de números racionales en la recta real	Niveles de estructuración progresiva (interiorización, condensación y cosificación) Representaciones externas: lenguaje informal, icónica, lenguaje formal, y simbólica algebraica o aritmética) Tipos de errores Tipos de obstáculos	1	—
Interpretación y aplicación de algoritmos para hallar fracciones equivalente	Niveles de estructuración progresiva Representaciones externas Tipos de errores Tipos de obstáculos	4, 5, 6, 7	3, 4
Interpretación y aplicación de algoritmos de operaciones entre fracciones	Niveles de estructuración progresiva Representaciones externas Tipos de errores Tipos de obstáculos	2	1
Resolución de problemas	Niveles de estructuración progresiva Representaciones externas Tipos de errores Tipos de obstáculos	3	2

Fuente: Ríos (2008).

Para esta categoría se debe hacer notar que las respuestas referidas a los números racionales mayores que 1 y menores que -1, pueden solamente adecuarse a los niveles de interiorización y condensación de estructuración progresiva, por la mediana complejidad de las preguntas; y las respuestas referidas a los números racionales entre -1 y 1, pueden solamente adecuarse a al nivel de interiorización de estructuración progresiva, por la baja complejidad de las preguntas. Así pues, para el caso número racional nega-

tivo menor que -1, un solo alumno logró el nivel de interiorización y ninguno el de condensación; y para racional mayor que uno, el 14% logró el nivel de interiorización y dos alumnos lograron el nivel de condensación. Por otro lado, para los números racionales entre -1 y 1, las respuestas en el nivel de interiorización oscilaron entre 2% y 8%.

Los errores cometidos fueron debido a la complejidad del símbolo, producto de las experiencias previas, y oscilan entre 25% y 33%. En general, con respecto a las produc-

ciones de los alumnos se pueden hacer las siguientes observaciones:

- Los alumnos identificaron la posición en la recta real, que no presentan la forma a/b , donde a y b son enteros, por ejemplo: $-0,622/-2$; $0,25$; $-3,5$; $-8/5$; $-1,25$; $-1,76$.
- Cuando identificaron la posición positiva colocaron números racionales negativos y viceversa.
- A pesar que en la recta real se identifica el cero, los alumnos le asignaron a algunas posiciones el cero, pero no lo explicitaron como entero, sino como racional, por ejemplo: $0/2$, $0/4$, $1/3$, $0/30$; $-0/2$, $0/2$, $-0/6$.

5.2. Categoría: Interpretación y aplicación de algoritmos para hallar fracciones equivalente

En la primera parte se solicitó las utilidades prácticas de las fracciones equivalentes, el método para hallarlas y el método para verificarlas; se pretendió que los alumnos establecieran las características, a nivel conceptual, de las fracciones equivalentes a través de tres ítems. En la segunda parte, nivel procedimental, se pretendió determinar el dominio de la técnica para hallar las fracciones equivalentes en seis igualdades entre fracciones, donde faltaba un número entero en cada una.

En el nivel conceptual, la representación externa de estas respuestas es escrita, por la naturaleza de las

tres preguntas, las cuales fueron respondidas por un porcentaje entre 9% y 19% de la población, lo cual implica que el nivel de complejidad según los alumnos es alto. Solo entre 2 y 9 alumnos lograron niveles de interiorización.

En lo referente a las utilidades prácticas de las fracciones equivalentes, 9 alumnos (6,38%) lograron el nivel de interiorización, los cuales mencionaron los procesos de amplificación y simplificación de fracciones; dos alumnos entrevistados hicieron referencia a que trabajar con fracciones más pequeñas es más cómodo, y los otros dos alumnos establecieron que las fracciones equivalentes sirven para sumar fracciones, pero al pedirles que justificaran su respuesta, no respondieron.

En referencia a los métodos para hallar fracciones equivalentes, 4 alumnos (2,83%) lograron el nivel de interiorización, de los cuales mencionaron los métodos de amplificación y simplificación; en la entrevista, un alumno hizo referencia a los procesos de amplificación y simplificación cuando mencionó que se multiplican o dividen los elementos de la fracción por el mismo número, pero no los denomina; otro alumno mencionó el producto cruzado pero no explicitó que sus resultados deben ser iguales, dos alumnos explicitaron que se multiplican en cruz para sumar o restar, el método lo relacionaron con las operaciones entre fracciones, y otro

alumno explicitó que lo utiliza para trabajar con cantidades pequeñas pero iguales.

En referencia al método de multiplicación cruzada para comprobar si dos fracciones son equivalentes, dos alumnos (1,41%) lograron el nivel de interiorización al expresar que para comprobar si dos fracciones son equivalentes, se multiplican sus elementos en forma cruzada, lo cual debe dar el mismo resultado, pero no explica porqué. En general, los alumnos no conocen el método de multiplicación cruzada, pues un alumno lo usa para sumar fracciones, por lo que se deduce que confunden la pregunta, y otros alumnos explicitaron que no conocen el método.

En el nivel conceptual, los errores cometidos fueron por el poco dominio de la teoría, y la incom-

prensión del concepto de fracciones equivalentes; estos se manifestaron en el 6% y 13% de la población. Las respuestas se categorizaron de la siguiente manera:

En el nivel procedimental, la representación externa de estas respuestas, por la naturaleza de las preguntas fue simbólica, la cual fue respondida entre el 44% y 64% de la población, lo que implicó que el nivel de complejidad de la pregunta fue mediano para los alumnos. Solo fue logrado el nivel de interiorización entre el 29% y 46% de la población. En este nivel los errores cometidos fueron causados por el uso inadecuado de la técnica, producto de las experiencias previas; estos errores oscilaron entre el 10% y 22% de la población. Se presentan los siguientes casos:

Cuadro 3
Categorización de las producciones referidas a las utilidades prácticas de las fracciones equivalentes

Categoría	Producciones de los alumnos
Aplicar propiedades	<ul style="list-style-type: none">- Para aplicar la propiedad distributiva y conmutativa- Los métodos de divisibilidad- MCD y MCM
Operaciones	<ul style="list-style-type: none">- Multiplicar en cruz- En la suma se suman los numeradores y en la resta se resta, en la multiplicación se multiplican los denominadores- Suma y resta- Dividir
Métodos de amplificación y simplificación	<ul style="list-style-type: none">- Buscar múltiplos comunes para numeradores y denominadores- Sacar la mitad hasta que de la fracción equivalente
Otras	<ul style="list-style-type: none">- Primero se resuelve la suma de unidad

Fuente: Ríos (2008).

Cuadro 4
Categorización de las producciones referidas a los métodos
para hallar las fracciones equivalentes

Categoría	Producciones de los alumnos
Operaciones	<ul style="list-style-type: none"> - Para hacer operaciones entre fracciones - Se resuelve lineal en el caso de sumar y restar y en cruz en el caso de multiplicación y división - Multiplicación en cruz - Simplificar la división - Resultado de la fracción - Multiplicación directa - En el caso de fracciones de diferente denominador, para sumar
Métodos de amplificación y simplificación	<ul style="list-style-type: none"> - Se saca la mitad hasta donde que no se pueda mas
Utilizaciones en la vida real	<ul style="list-style-type: none"> - Comprar tela o queso - Ofertar dos artículos por el precio de uno (1/2 ó 2)
Uso	<ul style="list-style-type: none"> - Para repartir en partes iguales - Se utilizan para agrupar reales de un lado y compuestos - Diferente denominador - La utilizamos en la suma de figuras de una unidad
Otras	<ul style="list-style-type: none"> - Para ser igualdades representativas entre sí - $(2,4)+(3,6)=(2,6)=4 \times 3=12$; 12 12

Fuente: Ríos (2008).

- Si en la igualdad faltaba un número, este era divisor o múltiplo del numerador o denominador correspondiente de la otra fracción.
- Si faltaban los dos números de una fracción, estos eran múltiplos o divisores de los otros dos números correspondientes, o colocaron el número decimal equivalente.
- Si faltaban los dos numeradores o denominadores, estos eran divisores o múltiplos entre sí pero no mantienen la proporción de los otros dos números, o aplicaron ecuaciones incorrectamente.
- Si uno de los miembros de la igualdad era un número natural, aplicaron ecuaciones incorrectamente, o modificaron la igualdad planteada, a otra igualdad donde los dos miembros son fracciones y colocaron un denominador múltiplo o divisor del otro denominador. Estos alumnos no entienden que una fracción puede ser equivalente a un entero.

Cuadro 5
Categorización de las producciones referidas al método de comprobación de multiplicación cruzada

Categoría	Producciones de los alumnos
Hallar resultados	<ul style="list-style-type: none">- Porque de dos fracciones nos queda una sola- Para hallar un número entero- Para hallar el resultado correcto de la fracción- Para saber el resultado por el método adecuado- Porque al multiplicar llegamos al resultado- Para que la división dé la unidad
Operaciones	<ul style="list-style-type: none">- Las fracciones equivalentes se resuelven así
Establecer la igualdad	<ul style="list-style-type: none">- Para lograr igualdades más rápido- Se obtiene la misma equivalencia- Para verificar la igualdad
Igualar denominadores	<ul style="list-style-type: none">- Para poder igualar el mismo denominador utilizando los comunes de cada denominador diferente- Porque tienen diferentes denominadores

Fuente: Ríos (2008).

En la entrevista, ocho alumnos respondieron, de los cuales tres expresaron haberlo realizado al azar, y los otros cinco a pesar de realizar bien la actividad no conocían el concepto matemático que están trabajando, expresaron que por lógica multiplican y dividen por el mismo número.

2.3. Categoría: Interpretación y aplicación de algoritmos de operaciones entre números racionales

Esta categoría, a través de dos ejercicios, pretende determinar el dominio de la técnica para efectuar operaciones combinadas entre números racionales. En el primer ejer-

cicio se combinan una multiplicación y resta de números racionales y en el segundo ejercicio se combinan sumas y restas de fracciones. La representación externa de estas respuestas, por la naturaleza de la pregunta es aritmética, la cual fue respondida entre el 65% y 79% de la población, lo que implica que el nivel de complejidad de la pregunta es mediano para los alumnos. El porcentaje de alumnos que lograron el nivel de interiorización estuvo entre el 14% y 22% de la población, el 2% logró el nivel de condensación en la segunda pregunta y el mismo porcentaje para el nivel de cosificación en la primera pregunta.

En la *primera parte*, de los alumnos que lograron el nivel de interio-

rización, 24 alumnos calcularon el M.C.M. de los denominadores, un alumno estableció como respuesta $6/6$ por lo que no concluyó la unidad como equivalente a la fracción resultante, un alumno convirtió cada fracción en su expresión decimal equivalente y operó con números decimales, un alumno en el proceso obtuvo dos fracciones con el mismo denominador (3 alumnos) y al sumar aplicó el procedimiento conocido como "método en equis", no aplicaron el algoritmo para sumar fracciones con el mismo denominador. Los alumnos que lograron el nivel de cosificación desarrollaron el procedimiento más corto, multiplicar las fracciones, simplificar con lo que obtiene fracciones con el mismo denominador, aplicando por último el algoritmo correspondiente. En general, se observó que ningún alumno justificó el procedimiento aplicado para sumar, restar o multiplicar números racionales; un alumno aplicó el mismo procedimiento para efectuar las tres operaciones; y un alumno respetó el orden de prioridad de las operaciones, primero efectuó la multiplicación y luego la resta.

En la *segunda parte*, de los alumnos que lograron el nivel de interiorización, dos alumnos aplicaron el llamado "método largo" (donde los denominadores se multiplican para obtener el denominador de la fracción resultante), 22 alumnos deter-

minaron el M.C.M. de los denominadores, 2 alumnos hallaron las expresiones decimales equivalentes, 17 alumnos aplicaron la propiedad asociativa y el "método en equis" para obtener los resultados parciales; los alumnos que lograron el nivel de condensación, aplicaron la propiedad asociativa, y al obtener los resultados parciales simplificaron las fracciones, además para obtener las fracciones resultantes aplicaron el "método en equis". En la entrevista se observó, en general, que los alumnos aplicaron otro método para resolver este ejercicio, pero al realizarlo y preguntarle porque las respuestas eran diferentes, no se percataron que los resultados eran equivalentes; por otro lado, expresaron que los métodos se aplican según el caso, pero al preguntarles las condiciones necesarias para aplicar un determinado método, no respondieron; y en general escogieron un método más fácil.

Los errores cometidos fueron por la complejidad del símbolo (entre 29% y 39% de la población), por la ejecución de las tareas (92% y 53%) y debido a la incompletitud de la respuesta (2% y 5%), todos a consecuencia de las experiencias previas adquiridas en niveles educativos anteriores.

En el primer ítem, las producciones de los alumnos presentan los siguientes errores: debido a la complejidad del símbolo donde: no res-

petaron las igualdades (15,34%), como por ejemplo: $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2-3}{6} = \frac{-1}{6}$, y $\frac{3-2}{6} = \frac{1}{6} + \frac{4}{3}$, y no simplificaron las fracciones (31,74%). Debido a la incompletitud en el procedimiento, donde realizaron operaciones parciales. Y debido a la inadecuada ejecución de las tareas, tales como: prevaencia de la resta ante la multiplicación (31,74%), no respetaron los signos de agrupación, algoritmos de multiplicación y suma errados tales como: $\frac{1}{3} + \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$, $\frac{-11}{6} + \frac{1}{3} = \frac{-33,6}{18}$, $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{12}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{3-2}{5}$; $\frac{1}{1} \cdot \frac{-4}{3} = \frac{3 \cdot 4}{3}$, $\frac{-1}{6} \cdot \frac{-4}{3} = \frac{5}{18}$, $\frac{1}{1} \cdot \frac{-4}{3} = \frac{-3}{4}$, $\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{4}$, $\frac{2-3 \cdot (-8)}{6} = \frac{-1 \cdot (-8)}{6} = \frac{-7}{6}$, $\frac{6-9-6}{18} = \frac{-22}{18}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; errores en la suma y multiplicación de enteros (6,67%); errores al operar los signos y simplificaciones erradas.

En el segundo ítem las producciones de los alumnos presentaron errores debido a las experiencias previas; éstos fueron los siguientes: debido a la ejecución inadecuada de las tareas como por ejemplo: aplicaron erradamente el algoritmo de la adi-

ción (12,67%): $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{6}{10} - \frac{5}{8} = \frac{48}{50}$, $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{5+6}{8} = \frac{11}{8}$, $\frac{6}{8} - \frac{5}{8} = \frac{1}{0}$, $\frac{16}{8} - \frac{5}{8} = \frac{128-40}{8}$ =, errores en operaciones

(19,33%), operaron los números enteros erradamente. Debido a la incompletitud en el procedimiento, donde realizaron operaciones parciales. Y debido a la complejidad del símbolo: no simplificaron (34%), utilizaron las igualdades inadecuadamente (20,67%) como, $\frac{40-30}{48} = \frac{10}{48} + \frac{1}{2}$, problemas con el manejo de las igualdades y las simplificaciones (15,33%) como

$\frac{5}{6} - \frac{5}{8} = \frac{40-30}{48} = \frac{10}{48} + \frac{1}{2} = \frac{20+48}{96} = \frac{68}{96}$ dividieron denominador entre numerador para hallar la expresión decimal equivalente, como por ejemplo: $\frac{8}{96} = 12$.

2.4. Categoría: Resolución de problemas

El problema que se trabajó en el cuestionario y la entrevista fue el siguiente: Una llave se abre para llenar con agua un tanque cilíndrico de dos metros de altura en 10 horas, otra llave lo llena en 12 horas y otra en 15 horas ¿A qué altura llegará el

agua en el tanque si las tres llaves se abren durante una hora?

Las representaciones externas que prevalecieron fueron la aritmética y la escrita, donde la primera fue empleada por el 27% de la población y la segunda por el 11%. Este ítem fue respondido por el 31% de la población, lo que hace pensar que este ítem es de alta complejidad para el alumno, ya que ningún logró el nivel de cosificación; el 9% logró el nivel de condensación y el 7%, la interiorización. El error mas frecuente (11%) se dio al no explicitaron la respuesta, el 6% de la población eligió mal la estrategia de solución y solo dos alumnos presentaron incomprensión en la simbología.

De los alumnos que lograron el nivel de interiorización; 3 alumnos hicieron la conversión de 2 mts a 200 cm, realizaron las divisiones correspondientes, pero sumaron incorrectamente y no explicitaron la respuesta; 3 alumnos realizaron las divisiones correctas, pero sumaron mal y no explicitaron la respuesta; un alumno dio la respuesta correcta sin ninguna justificación; y 7 alumnos sumaron fracciones obteniendo la respuesta correcta, pero solo uno explicitó la respuesta incorrectamente.

De los alumnos que lograron el nivel de condensación, solo lograron la respuesta correcta: 5 alumnos quienes operaron con regla de tres y fracciones; 7 aplicaron la regla de tres operando con decimales; un

alumno trabajó con regla de tres y realizó la conversión de centímetros a metros; un alumno realizó un razonamiento proporcional y operó con fracciones; dos alumnos realizaron divisiones y trabajaron con centímetro; y un alumno trabajó con la expresión decimal equivalente a las fracciones y suma.

En la entrevista solo cuatro alumnos respondieron; de ellos, dos transformaron 2 metros a centímetros, dividieron entre los tiempos para saber el volumen de agua que esparce cada llave en una hora, y luego sumaron, otro alumno aplicó tres reglas de tres correctamente y sumaron los tres resultados; y otro dio como respuesta la suma los tres tiempos.

Los errores que presentaron las producciones de los alumnos en este ítem fueron debido a las experiencias previas y a la incomprensión de algunos conceptos matemáticos y del problema, estos errores fueron los siguientes: incomprensión del ítem (3,39%), expresaron que la altura cubierta por las tres llaves en una hora es la mitad del tanque, cuando la respuesta correcta es la mitad de un metro, es decir 50 cms; escogencia del método de solución inadecuado (20,34%), entre los cuales tenemos: regla de tres con datos incorrectos y operaciones entre cantidades; ejecución de procedimientos inadecuados (13,56%), tales como: suma incorrecta de decimales, fracciones y enteros, y con-

versiones incorrectas de mts. a cm; incomprensión del planteamiento del problema (6,78%), lo cual se evidenció en lo siguiente: la respuesta no corresponde a lo que se pregunta y la respuesta obtenida sobrepasa los 2 mts. que mide el tanque; no explicitaron la respuesta a la pregunta, aunque el procedimiento aplicado es correcto (35,6%).

6. Conclusiones

Con respecto a las concepciones previas de los alumnos de la muestra, referidas a las competencias procedimentales asociadas al concepto de fracción, se concluyó:

1. Por el porcentaje de respuestas obtenidas se concluye que *las categorías de mayor complejidad* para los alumnos fueron: métodos para hallar y verificar las fracciones equivalentes, el uso práctico de las mismas, y la resolución de problemas. *Las categorías de mediana complejidad* fueron: representación de números racionales en la recta real, hallar fracciones equivalentes, y aplicación de algoritmos de operaciones combinadas entre fracciones. No hubo *categorías de baja complejidad*.

2. Con respecto a los niveles de estructuración, se utilizó el siguiente baremo: si el nivel fue logrado por menos del 40% de la población, se asumirá un porcentaje bajo de logro para ese nivel de estructuración; si el nivel fue logrado por un porcentaje comprendido entre el 40% y

75% de la población, se asumirá un porcentaje moderado de logro para ese nivel; y si el nivel fue logrado por un más del 75% de la población, se asumirá un porcentaje alto de logro para ese nivel. En función a esta escala tenemos las siguientes conclusiones:

- Para la representación de números racionales en la recta real, menos del 19% de la población logró los niveles de estructuración.
- Para la interpretación y aplicación de algoritmos para hallar fracciones equivalentes, menos del 7% de la población logró los niveles de estructuración para la interpretación de las fracciones equivalentes, donde se establecen métodos para hallar y verificar las fracciones equivalentes y sus utilidades prácticas; y para la aplicación de algoritmos para hallar las fracciones equivalentes el porcentaje de logro fue bajo para cinco de las seis equivalencias propuestas.
- Para la Interpretación y aplicación de algoritmos de operaciones entre fracciones menos del 25% de la población logró los niveles de estructuración.
- Para la resolución de problemas menos del 15% de la población logró los niveles de estructuración.

3. Con respecto a los errores y obstáculos se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- Con respecto a la representación de números racionales en la recta real los errores cometidos son debido a la incompreensión del símbolo, los cuales oscilan entre 25% y 43%.
 - En la aplicación de algoritmos para hallar fracciones equivalente entre el 10% y 23% eligieron incorrectamente la técnica; y entre el 6% y 13% cometen errores debido a la comprensión de ítem, pues las repuestas dadas con respecto a los métodos para hallar y verificar las fracciones equivalentes y sus usos prácticos eran incoherentes pues lo relacionaban a las operaciones básicas entre las fracciones.
 - En la categoría de interpretación y aplicación de algoritmos de operaciones entre fracciones, los errores mas frecuentes fueron los de cálculo, 53% de la población los manifestaron en la suma y restas combinadas, y el 93% en la suma y producto combinados; también se manifestaron errores por la incompreensión del símbolo y por la incompletitud de tareas.
 - En la categoría de resolución de problema fue donde se manifestaron tres tipos de errores, siendo los de mayor porcentaje la no especificidad de la respuesta, aun y cuando el proceso es correcto y la elección inadecuada de la técnica.
 - Los obstáculos que prevalecieron fueron: debido a las experiencias previas, por la incompreensión de conceptos matemáticos y la incompreensión del problema.
4. Con respecto a las representaciones externas tenemos las siguientes conclusiones:
- Se utilizó solamente la representación externa simbólica en las categorías referidas a la representación de números racionales en la recta real, y la aplicación de algoritmos para hallar fracciones equivalentes. Para los ítems referidos a las utilizations prácticas de las fracciones equivalentes y los métodos para hallarlas y verificarlas, se utilizaron representaciones informales y formales, la primera en mayor cantidad.
 - Se utilizó solamente la representación externa aritmética en la categoría referida a la interpretación y aplicación de algoritmos de operaciones entre fracciones.
 - En la resolución de problemas predominó la aritmética sobre la escrita en una razón de 51 a 20.
5. Al hacer un análisis de contenido a las respuestas dadas por los alumnos, se concluyó que:
- Menos de la tercera parte de la población logró identificar las fracciones menores que uno; y menos de la décima parte lograron identificar las fracciones

entre 0 y 1; estos alumnos utilizaron el número decimal equivalente a cada fracción, prevaleciendo las experiencias previas adquiridas en los niveles iniciales.

- Menos de la décima parte de la población logró explicar las utilidades de las fracciones equivalentes, los métodos para hallarlas y el método de verificación. En las entrevistas se observaron respuestas donde utilizaron el método de verificación en algunas oportunidades, pero explicitaron que no lo conocen; explicitaron que los métodos de amplificación y simplificación sirven para trabajar con cantidades pequeñas, sirven para operar fracciones (pero no explicaron), y explicitaron el proceso.
- Menos de la mitad de la población logró completar correctamente las igualdades entre fracciones; en las entrevistas manifestaron que no conocen el concepto matemático trabajado, y que aplicaron la "lógica para resolver multiplicando o dividiendo"
- Menos de la cuarta parte de la población logró sumar y restar correctamente fracciones usando el método tradicional de suma de fracciones por parejas, lo que hacen es utilizar el método cruzado; y la quinta parte de la población logró los niveles

de estructuración en la suma y multiplicación de números racionales. Los errores más comunes fueron el uso inadecuado de las igualdades y aplicación de algoritmos inadecuados. En las entrevistas ningún alumno justificó el procedimiento aplicado.

- Menos de la quinta parte de la población logró los niveles de estructuración en la resolución de problemas, donde los errores más comunes fueron la no especificidad de la respuesta y la elección inadecuada de la técnica; además muy pocos alumnos respondieron este ítem.

En las entrevistas se pudo verificar que muchas de las respuestas asociadas a las competencias procedimentales fueron azarosas, pues los alumnos no saben justificar sus respuestas. Esta situación se explica pues, como los alumnos lo manifestaron en las entrevistas, las competencias que se desarrollan en los primeros dos niveles de nuestro sistema educativo son los procedimentales, pues no se explican las bases teóricas de los mismos, por lo que se descuidan las competencias conceptuales, lo que repercute en el uso de las representaciones externas por parte de los estudiantes, pues lo que priva en los niveles educativos previos, es el uso de las representaciones aritméticas.

Indicador de lo anteriormente descrito, en el caso de los alumnos

entrevistados, son sus respuestas, las cuales presentaron deficiencias teóricas, pues los conocimientos procedimentales aplicados por ellos, fueron realizados por ensayo y error, y al pedirles algún tipo de justificación, ellos indicaron que de esa manera se lo enseñaron.

Para culminar, llama la atención que en los programas de Matemática de las tres primeras etapas de Educación Básica, se observa que se trabajan en una forma completa las competencias procedimentales consideradas en este estudio. Lamentablemente pareciera que los alumnos no adquieren estas competencias, por lo menos estos son los resultados que muestran los datos que suministró la población escogida, los cuales evidenciaron que los alumnos que ingresan a la universidad tienen deficiencias en las competencias procedimentales analizadas.

Referencias Bibliográficas

- ASTOLFI, J. (2001). **Conceptos claves en la didáctica de las disciplinas**. Serie fundamentos; Primera edición; número 17. España. Editorial DIADA. Pp. 94-98.
- AZCÁRATE, C. (1995). "Sistemas de representación". *Revista UNO, Didáctica de las matemáticas*; Número 4. Pp. 53-61.
- BISQUERRA, R. (1989). **Métodos de investigación educativa**. Perú. Ediciones CEAC. Pp. 275-278.
- BLÁZQUEZ, S. y ORTEGA, T. (2001). "Sistemas de representación en la enseñanza de límite". *Revista Re-lime*. Volumen 4, Número 3, Noviembre. Pp. 100-120.
- GAGNÉ, E. (1991). **La psicología cognitiva del aprendizaje escolar**. Primera edición. México. Editorial Aprendizaje Visor. Pp. 43-50, 77-118, 213-247.
- KILPATRICK, J.; GOMEZ, P. Y RICO, L. (1995). **Educación Matemática**. México. Editorial Iberoamericana. Pp. 86-92.
- LLINARES, S. y SÁNCHEZ, M. (2000). **Las fracciones**. Editorial Síntesis. Colección matemáticas: cultura y aprendizaje. Número 4.
- MAZA, C. (1995 b). **Aritmética y representación: De la comprensión del texto al uso de materiales**. Primera Edición. México. Editorial Paidós. Pp. 67-76; 119-130; 149-184.
- POZO, J. (2001). **Teorías cognitivas del aprendizaje**. Sexta Edición. España. Editorial Morata. Pp. 39-50.
- RIOS, Y. (2000). **Los errores en el área de matemática**. Trabajo final del Seminario de Didácticas de las Matemáticas, Doctorado de Ciencias Humanas de la Universidad del Zulia.
- RÍOS, Y. y ESCALONA, M. (2002). **Proyecto de investigación: Representaciones cognitivas del concepto de fracción en alumnos que ingresan al programa de la Licenciatura de Educación, Mención Matemática y Física**. Venezuela; Centro de Estudios Matemáticos y Físicos de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia. Pp. 5-15.

- RÍOS, Y. (2005). **El proceso de una Ingeniería Didáctica**. Trabajo de ascenso para optar a la categoría de profesor asociado. Universidad del Zulia, Facultad de Humanidades y Educación. Venezuela. Pp. 1-21.
- RUMELHARD, G. (1997). "Trabajar los obstáculos para asimilar los conocimientos científicos". En: **Los obstáculos epistemológicos en la enseñanza**. Compiladora: De Camilloni, Alicia. Primera Edición. España. Serie Didáctica General. Editorial Gedisa. Pp. 31-62.
- SEGOVIA, I. y RICO, L. (2001). "Unidades didácticas. Organizadores" en Castro, Enrique (Editor) **Didáctica de las Matemática en la Educación Primaria**. Síntesis. España.