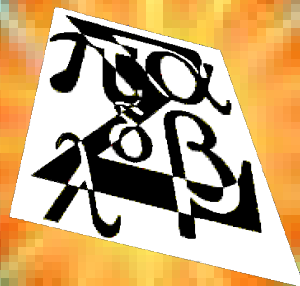


Divulgaciones Matemáticas



Departamento de Matemática

Depósito legal: pp 199302ZU392

p-ISSN 1315-2068

e-ISSN 2731-2437

Maracaibo - Venezuela



Universidad
del Zulia



Facultad
Experimental
de Ciencias

Vol. 23-24 - No. 1-2 - 2022-2023

Divulgaciones Matemáticas

Revista Matemática de la Universidad del Zulia
Facultad Experimental de Ciencias
Departamento de Matemática

Revista arbitrada, publicada de forma digital, de libre acceso, indizada en Latindex, Wordcat, Mir@bel, MIAR, Dialnet, EuDML, Mathematical Reviews, MathSci online/CD-ROM, Zentralblatt für Mathematik, Reveneyt y REDIB. Se publica un volumen anual compuesto por dos números, que aparecen en junio y diciembre.

Comité Editorial

Dr. Tobías Rosas Soto (LUZ)
Dr. Vinicio Ríos (LUZ) Dr. Wilson Pacheco (LUZ)
Dr. Deivi Luzardo (LUZ)

Editor Jefe: Dr. Tobías Rosas Soto (trosas@demat-fecluz.org)

Editores Asociados: Dr. Vinicio Ríos, Dr. Wilson Pacheco

Editores Eméritos: Dr. Alirio J. Peña P., MSc. Ángel V. Oneto R., Dr. José H. Nieto S., Dr. Genaro González, Dr. Daniel Núñez.

Editores Fundadores: Dr. Alirio J. Peña P., MSc. Ángel V. Oneto R.

Portada diseñada por Tobías Rosas Soto. Dirección Postal:

Revista Divulgaciones Matemáticas
Departamento de Matemática
Facultad Experimental de Ciencias
La Universidad del Zulia - Apartado Postal 526
Maracaibo, Estado Zulia
Venezuela

Correo electrónico: divulgaciones@demat-fecluz.org

URL: produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones

Depósito Legal pp 199302ZU392

p-ISSN: 1315-2068

Depósito Legal pe ZU2021000035

e-ISSN: 2731-2437

Compuesta con \LaTeX y $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$ en el Departamento de Matemática de la Facultad Experimental de ciencias, Universidad del Zulia.

©1993 La Universidad del Zulia.

Universidad del Zulia
Maracaibo, Venezuela



DIVULGACIONES
MATEMÁTICAS

Vol. 23-24

2022-2023

No. 1-2

Presentación

El Comité Editorial de *Divulgaciones Matemáticas* se complace en presentar el **Vol. 23-24, No. 1-2, 2022-2023**. En el presente volumen se resumen todos los artículos recibidos entre los años **2022** y **2023**, los mismos fueron evaluados y aceptados para su publicación. Esta edición nace como una decisión del Comité Editorial en busca de revivir las actividades de la revista, las cuales se han visto menguadas por la poca demanda de artículos por parte de los autores por diversas razones. Entre éstas figura el hecho de que la revista no aparece reflejada en SCOPUS, por la no continuidad de publicación de números y volúmenes de la revista, por la falta de trabajos sometidos a la revista paradójicamente.

Los trabajos publicados en esta edición mostrarán la fecha en la que se recibieron y la fecha en la que fueron aprobados. Todos los trabajos recibidos en los años 2022 y 2023 fueron artículos de investigación, dichos trabajos se distribuyen de la siguiente manera: cuatro (4) artículos en el año 2022, y cinco (5) artículos en el año 2023. En cada año solo un artículo, de los recibidos, no aprobó la etapa de evaluación por los árbitros respectivos. De manera que en este número se publican solo siete (7) artículos en la sección de Artículos de Investigación. Por otro lado, en la sección de Problemas y Soluciones, se proponen dos (2) problemas, y se presenta la solución del problema No. 27 propuesto en Vol. 8, No. 2, 2000 de la revista.

El trabajo editorial relacionado con este número es el resultado de mucho esfuerzo del Comité Editorial y del Editor Jefe de la revista. Los Editores queremos expresar nuestro agradecimiento a todos aquellos que hicieron posible este volumen: a los autores de los trabajos que se presentan, que dieron su voto de confianza a la revista; a los árbitros que evaluaron los artículos, cuya labor desinteresada permitió satisfacer los estándares de calidad de la revista y mejorar sensiblemente la forma de los trabajos; al equipo editorial de *Divulgaciones Matemáticas*. A todos, mil gracias.

La revista está ahora en el portal de *Revistas Científicas y Humanísticas de la Universidad del Zulia (ReviCyHLUZ)* cuyo sitio web oficial es: produccioncientificaluz.org. Ahora los artículos están identificados con el membrete del *Sistema de Servicios Bibliotecarios y de Información de LUZ (SERBILUZ)*, y la revista pasa a tener como sitio web oficial produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones.

Es importante aclarar que la dirección web divmat.demat-fecluz.org continúa funcionando para obtener los números de la revista publicados antes del año 2016, hasta que los mismos sean trasladados en su totalidad al nuevo sitio web mencionado. Todo esto con la finalidad de darle más expansión y reconocimiento a la revista.

Por último, el Comité Editorial de *Divulgaciones Matemáticas* pide disculpas a los autores de los artículos aquí publicados por el notable retraso en la publicación de este número y por los inconvenientes que esto pudo haberles causados, les agradecemos su espera. Además, invitamos a la comunidad matemática venezolana e internacional a seguir dándonos su voto de confianza sometiendo sus trabajos en la revista para evaluación y posible publicación.

¹ Dr. Tobías Rosas Soto.

¹ Editor en Jefe de *Divulgaciones Matemáticas* y editor del presente número

Presentation

The Editorial Committee of *Divulgaciones Matemáticas* is pleased to present **Vol. 23-24, No. 1-2, 2022-2023**. This volume brings together all the articles received between the years **2022** and **2023**, they were evaluated and accepted for publication. This edition was born as a decision of the Editorial Committee in search of reviving the activities of the journal, which have been diminished by the low demand for articles by the authors for various reasons. Among these is the fact that the journal is not reflected in SCOPUS, due to the non-continuity of publication of issues and volumes of the journal, due to the lack of works submitted to the journal, paradoxically.

The works published in this edition will show the date they were received and the date they were approved. All the works received in the years 2022 and 2023 were research articles, these works are distributed as follows: four (4) articles in the year 2022, and five (5) articles in the year 2023. In each year only one article, of those received, did not pass the evaluation stage by the respective referees. So in this issue only seven (7) articles are published in the Research Articles section. On the other hand, in the Problems and Solutions section, two (2) problems are proposed, and the solution to problem No. 27 proposed in Vol. 8, No. 2, 2000 of the magazine is presented.

The editorial work related to this issue is the result of much effort by the Editorial Committee and the Editor-in-Chief of the journal. The Editors would like to express our gratitude to all those who made this volume possible: to the authors of the works presented, who gave their vote of confidence to the journal; to the referees who evaluated the articles, whose selfless work made it possible to satisfy the quality standards of the journal and significantly improve the form of the works; to the editorial team of *Divulgaciones Matemáticas*. Thank you all.

The journal is now on the portal of *Scientific and Humanistic Magazines of the University of Zulia (ReviCyHLUZ)* whose official website is: produccioncientificaluz.org. Now the articles are identified with the letterhead of the *LUZ Library and Information Services System (SERBILUZ)*, and the journal now has as its official website produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones.

It is important to clarify that the web address divmat.demat-fecluz.org continues to function to obtain the issues of the journal published before 2016, until they are transferred in their entirety to the new website mentioned. All this with the purpose of giving more expansion and recognition to the journal.

Finally, the Editorial Committee of *Divulgaciones Matemáticas* apologizes to the authors of the articles published here for the notable delay in the publication of this issue and for the inconveniences that this may have caused them, we thank them for their wait. Furthermore, we invite the Venezuelan and international mathematical community to continue giving us their vote of confidence by submitting their work to the journal for evaluation and possible publication.

² Dr. Tobías Rosas Soto.

²Chief Editor of *Divulgaciones Matemáticas* and editor of the present volume

DIVULGACIONES MATEMÁTICAS

Vol. 23-24, No. 1-2, 2022-2023


Contenido (Contents):

Artículos de Investigación (Research papers)

- Super quasi-topological and paratopological vector spaces versus topological vector spaces.**
Super casi-topológicos y paratopológicos espacios vectoriales versus espacios vectoriales topológicos.
Madhu Ram, Bijan Davvaz 1–11
- Los números Ramsey para tres grafos y tres colores.**
The Ramsey numbers for three graphs and three colors.
José Figueroa, Tobías Rosas, Henry Ramírez, Armando Anselmi 12–28
- Estudio cualitativo del metabolismo de una droga ingerida.**
Qualitative study of the metabolism of an ingested drug.
Berónica Aguilar - Adolfo Fernández - Sandy Sánchez - Antonio Ruiz 29–43
- $Top(X)$ y $Spec(\tau)$ como espacios primales.**
 $Top(X)$ and $Spec(\tau)$ as primal spaces.
Viviana Benavides - Jorge Vielma 44–53
- Grafo divisor de cero de $\mathbb{Z}_{2^r q^s}$.**
Zero divisor graph of $\mathbb{Z}_{2^r q^s}$.
Juan Otero - Daniel Brito - Tobías Rosas 54–63
- Un método nuevo para eliminar la indeterminación en los problemas singularmente perturbados con resonancia de Ackerberg y O'Malley.**
A new method for eliminating the indeterminacy in the singularly perturbed problems with Ackerberg-O'Malley resonance.
Jacques Laforgue 64–81
- Boundary Estimation with the Fuzzy Set Regression Estimator.**
Estimación Frontera con el Estimador de Regresión con Conjunto Difuso.
Jesús Fajardo 82–106

Problemas y Soluciones (Problems and Solutions)

Tobías Rosas Soto. (Editor) 107–112

Divulgaciones Matemáticas Vol. 23-24, No. 1-2 (2022-2023), pp. 1–11
<https://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones/>
DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.11515886>
 (CC BY-NC-SA 4.0)

©Autor(es)
e-ISSN 2731-2437
p-ISSN 1315-2068

Super quasi-topological and paratopological vector spaces versus topological vector spaces

Super casi-topológicos y paratopológicos espacios vectoriales versus espacios vectoriales topológicos

Madhu Ram (madhuram0502@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6583-0978>

Department of Mathematics

University of Jammu

Jammu-180006, Jammu & Kashmir, India.

Bijan Davvaz (davvaz@yazd.ac.ir)

Department of Mathematics

Yazd University

Iran.

Abstract

In this paper, we introduce the idea of super quasi-topological vector space which is an extension of the concept of topological vector space and investigate some of its basic properties. We extend the existing notion of quasi-topological vector space to all complex vector spaces and investigate the relationship of super quasi-topological vector spaces with paratopological and quasi-topological vector spaces.

Palabras y frases clave: Topological vector space, paratopological vector space, quasi-topological vector space, super quasi-topological vector space, quotient space.

Resumen

En este artículo, presentamos la idea del espacio vectorial supercuasi-topológico, que es una extensión del concepto de espacio vectorial topológico, e investigamos algunas de sus propiedades básicas. Extendemos la noción existente de espacio vectorial cuasi-topológico a todos los espacios vectoriales complejos e investigamos la relación de los espacios vectoriales súper cuasi-topológicos con los espacios vectoriales paratopológicos y cuasi-topológicos.

Key words and phrases: Espacio vectorial topológico, espacio vectorial paratopológico, espacio vectorial cuasi-topológico, espacio vectorial supercuasi-topológico, espacio cociente.

1 Introduction

Recall that a paratopological group is a group G with a topology such that the group operation of G is continuous. If in addition, the inversion map in a paratopological group is continuous, then it is called a topological group.

Recibido 11/03/2022. Revisado 7/04/2022. Aceptado 21/09/2022.

MSC (2010): Primary 57N17; Secondary , 57N99.

Autor de correspondencia: Madhu Ram

According to [2], a real vector space L endowed with a topology τ such that $(L, +, \tau)$ is a paratopological group, is called:

- (1) paratopological vector space if for each neighborhood U of λx with $x \in L$ and $\lambda \in \mathbb{R}^+$ (the set of non-negative real numbers), there exist a neighborhood V of x and an $\epsilon > 0$ such that $[\lambda, \lambda + \epsilon].V \subseteq U$.
- (2) quasi-topological vector space if the function $H_r: L \rightarrow L$ defined by $H_r(x) = rx$ with $r \in \mathbb{R}^+$, is continuous.

Hence, all translations and dilations of a paratopological (resp. quasi-topological) vector space are homeomorphisms. For more details, see [1] and [2]. Paratopological vector spaces were discussed and many results have been obtained (for example, see [1], [2], [3] and [4]).

Lemma 1.1. (cf. [2]) *For a real vector space L with a topology τ , the following conditions are equivalent.*

- I. (L, τ) is a paratopological vector space.
- II. There exists a local basis \mathcal{B} at 0 of L satisfying the following conditions:
 - (a) for every $U, V \in \mathcal{B}$, there exists $W \in \mathcal{B}$ such that $W \subseteq U \cap V$;
 - (b) for each $U \in \mathcal{B}$, there exists $V \in \mathcal{B}$ such that $V + V \subseteq U$;
 - (c) for each $U \in \mathcal{B}$ and for each $x \in U$, there exists $V \in \mathcal{B}$ such that $x + V \subseteq U$;
 - (d) for each $U \in \mathcal{B}$ and for each $r > 0$, $rU \in \mathcal{B}$;
 - (e) each $U \in \mathcal{B}$ is absorbent and quasi-balanced.

Motivated by the papers [2] and [3], the aim of this paper is to introduce and study the super quasi-topological vector spaces. Relationship of super quasi-topological vector spaces with paratopological, quasi-topological and topological vector spaces is investigated.

In the following, all vector spaces are over the field $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. For any undefined concepts and terminologies, refer to [8].

2 Relationship among various classes of topological vector spaces

In this section, we define super quasi-topological vector space and extend the definition of paratopological and quasi-topological vector space to all complex vector spaces. Then we investigate the relation between super quasi-topological, quasi-topological, paratopological and topological vector spaces.

Definition 2.1. Let L be a vector space that is equipped with a topology τ such that $(L, +, \tau)$ is a paratopological group. We say that (L, τ) is

1. paratopological vector space if for each neighborhood U of rx with $x \in L$ and $r \in \mathbb{R}^+$ (the set of non-negative real numbers), there exist a neighborhood V of x and an $\epsilon > 0$ such that $[r, r + \epsilon].V \subseteq U$;

2. quasi-topological vector space if the function $\varphi_r: L \rightarrow L$ defined by $\varphi_r(x) = rx$ with $r \in \mathbb{R}^+$, is continuous;
3. super quasi-topological vector space if the function $\varphi_r: L \rightarrow L$ defined by $\varphi_r(x) = rx$ with $r \in \mathbb{R}$, is continuous.

Proposition 2.1. *There is a first countable locally connected quasi-topological vector space which is not a super quasi-topological vector space.*

Proof. Suppose that the complex vector space $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ is endowed with the topology which has a base of the sets of the form $D_r \times D_s$ where $D_r = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) + \frac{i}{\sqrt{2}}(x+y) : x, y \in \mathbb{R}, x \geq r, i^2 = -1\}$, $D_s = \{s + iy : y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ and $r, s \in \mathbb{R}$. Then $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ is a first countable locally connected quasi-topological vector space but it is not a super quasi-topological vector space. Furthermore, $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ is not a paratopological vector space. Also, it is neither a second countable nor a lindelof space. \square

Proposition 2.2. *There is a first countable non-connected quasi-topological vector space which is not a paratopological vector space.*

Proof. Endow the complex vector space \mathbb{C} with the topology generated by the family of sets of the form $D_r = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(x-r) + \frac{i}{\sqrt{2}}(x+r) : x \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$, with $r \in \mathbb{R}$. Then \mathbb{C} is first countable non-connected quasi-topological vector space. Observe that \mathbb{C} is not a paratopological vector space. \square

Proposition 2.3. *There is a first countable connected paratopological vector space which is not a topological vector space.*

Proof. Consider the topology on the complex vector space $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ which has a base of the sets of the form $P_r \times Q_s$, where $P_r = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) + \frac{i}{\sqrt{2}}(x+y) : x, y \in \mathbb{R}, x > r, i^2 = -1\}$, $Q_s = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, y > s, i^2 = -1\}$ and $r, s \in \mathbb{R}$. Then $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ with this topology is a first countable connected paratopological vector space which is not a topological vector space. Moreover, it is second countable as well as lindelof space. \square

Proposition 2.4. *There is a first countable non-connected super quasi-topological vector space which is not a paratopological vector space.*

Proof. Obtain the topology on the complex vector space \mathbb{C} by the family of sets of the form $Q_r = \{\frac{1}{2}(r - \sqrt{3}y) + \frac{i}{2}(\sqrt{3}r + y) : y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$, with $r \in \mathbb{R}$. Then \mathbb{C} with this topology is a first countable super quasi-topological vector space, but it is not a paratopological vector space. \square

Proposition 2.5. *There is a first countable connected real quasi-topological vector space which is not a super quasi-topological vector space.*

Proof. Consider the topology on the real vector space \mathbb{R} generated by the family of sets of the form $[a, +\infty)$, with $a \in \mathbb{R}$. Then \mathbb{R} with this topology is a first countable connected quasi-topological vector space which is not a super quasi-topological vector space. \square

Proposition 2.6. *Let (L, τ) be a complex paratopological vector space. Then (L, τ_θ) is also a paratopological vector space where $\tau_\theta = \{e^{i\theta}U : U \in \tau, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.*

Proof. Let x and y be any two elements of L , and $e^{i\theta}D$ an open neighborhood of $x + y$ (with respect to the topology τ_θ). Then there exist a neighborhood U of $e^{-i\theta}x$ and a neighborhood V of $e^{-i\theta}y$ (with respect to the topology τ) such that $U + V \subseteq D$. As $e^{-i\theta}x \in U$ and $e^{-i\theta}y \in V$, we have $x \in e^{i\theta}U$ and $y \in e^{i\theta}V$. This gives

$$x + y \in e^{i\theta}(U + V) \subseteq e^{i\theta}D.$$

Let r be any non-negative real number and $e^{i\theta}U$ an open neighborhood of rx (with respect to the topology τ_θ). Then there exist a neighborhood V of $e^{-i\theta}x$ (with respect to the topology τ) and an $\epsilon > 0$ such that $[r, r + \epsilon] \cdot V \subseteq U$ which implies that $rx \in [r, r + \epsilon] \cdot e^{i\theta}V \subseteq [r, r + \epsilon] \cdot e^{i\theta}U$. Thus (L, τ_θ) is a paratopological vector space. \square

Proposition 2.7. *Let (L, τ) be a complex quasi-topological vector space. Then (L, τ_θ) is also a quasi-topological vector space where $\tau_\theta = \{e^{i\theta}U : U \in \tau, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.*

Proof. Follows in a similar way as the proof of Proposition 2.6. \square

Proposition 2.8. *Let (L, τ) be a complex super quasi-topological vector space. Then (L, τ_θ) is also a super quasi-topological vector space where $\tau_\theta = \{e^{i\theta}U : U \in \tau, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.*

Proof. Follows in a similar way as the proof of Proposition 2.6. \square

Definition 2.2. We say that a quasi-topological vector space (L, τ) is strong if it satisfies the following conditions:

1. there exists a topology \mathfrak{S} on L such that (L, \mathfrak{S}) is a topological vector space with $\mathfrak{S} \subseteq \tau$, and
2. there exists a local base \mathcal{B} at the zero vector of the quasi-topological vector space (L, τ) such that $V \setminus \{0\}$ is open in (L, \mathfrak{S}) for every $V \in \mathcal{B}$.

Proposition 2.9. *There exists a first countable non-connected strong quasi-topological vector space which is not second countable.*

Proof. Consider the real vector space \mathbb{R} endowed with the topology τ which has a base of the sets of the form (a, b) and $[c, +\infty)$, where a, b and c are real numbers. Then (\mathbb{R}, τ) is a first countable strong quasi-topological vector space. Clearly, it is neither a connected space nor a second countable space. \square

Proposition 2.10. *There exists a first countable non-connected quasi-topological vector space which is not strong.*

Proof. Consider the complex plane \mathbb{C} endowed with the topology τ which has a base of the sets of the form $D(z, r)$ and D_t where $D(z, r)$ denotes the open disk with center z and radius r , and $D_t = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq t, t \in \mathbb{R}\}$. Then (\mathbb{C}, τ) is a quasi-topological vector space which is not strong. \square

Proposition 2.11. *There exists a regular super quasi-topological vector space which is not strong.*

Proof. Let \mathbb{C} and τ be as in Proposition 2.5. Then \mathbb{C} is not a strong quasi-topological vector space. \square

Proposition 2.12. *There exists a Hausdorff strong quasi-topological vector space which is not a super quasi-topological vector space.*

Proof. Let \mathbb{R} and τ be as in Proposition 2.11. Then \mathbb{R} is not a super quasi-topological vector space. \square

The following result collects the above information and shows that the class of paratopological vector spaces and the class of quasi-topological vector spaces are sufficiently wide.

Theorem 2.1. *The following statements are valid.*

1. *The class of quasi-topological vector spaces contains the class of super quasi-topological, strong quasi-topological, paratopological and topological vector spaces.*
2. *The class of super quasi-topological vector spaces contains the class of topological vector spaces.*
3. *The class of super quasi-topological vector spaces is independent of the class of paratopological vector spaces.*

3 Basic properties of super topological vector spaces

In this section, we investigate some basic properties of super quasi-topological vector spaces. By definition, every topological vector space is a super quasi-topological vector space, so our results on a super quasi-topological vector space can be viewed as either improvements or extensions of results in topological vector spaces. When we say that a topology τ is a super quasi-topology on a vector space L , we mean that (L, τ) is a super quasi-topological vector space.

Theorem 3.1. *For a super quasi-topology τ on a vector space L , $x \in L$ and a non-zero real r , the following hold:*

1. *the function $T_x: L \rightarrow L$ defined by $T_x(y) = x + y$ is a homeomorphism;*
2. *the function $H_r: L \rightarrow L$ defined by $H_r(x) = rx$ is a homeomorphism.*

Consequently for any subset P of L , we have $Cl(x + P) = x + Cl(P)$; $Int(x + P) = x + Int(P)$; $Cl(rP) = rCl(P)$; $Int(rP) = rInt(P)$ and for any open (closed) subset Q of L , $x + Q$ and rQ are open (closed).

Corollary 3.1. *Every super quasi-topological vector space is a homogeneous space.*

A subset A of a super quasi-topological vector space L is called semi-balanced if for each $x \in A$, $\lambda x \in A$ whenever $-1 \leq \lambda \leq 1$. It is semi-absorbent if for each $x \in L$, there is a real $r > 0$ such that $\lambda x \in A$ for each real λ satisfying $-r < \lambda < r$. Moreover, A is called bounded if for every neighborhood U of 0, there is a real $t > 0$ such that $A \subseteq sU$ for all reals s satisfying $|s| \geq t$.

As a consequence of Theorem 3.1, it can be shown in a similar way to that of topological vector spaces, the following result:

Theorem 3.2. *Suppose that (L, τ) is a super quasi-topological vector space, $x \in L$, $0 \neq r \in \mathbb{R}$ and A, B are subsets of L . The following assertions are valid:*

1. *A is open if and only if $x + A$ and rA are open;*
2. *A is closed if and only if $x + A$ and rA are closed;*

3. A is compact if and only if $x + A$ and rA are compact;
4. if A is convex, then so are $Cl(A)$ and $Int(A)$;
5. if A is semi-balanced, then so is $Cl(A)$;
6. if A and B are compact, then $A + B$ is compact;
7. if A and B are connected, then $A + B$ is connected;
8. if A and B are bounded, then so are $Cl(A)$ and $A \cup B$;
9. any finite subset of L is bounded.

Theorem 3.3. Let τ be a super quasi-topology on a vector space L . There exists a local base \mathcal{B} at the origin satisfying the following conditions:

1. for every $U, V \in \mathcal{B}$, there is $W \in \mathcal{B}$ such that $W \subseteq U \cap V$;
2. for each $U \in \mathcal{B}$, there is $V \in \mathcal{B}$ such that $V + V \subseteq U$;
3. for each $U \in \mathcal{B}$, there is a symmetric $V \in \mathcal{B}$ such that $V + V \subseteq U$;
4. for each $U \in \mathcal{B}$ and for each $x \in U$, there is $V \in \mathcal{B}$ such that $x + V \subseteq U$;
5. for each $U \in \mathcal{B}$ and $r \in \mathbb{R}$, there is $V \in \mathcal{B}$ such that $rV \subseteq U$ and $Vr \subseteq U$.

Conversely, let L be a vector space and let \mathcal{B} be a family of subsets of L satisfying (1)-(5) and that each member of \mathcal{B} contains the origin. Then there is a super quasi-topology on L with \mathcal{B} as a base of neighborhoods of the origin.

Proof. From Definition 2.1, and Theorem 3.1, it is easy to check that conditions (1)-(5) hold.

To prove the converse part, let \mathcal{B} be a family of subsets of L satisfying the conditions (1)-(5) and that each member of \mathcal{B} contains 0. Let $\mathfrak{S} = \{W \subseteq L: \text{for every } x \in W, \text{ there exists } U \in \mathcal{B} \text{ such that } x + U \subseteq W\}$.

Claim 1. \mathfrak{S} is a topology on L .

Clearly, $L \in \mathfrak{S}$ and $\emptyset \in \mathfrak{S}$. It is also easy to see that \mathfrak{S} is closed under unions. To show that \mathfrak{S} is closed under finite intersections, let $P, Q \in \mathfrak{S}$ and let $x \in P \cap Q$. Then there exist $U, V \in \mathcal{B}$ such that $x + U \subseteq P$ and $x + V \subseteq Q$. From condition (1), it follows that there exists $O \in \mathcal{B}$ such that $O \subseteq U \cap V$. Then $x + O \subseteq P \cap Q$. Hence $P \cap Q \in \mathfrak{S}$, and \mathfrak{S} is a topology on L .

Claim 2. If $W \in \mathcal{B}$ and $x \in L$, then $x + W \in \mathfrak{S}$.

Let $y \in x + W$ be an arbitrary element. Then $-x + y \in W$. From condition (4), it follows that there exists $U \in \mathcal{B}$ such that $-x + y + U \subseteq W$. This means that $y + U \subseteq x + W$. Hence $x + W \in \mathfrak{S}$.

Claim 3. The family $\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \{x + U: x \in L, U \in \mathcal{B}\}$ is a base for the topology \mathfrak{S} on L .

Obviously, it follows from Claim 2.

Claim 4. The vector addition mapping in L is continuous with respect to the topology \mathfrak{S} .

Let x, y be arbitrary elements of L and let W be an element of \mathfrak{S} such that $x + y \in W$. Then there exists $U \in \mathcal{B}$ such that $x + y + U \subseteq W$. For U , there is $V \in \mathcal{B}$ such that $V + V \subseteq U$ by condition (2). Then $x + V$ and $y + B$ be two elements of $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ containing x and y , respectively such that

$$(x + V) + (y + V) \subseteq x + y + V + V \subseteq x + y + U \subseteq W.$$

This ends claim 4.

Claim 5. The function $H_r: L \rightarrow L$ defined by $H_r(x) = rx$ is continuous with $r \in \mathbb{R}$.

Let W be an element of \mathfrak{S} containing rx with $x \in L$. Then there exists $U \in \mathcal{B}$ such that $rx + U \subseteq W$. By condition (5), there is $V \in \mathcal{B}$ such that $rV \subseteq U$. Then $r(x + V) = rx + rV \subseteq rx + U \subseteq W$. This shows that H_r is continuous. \square

Theorem 3.4. Let (L, τ) be a super quasi-topological vector space. If \mathcal{V} is the neighborhood filter of the origin, then for each $x \in L$, $\mathcal{F}(x) = \{x + V : V \in \mathcal{V}\}$ is the neighborhood filter of the point x . Consequently, a topology of a super quasi-topological vector space is completely determined by the neighborhood filter of the origin.

Theorem 3.5. Let (L, τ) be a super quasi-topological vector space. If \mathcal{N} is the neighborhood filter of the origin, then for every $A \subseteq L$, $Cl(A) = \bigcap \{A + U : U \in \mathcal{N}\}$.

Proof. Suppose that $x \in U + A$ for each $U \in \mathcal{N}$, and let W be a neighborhood of x . By Theorem 3.4, there is a symmetric $V \in \mathcal{N}$ such that $x + V \subseteq W$. By assumption, there is some $a \in A$ such that $x \in a + V$. Since V is symmetric, $a \in A \cap (x + V)$. Thus, $x \in Cl(A)$.

Conversely, if $x \in Cl(A)$, then every neighborhood $U + x$, $U \in \mathcal{N}$, contains a point of A , so for some $u \in U$, $x + u \in A$. Without loss of generality, we assume that U is symmetric. Then $x \in A + U$. It ends the proof. \square

Theorem 3.6. Let (L, τ) be a super quasi-topological vector space and \mathcal{N} the neighborhood filter of zero in L .

1. The open symmetric neighborhoods of the origin form a fundamental system of neighborhoods of the origin.
2. The closed symmetric neighborhoods of the origin form a fundamental system of neighborhoods of the origin.

Proof. (1) Simple.

(2) If V is a neighborhood of zero, then there is $U \in \mathcal{N}$ such that $U + U \subseteq V$. By Theorem 3.6, $Cl(U) \subseteq U + U$. Thus, V contains a closed neighborhood of zero. If P is a closed neighborhood of zero, $P \cap (-P)$ is a closed symmetric neighborhood of zero contained in V by Theorem 3.1. \square

Example 3.1. Consider the real vector space $\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ where the addition and multiplication operation of \mathbb{C} are the usual addition and multiplication of complex numbers. Endow \mathbb{C} with the topology which has a base of the sets of the form $D_r = \{r + ix : y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$, with $r \in \mathbb{R}$ (the set of real numbers). Then \mathbb{C} with this topology is a super quasi-topological vector space which is neither a paratopological vector space nor a topological vector space.

Theorem 3.7. Let (L, τ) be a super quasi-topological vector space. Then the following conditions are equivalent:

1. $\{0\}$ is closed;
2. $\{0\}$ is the intersection of neighborhoods of the origin;
3. L is Hausdorff.

Proof. By Theorem 3.6, (1) and (2) are equivalent. (3) \Rightarrow (2) is obvious. Let x, y be two elements of L such that $x \neq y$. Then $x - y \neq 0$. By part (2), there is a neighborhood V of 0 such that $x - y \notin U$. By Theorem 3.4, there is a symmetric neighborhood V of 0 such that $V + V \subseteq U$. Then it is easy to check that $x + V$ and $y + V$ are disjoint neighborhoods of x and y , respectively. It ends the proof. \square

Example 3.2. Consider the vector space \mathbb{C} as in Example 3.8. For each $z_0 \in \mathbb{C}$, with $y_0 = \text{Im}(z_0)$, denote by $L_{y_0} = \{x + iy_0 : x \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$, the horizontal line passing through y_0 , and $B_\epsilon(z_0)$, the open ball with center z_0 and radius ϵ . Let

$$U_{y_0, z_0, \epsilon} = L_{y_0} \cap B_\epsilon(z_0) \quad (3.1)$$

Obtain the topology on \mathbb{C} generated by the family of sets of the form (3.1). Then \mathbb{C} is a Hausdorff super quasi-topological vector space which is not a paratopological vector space.

Example 3.3. Let L be the vector space of all continuous functions on $(0, 1)$. For $\varphi \in L$ and $\epsilon > 0$, let $U(\varphi, \epsilon) = \{h \in L : |h(x) - \varphi(x)| < \epsilon, \text{ for all } x \in (0, 1)\}$. Obtain the topology on L that these sets $U(\varphi, \epsilon)$ generate. Then L with this topology is a super quasi-topological vector space, but not a topological vector space.

Theorem 3.8. If M is a subspace of a super quasi-topological vector space L , then $Cl(M)$ is a vector subspace of L over the field of reals. Furthermore, if L is a dense vector subspace of a super quasi-topological vector space E and if M is a vector subspace of L , then the closure of M in E is a vector subspace of E over the field of reals.

Proof. Follows from Theorem 3.1. \square

Theorem 3.9. Let (L, τ) be a super quasi-topological vector space. If C is the connected component of the origin and r a non-zero real, then

1. $x + C$ and rC are connected for each $x \in L$;
2. C is a vector subspace of L over the field of reals.

Proof. Straightforward. \square

A topological space X is totally disconnected if for each $x \in X$, the singleton $\{x\}$ is connected component of X . By Theorem 3.6, a super quasi-topological vector space is totally disconnected if and only if $\{0\}$ is the connected component of 0.

Theorem 3.10. Let φ be a linear map from a super quasi-topological vector space L to a super quasi-topological vector space E , and let \mathcal{V} be the neighborhood filter of the origin in L .

1. φ is continuous if and only if it is continuous at 0.
2. φ is open if and only if for every $V \in \mathcal{V}$, $\varphi(V)$ is a neighborhood of 0 in E .

Proof. Follows from Theorem 3.1. \square

Theorem 3.11. If a vector subspace M of a super quasi-topological vector space L has an interior point, then M is open.

Proof. Let x be an element of M and V a neighborhood of 0 in L such that $x + V \subseteq M$. Then for any $s \in M$, we have

$$s + V = (s - x) + (x + V) \subseteq M.$$

\square

4 Quotients of super quasi-topological vector spaces

A super quasi-topology on vector space L clearly induces a topology on any vector subspace of L making it a super quasi-topological vector space, and unless the contrary is mentioned, we shall assume that a vector subspace of a super quasi-topological vector space is furnished with its induced topology.

Let M be a vector subspace of a super quasi-topological vector space L . Then there is the canonical map π of L onto L/M , which induces a topology on L/M , called the quotient topology. Given a vector subspace M of a super quasi-topological vector space L and $x \in L$, denote by $\pi(x)$ or \tilde{x} , the coset of M that contains x .

Theorem 4.1. *If M is a vector subspace of a super quasi-topological vector space L , then the quotient map π from L onto L/M is linear, continuous and open.*

Proof. The continuity and linearity of π are obvious. Let V be an open subset of L . Since the map $x \mapsto a + x$ from L to L , with $a \in L$ is a homeomorphism, $\pi^{-1}(\pi(V)) = V + M$, an open subset of L , so $\pi(V)$ is open in L/M . \square

Theorem 4.2. *If M is a vector subspace of a super quasi-topological vector space L , then L/M is a super quasi-topological vector space.*

Proof. Let $\pi(x)$ and $\pi(y)$ be two elements of L/M , and let U be an open neighborhood of $\pi(x+y)$. Then $\pi^{-1}(U)$ is an open neighborhood of $x+y$ in L , so there exist open neighborhoods V_1 and V_2 of x and y , respectively in L such that $V_1 + V_2 \subseteq \pi^{-1}(U)$. Then $\pi(V_1) + \pi(V_2) \subseteq U$. By Theorem 4.1, $\pi(V_1)$ and $\pi(V_2)$ are open sets in L/M and hence the addition map $(\pi(x), \pi(y)) \mapsto \pi(x+y)$ from $L/M \times L/M$ to L/M is continuous.

Let r be any real number. We have to show that the map $\pi(x) \mapsto \pi(rx)$ from L/M to L/M is continuous. As L is a super quasi-topological vector space, so for any neighborhood U of $\pi(rx)$, there exists an open neighborhood V of x in L such that $rV \subseteq \pi^{-1}(U)$. Then $r\pi(V) \subseteq U$. It ends the proof. \square

Theorem 4.3. *If \mathcal{V} is the neighborhood filter of 0 in a super quasi-topological vector space L , and if M is a vector subspace of L , then $\pi(\mathcal{V})$ is the neighborhood filter of $\tilde{0}$ for the quotient topology of L/M .*

Proof. By Theorem 4.1, $\pi(V)$ is a neighborhood of $\tilde{0}$ in L/M for each $V \in \mathcal{V}$. Conversely, if U is a neighborhood of $\tilde{0}$ in L/M , then $\pi^{-1}(U)$ is a neighborhood of 0 in L ; so there is $V \in \mathcal{V}$ such that $V \subseteq \pi^{-1}(U)$. Thus, $\pi(V) \subseteq U$. \square

Theorem 4.4. *Let M be a vector subspace of a super quasi-topological vector space L .*

1. L/M is Hausdorff if and only if M is closed.
2. L/M is discrete if and only if M is open.

Proof. Straightforward. \square

Theorem 4.5. *If M and N are vector subspaces of a super quasi-topological vector space L such that $N \subseteq M$, then the quotient topology of M/N is identical with the subspace topology of M/N .*

Proof. Since M is a vector subspace of L , it is a super quasi-topological vector space with the topology induced by the topology of L . Let φ and π be the canonical mappings from M to M/N and from L to L/N , respectively. Let U be open for the quotient topology of M/N . Then $\varphi^{-1}(U)$ is open in M , so $\varphi^{-1}(U) = M \cap V$ where V is an open subset of L .

Claim: $U = (M/N) \cap \pi(V)$.

Let $\eta \in (M/N) \cap \pi(V)$. Then $\eta = x + N$ for some $x \in M$ and $\eta = v + N$ for some $v \in V$. This implies that $v - x \in N$, so $v \in x + N \subseteq M + N = M$. Therefore, $v \in M \cap V = \varphi^{-1}(U)$, so $\eta = v + N \in U$. Clearly, $U \subseteq (M/N) \cap \pi(V)$ and the claim follows.

Now let A be open in M/N for the topology on M/N induced by the quotient topology of L/N . Then $A = (M/N) \cap B$ for some open subset B of L/N . Obviously, $\varphi^{-1}(A) = M \cap \pi^{-1}(B)$ is an open subset of M . This means that A is open for the quotient topology of M/N . \square

Corollary 4.1. *If M and N are vector subspaces of a super quasi-topological vector space L , then the quotient topology on $(M + N)/N$ is identical with the topology on it induced by the quotient topology of L/N .*

Theorem 4.6. *Let f be a linear map from a super quasi-topological vector space L to a super quasi-topological vector space E , and let M be a vector subspace of L that is contained in the kernel of f . The linear map g from L/M to E satisfying $g \circ \pi = f$ is continuous (open) if and only if f is continuous (open).*

Proof. The necessity part follows from Theorem 4.1. Conversely, assume f is continuous. Let U be a neighborhood of 0 in E . Then $g^{-1}(U) = \pi \circ f^{-1}(U)$, so g is continuous at 0. By Theorem 3.14, g is continuous. \square

Theorem 4.7. *If M is a vector subspace of a super quasi-topological vector space L , and if M and L/M are both Hausdorff, then L is Hausdorff.*

Proof. Let x be an element of L such that $x \neq 0$ and let $x \in U$ for each $U \in \mathcal{V}$, the neighborhood filter of 0 in L . Since M is Hausdorff, $x \notin M$. Then $x + M$ and M are two distinct elements of L/M . As L/M is Hausdorff, there are disjoint open sets A and B for the quotient topology of L/M containing $x + M$ and M , respectively. By Theorem 3.14, $\pi^{-1}(A)$ is a neighborhood of x and $\pi^{-1}(B)$ is a neighborhood of 0 in L . By assumption, $x \in \pi^{-1}(B)$, so $x \in \pi^{-1}(A) \cap \pi^{-1}(B)$, a contradiction. By Theorem 3.9, L is Hausdorff. \square

Theorem 4.8. *If M is the connected component of zero in a super quasi-topological vector space L , and M a vector subspace, then L/M is totally disconnected.*

Proof. Let K be a closed subset of L/M such that $\pi^{-1}(K)$ is disconnected. We will show that K is disconnected. Let A and B be non-empty subsets of $\pi^{-1}(K)$ such that $A \cup B = \pi^{-1}(K)$ and $A \cap B = \emptyset$. As for each $x \in A$, $x + M$ is connected subset of $\pi^{-1}(K)$ and hence $A = A + M = \pi^{-1}(\pi(A))$.

Similarly, $B = \pi^{-1}(\pi(B))$.

Since $\pi(A) \cap \pi(B) = \pi(A \cap B) = \emptyset$ and $(L/M) \setminus \pi(A) = \pi(L \setminus A)$ which is open, so $\pi(A)$ is closed subset of L/M . Similarly, $\pi(B)$ is closed in L/M . As

$$\pi(A) \cup \pi(B) = \pi(A \cup B) = \pi(\pi^{-1}(K)) = K,$$

so K is disconnected. Now,

if C is the connected component of zero in L/M , and if there is a point $\pi(x)$ of L/M such that $\pi(x) \in C$ and $x \notin M$, then $\pi^{-1}(C)$ would be disconnected, which is a contradiction. It ends the proof. \square

References

- [1] C. Alegre, *Projective limits of paratopological vector spaces*, Bull. Belg. Math. Soc., 12 (2005), 83-93.
- [2] C. Alegre, J. Ferrer and V. Gregori, *Quasi-uniformities on real vector spaces*, Indian J. pure appl. Math., 28 (7) (1997), 929-937.
- [3] C. Alegre and S. Romaguera, *On paratopological vector spaces*, Acta Math. Hung., 101 (2003), 237-261.
- [4] C. Alegre and S. Romaguera, *Characterization of metrizable topological vector spaces and their asymmetric generalization in terms of fuzzy (quasi-)norms*, Fuzzy Sets Syst., 161 (2010), 2181-2192.
- [5] H. Glockner, *Continuity of bilinear maps on direct sums of topological vector spaces*, J. Funct. Anal., 262 (2012), 2013-2030.
- [6] O. Ravsky, *Paratopological groups, II*, Matematychni Studii, 17 (2002), 93-101.
- [7] S. Romaguera, M. Sanchis and M. Tkachenko, *Free paratopological groups*, Topology Proc., 27 (2) (2003), 613-640.
- [8] H. H. Schaefer and M. P. Wolff, *Topological Vector Spaces*, 1999.

Los números Ramsey para tres grafos y tres colores

The Ramsey numbers for three graphs and three colors.

José Figueroa (jose3765@gmail.com)

Departamento de Química
Universidad Clodosbaldo Russián
Cumaná, Venezuela.

Tobías Rosas Soto (tjrosas@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8085-5011>
Departamento de Matemática
Universidad del Zulia, Facultad Experimental de Ciencias
Maracaibo, Venezuela.

Henry Ramírez (hramirez6@hotmail.com)

Departamento de Higiene y Seguridad Laboral
Universidad Clodosbaldo Russián
Cumaná, Venezuela.

Armando Anselmi (alanselm2010@gmail.com)

Departamento de Matemáticas
Universidad de Oriente
Cumaná, Venezuela.

Resumen

Dado un grafo Ψ de orden t , simple, finito, y no vacío. Se llamará sobreposición de Ψ al grafo completo K_t definido por $\Psi \cup \bar{\Psi}$, donde $\bar{\Psi}$ denota el complemento de Ψ . Así, dados dos grafos G y H , simples, conexos, finitos, no vacíos, y dos colores distintos. El número de Ramsey $R(G, H)$, se define como el menor entero positivo t , tal que existe algún grafo Ψ que contiene una copia monocromática G' de G , o $\bar{\Psi}$ contiene una copia monocromática H' de H , y K_t es una superposición de Ψ , es decir, Ψ es un subgrafo de K_t . De forma similar, dados tres grafos G , H_1 , y H_2 , simples, conexos, finitos, no vacíos, y tres colores distintos $\{0, 1, 2\}$, se define como el número Ramsey $R(G, H_1, H_2)$ al menor entero positivo t tal que existe una terna de grafos (Ψ, Ψ_1, Ψ_2) que satisfagan lo siguiente: (1) $\bar{\Psi} = \Psi_1 \cup \Psi_2$; (2) El grafo completo K_t es la superposición de Ψ ; (3) $|V(K_t)| = |V(\Psi)| = |V(\Psi_1)| = |V(\Psi_2)|$; (4) $E(\Psi_1) \cap E(\Psi_2) = \emptyset$; y (5) El grafo Ψ contiene una copia monocromática G' de G , o de Ψ_1 puede extraerse una copia monocromática H'_1 de H_1 , o de Ψ_2 puede extraerse una copia monocromática H'_2 de H_2 . En este trabajo se muestra que, para $n \geq 4$, dados los grafos K_n un grafo completo, W_n un grafo rueda, y D_4 un grafo diamante. Si $t = \max\{|K_n|, |W_n|, |D_4|\}$, entonces $R(K_n, W_n, D_4) = t + 2$, para $t \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1, 2, 3, 4\}$.

Palabras y frases clave: Números Ramsey, coloración de grafos, números combinatorios, unión de grafos, sobreposición de grafos.

Abstract

Given a graph Ψ of order t , simple, finite, and non-empty. An superposition of Ψ will be called the complete graph K_t defined by $\Psi \cup \bar{\Psi}$, where $\bar{\Psi}$ denotes the complement of Ψ . So, given two graphs G and H , simple, connected, finite, non-empty, and two different colors. The Ramsey number $R(G, H)$, is defined as the smallest positive integer t such that there exists some graph Ψ that contains a monochrome copy G' of G , or $\bar{\Psi}$ contains a monochrome copy H' of H , and K_t is a superposition of Ψ , that is, Ψ is a subgraph of K_t . Similarly, given three graphs G , H_1 , and H_2 , simple, connected, finite non-empty, and three distinct colors $\{0, 1, 2\}$, is defined as the Ramsey number $R(G, H_1, H_2)$ to the smallest positive integer t such that there exists a triplet of graphs (Ψ, Ψ_1, Ψ_2) that satisfy the following: (1) $\bar{\Psi} = \Psi_1 \cup \Psi_2$; (2) The complete graph K_t is the superposition of Ψ ; (3) $|V(K_t)| = |V(\Psi)| = |V(\Psi_1)| = |V(\Psi_2)|$; (4) $E(\Psi_1) \cap E(\Psi_2) = \emptyset$; and (5) The graph Ψ contains a monochrome copy G' of G , or from Ψ_1 can be made a monochrome copy H'_1 of H_1 , or from Ψ_2 a monochrome copy H'_2 of H_2 can be extracted. In this work it is shown that, for $n \geq 4$, given the graphs K_n a complete graph, W_n a roll graph, and D_4 a diamond graph. If $t = \max\{|K_n|, |W_n|, |D_4|\}$, then $R(K_n, W_n, D_4) = t + 2$, for $t \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1, 2, 3, 4\}$.

Key words and phrases: Ramsey numbers, graph coloring, combinatorial numbers, graph union, graph superposition.

1 Introducción

El origen de la teoría de grafos se remonta al siglo XVIII, en el año 1736, con el problema de los puentes de Königsberg, el cual consistía en encontrar un camino que recorriera los siete puentes del río Pregel. La solución a dicho planteamiento fue considerada como el primer resultado de la teoría de grafos y el primer resultado topológico en la geometría. Se define el grafo G como un par de conjuntos (V, E) , denotado por $G = (V, E)$, donde V es un conjunto no vacío de elementos llamados vértices o nodos y E es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V , llamados lados o aristas; si G no posee lazos ni lados múltiples es un grafo simple. El orden de G , denotado por $|V|$, es el número de vértices de G . En 1933, Erdős y Szekeres en [7], inician el estudio de la teoría Ramsey, llamada así en honor a Frank P. Ramsey. Tiempo después descubrieron la conexión con los trabajos que Ramsey consiguió en su corta vida. En 1947, P. Erdős en [6], afirma que el propio Ramsey había observado que

$$R(k, k) \leq 2^{\frac{k(k-1)}{2}}, \quad (1.1)$$

que luego mejoró obteniendo:

$$R(k, k) \leq k!, \quad (1.2)$$

aunque él mismo aventuraba que esta cota podría reducirse. En 1972, Chvátal y Harary en [5], dan en forma general una cota inferior para los números Ramsey:

$$R(G, H) \geq (c(G) - 1)(\chi(H) - 1) + 1, \quad (1.3)$$

donde $c(G)$ es el orden de la componente más larga de G , y $\chi(H)$ es el número cromático del grafo H . En 1984, Burr y P. Erdős en [2], dan una cota inferior más general que la de Chvátal y Harary:

$$R(G, H) \geq (n - 1)(\chi(H) - 1) + \sigma(H), \quad (1.4)$$

donde G es un grafo conexo de orden n y $\sigma(H)$ el excedente cromático del grafo H . El grafo G es bueno con respecto a H , denotado por H -bueno, si es válida la desigualdad (1.4) de lo contrario G no contendría componentes H -buena. En 1994, Radziszowski y Xia en [9], dieron un método sencillo y unificado para mostrar resultados del número de Ramsey $R(C_3, G)$, donde G es un camino, ciclo o una rueda. En 1995, Zhou en [12], prueba que $R(C_n, W_m) = 2m + 1$, para $n \geq 3$ impar y $m \geq 5n - 7$. En 2001, Surahmat y Baskoro demostraron en [10] que, para cada $n \geq 3$, se tiene que $R(P_n, W_4) = 2n - 1$ y $R(P_n, W_5) = 3n - 2$. En 2002, Baskoro et al [1], y en 2005, Chen et al en [4], probaron que $R(P_n, W_6) = 2n - 1$, para todo $n \geq 6$ y $R(P_n, W_7) = 3n - 2$, para todo $n \geq 7$, respectivamente. En 2018, Villaroel et al en [11], estudiaron un método algorítmico para el cálculo del número baricéntrico de Ramsey para el grafo estrella. En 2019, Figueroa et al [8], estudiaron los números de Ramsey con componente h -buena y secuencias simétricas.

Dado un grafo Ψ de orden t , simple, finito, y no vacío. Se llamará sobreposición de Ψ al grafo completo K_t definido por $\Psi \cup \bar{\Psi}$, donde $\bar{\Psi}$ denota el complemento de Ψ . El número de Ramsey $R(G, H)$, se define como el menor entero positivo t , tal que existe algún grafo Ψ de orden t , que contiene una copia monocromática G' de G , o $\bar{\Psi}$ contiene una copia monocromática H' de H y K_t es una superposición de Ψ . Nótese que en esta definición de número Ramsey se utilizan dos grafos y dos colores. El objetivo de este trabajo es determinar un método, que permita hallar el menor grafo completo $K_{R(K_n, W_n, D_4)} = \Psi \cup \Psi_1 \cup \Psi_2$, con $\bar{\Psi} = \Psi_1 \cup \Psi_2$, que coloreado con tres colores diferentes, cumpla una de las siguientes afirmaciones:

- Ψ contiene una copia monocromática G' de K_n .
- Ψ_1 contenga una copia monocromática H'_1 de W_n .
- Ψ_2 contenga una copia monocromática H'_2 de D_4 .

En el ejemplo que se presentará n es el orden inicial del grafo dado, y $t = \max\{|k_n|, |W_n|, |D_4|\}$. El procedimiento fundamental es: primero incrementar el número de vértices t en una unidad ($t \rightarrow t + 1$) formando el grafo completo K_{t+1} . Luego, si

$$|E(K_{t+1})| < |E(K_n)| + |E(W_n)| + |E(D_4)|,$$

en cuyo caso

$$|E(\Psi)| < |E(K_n)|, \quad |E(\Psi_1)| < |E(W_n)|, \quad \text{y} \quad |E(\Psi_2)| < |E(D_4)|.$$

Se incrementa nuevamente el número de vértices de $t + 1$ a $t + 2$, formando el grafo completo K_{t+2} y obteniendo que

$$|E(\Psi)| \geq |E(K_n)|, \quad \text{ó} \quad |E(\Psi_1)| \geq |E(W_n)| \quad \text{ó} \quad |E(\Psi_2)| \geq |E(D_4)|.$$

Para el cálculo del número de aristas del grafo K_{t+2} se utiliza el polinomio $P(t) = \frac{t^2 - t}{2}$ que proviene del número combinatorio $\binom{t}{2}$ que representa el número de aristas del grafo K_t . Con

dicho polinomio se definen $|E(K_{t+2})| = P(t+2)$. Para determinar el número de secuencias s_i con las que se colorea el grafo K_{t+2} se define el polinomio $Q(t) = \binom{P(t+2)}{2}$, todo esto para $t \geq 5$. Con esto se define una aplicación $\Upsilon : E(K_{t+2}) \rightarrow (s_i)_{i=1}^{Q(t)}$, que colorea los lados de $K_{t+2} = \Psi \cup \Psi_1 \cup \Psi_2$, con cada s_i , para cada $t \geq 5$, tal que satisfacen las definiciones 2.1 y 2.2 de la Sección 2 de este manuscrito, es decir, garantiza la existencia de una función biyectiva φ que preserva las adyacencias entre grafos. Dicho con otras palabras, Ψ contiene una copia monocromática G' de K_n , o Ψ_1 contiene una copia H'_1 de W_n , o Ψ_2 contiene una copia H'_2 de D_4 . En la Sección 2 se dan algunas definiciones y enunciados que sustentan este trabajo, en la Sección 3 se da un ejemplo y un cuadro de valores de donde se ilustra el resultado y finalmente en la Sección 4 se da el resultado y se demuestra.

2 Preliminares

Definición 2.1. Sean G y H dos grafos distintos del vacío y se consideran dos colores diferentes. Se dice que el par (G, H) es isomorfo al par (G', H') , si G es bueno con respecto a H , si existe un grafo Ψ tal que $G' \triangleleft \Psi$ o $H' \triangleleft \bar{\Psi}$. Además, satisfacen la existencia de una función biyectiva φ que preserva las adyacencias entre los vértices de los grafos, es decir,

- i) $\varphi : V(G') \rightarrow V(G); u_i v_j \in E(G') \Leftrightarrow \varphi(u_i) \varphi(v_j) \in E(G)$ o
- ii) $\varphi : V(H') \rightarrow V(H); u_k v_p \in E(H') \Leftrightarrow \varphi(u_k) \varphi(v_p) \in E(H)$

Definición 2.2. Sea Ψ un grafo de orden t , simple, finito, y no vacío. Se llamará sobreposición de Ψ al grafo completo K_t definido por $\Psi \cup \bar{\Psi}$, donde $\bar{\Psi}$ denota el complemento de Ψ .

Proposición 2.1. Dado el grafo completo K_t , con $t \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$|E(K_t)| = C_2^t = \binom{t}{2} = \frac{t(t-1)}{2}$$

Definición 2.3. Dado el grafo completo K_t , con $t \in \mathbb{N}$, se definirá

$$P(t) = |E(K_t)| = \frac{t(t-1)}{2}$$

al polinomio que determina el número de aristas del grafo completo K_t .

Corolario 2.1. Dados los grafos completos K_{t+1} y K_{t+2} , con $t \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$P(t+1) = \frac{(t+1)(t)}{2} = \frac{t^2+t}{2} \quad \text{y} \quad P(t+2) = \frac{(t+2)(t+1)}{2} = \frac{t^2+3t+2}{2}$$

Definición 2.4. Sean $\{0, 1, 2\}$ tres colores dados y $s = (x_1, \dots, x_r)$ la sucesión, con $x_i \in \{0, 1, 2\}$, construida de la siguiente forma:

1. La sucesión s es monocromática. Fijado x_1 , se tiene que $x_i = x_{i-1}$ para $i = 2, \dots, r$.
2. La sucesión s es bicromática. Hay un índice k , con $1 \leq k \leq r$, tal que $x_{k-1} < x_k$ y

$$x_1 = \dots = x_{k-1} \quad \text{y} \quad x_k = \dots = x_r$$

3. La sucesión s es tricromática. Hay dos índices k y q , con $k, q \leq r$ y $k < q$, tales que $x_k < x_q < x_r$ y

$$x_1 = \cdots = x_k \quad x_{k+1} = \cdots = x_q \quad x_{q+1} = \cdots = x_r$$

Proposición 2.2. Sean $\{0, 1, 2\}$ tres colores dados y r la longitud de la sucesión $s = (x_1, \dots, x_r)$ construida como en la Definición 2.4, entonces el número de sucesiones posibles formadas por los tres colores está dado por el número combinatorio

$$\binom{r+2}{2} = \frac{(r+2)(r+1)}{2}.$$

Demostración. Claramente se tiene una sola secuencia s tal que $x_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, r$. Ahora se procederá a fijar el mayor número de entradas de s con el color 0 y se determinará la cantidad de sucesiones que se puedan formar con los colores $\{0, 1, 2\}$. Si $x_i = 0$ para $i = 1, \dots, r-1$ se obtienen 2 sucesiones ya que $x_r = 1$ o $x_r = 2$. Si se hace $x_i = 0$ para $i = 1, \dots, r-2$ se obtienen 3 sucesiones ya que las últimas dos coordenadas podrían ser $(1, 1)$, o $(1, 2)$ o $(2, 2)$. Nótese que bastan tres cambios para llegar de $(1, 1)$ hasta $(2, 2)$, es decir, el número de coordenadas no fijadas más una unidad.

Razonando de forma similar se tendría que para $r - k$ coordenadas fijadas, y por tanto k no fijadas el número de sucesiones tricromáticas que se pueden obtener son $k + 1$. Teniendo así el siguiente cuadro

Coord. Fijas	r	$r - 1$	$r - 2$	\dots	$r - k$	\dots	3	2	1
Coord. No Fijas	0	1	2	\dots	k	\dots	$r - 3$	$r - 2$	$r - 1$
# Sucesiones	1	2	3	\dots	$k + 1$	\dots	$r - 2$	$r - 1$	r

De manera que se tiene, fijando el color 0, un total de

$$\sum_{i=0}^{r-1} (i+1) = \sum_{i=1}^r i = \frac{r(r+1)}{2}$$

Por último, nótese que faltan la sucesiones s tal que $x_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, r$ y la sucesiones bicromáticas con los colores 1 y 2, las cuales suman $r + 1$, pues es r el número de cambios que se deben realizar para llegar de

$$\underbrace{(1, \dots, 1)}_{r\text{-veces}} \text{ hasta } \underbrace{(2, \dots, 2)}_{r\text{-veces}}$$

Por tanto, se tiene un total de

$$\frac{r(r+1)}{2} + r + 1 = (r+1) \left(\frac{r}{2} + 1 \right) = \frac{(r+2)(r+1)}{2} = \frac{(r+2)(r+1)r!}{2!r!} = \binom{r+2}{2}$$

□

Corolario 2.2. Sean el grafo completo K_{t+2} , con $t \in \mathbb{N}$, y $\{0, 1, 2\}$ tres colores. Entonces el número de sucesiones s , definidas como en la Proposición 2.2, para colorear los lados de K_{t+2} está dada por el número

$$Q(t) = \binom{P(t+2)+2}{2}.$$

Demostración. Basta hacer $r = P(t + 2)$ y, aplicando el Corolario 2.1 y la Proposición 2.2, se obtiene el resultado deseado. \square

Definición 2.5. Sean G , H_1 y H_2 tres grafos, simples, conexos, finitos, no vacíos y $\{0, 1, 2\}$ tres colores diferentes. El número de Ramsey denotado por $R(G, H_1, H_2)$, es el menor entero positivo t , tal que existe una terna de grafos (Ψ, Ψ_1, Ψ_2) que satisface:

1. $\bar{\Psi} = \Psi_1 \cup \Psi_2$.
2. El grafo completo K_t es la superposición de Ψ .
3. $|V(K_t)| = |V(\Psi)| = |V(\Psi_1)| = |V(\Psi_2)|$.
4. $E(\Psi_1) \cap E(\Psi_2) = \emptyset$.
5. El grafo Ψ contiene una copia monocromática G' de G o de Ψ_1 puede extraerse una copia monocromática H'_1 de H_1 o de Ψ_2 puede extraerse una copia monocromática H'_2 de H_2 .

Definición 2.6. Sean G , H_1 y H_2 tres grafos distintos de vacíos. Se dice que la tríada (G, H_1, H_2) es isomorfa a la tríada (G', H'_1, H'_2) , si G es bueno con respecto a H_1 , o a H_2 , es decir, existe una tríada (Ψ, Ψ_1, Ψ_2) tal que

$$G' \triangleleft \Psi, \quad H'_1 \triangleleft \Psi_1, \quad \text{y} \quad H'_2 \triangleleft \Psi_2.$$

Además, existe una función biyectiva φ que preserva las adyacencias entre los vértices de los grafos, es decir,

- i) $\varphi : V(G') \rightarrow V(G); u_i v_j \in E(G') \Leftrightarrow \varphi(u_a)\varphi(v_b) = w_a x_b \in E(G)$ o
- ii) $\varphi : V(H'_1) \rightarrow V(H_1); u_c v_d \in E(H'_1) \Leftrightarrow \varphi(u_c)\varphi(v_d) = y_c z_d \in E(H_1)$ o
- iii) $\varphi : V(H'_2) \rightarrow V(H_2); u_e v_f \in E(H'_2) \Leftrightarrow \varphi(u_e)\varphi(v_f) = y_e z_f \in E(H_2)$.

Definición 2.7. Sean G , H_1 y H_2 tres grafos simples, conexos, finitos y no vacíos. Sean

$$P(t+2) = \binom{t+2}{2} \quad \text{y} \quad Q(t) = \binom{P(t+2)}{2}.$$

Se dice que $K_{R(G, H_1, H_2)}$, contiene componentes h -buena, si al colorear los lados de

$$K_{R(G, H_1, H_2)} = \Psi \cup \Psi_1 \cup \Psi_2$$

con cada secuencia s_i , definidas como en la Definición 2.4 para todo $i = 1, \dots, Q(t)$, donde $|E(K_{R(G, H_1, H_2)})| = P(t + 2)$ es el tamaño de cada secuencia para $t \geq 5$, existe una coloración con s_i donde Ψ contiene una copia monocromática G' de G con el primer color, o de Ψ_1 puede extraerse una copia monocromática H'_1 de H_1 con el segundo color, o de Ψ_2 puede extraerse una copia monocromática H'_2 de H_2 con el tercer color.

3 Ejemplo ilustrativo

Ejemplo 3.1. Sea $n = 4$ y tómense los grafos $G = K_4$ el completo, $H_1 = W_4$ la rueda, y $H_2 = K_4 - l$ el diamante. Considérese $t = \text{máx}\{|G|, |H_1|, |H_2|\} = \text{máx}\{4, 5, 4\} = 5$. Luego, se aumenta el valor de t en una unidad ($t \rightarrow t + 1$), para formar el grafo completo K_6 . Usando el Corolario 2.1 se tiene que el número de lados

$$|E(K_6)| = P(5 + 1) = \frac{5^2 + 5}{2} = 15.$$

Pero es imposible extraer de K_6 una copia monocromática de G con el primer color, o una copia monocromática de H_1 con el segundo color, o una copia monocromática de H_2 con el tercer color.

Nótese que la secuencia de coloración más crítica en el presente ejemplo es

$$(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2)$$

pues distribuye de forma uniforme y simétrica el número de veces que aparece cada color en la secuencia. Ahora, al disminuir en una unidad el número de veces que aparece el tercer color en la secuencia se elimina la posibilidad de extraer de K_6 una copia monocromática de H_2 con el tercer color, o al aumentar en una unidad el número de veces que aparece el primer color permite extraer de K_6 una copia monocromática de G con el primer color. Sin embargo, al disminuir en una unidad el tercer color y aumentar en una unidad el segundo color se obtiene una secuencia con cuya coloración no es posible extraer de K_6 una copia monocromática de G con el primer color, o una copia monocromática de H_1 con el segundo color, o una copia monocromática de H_2 con el tercer color. Por tanto, al tomar la secuencia

$$(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2)$$

se tiene que no se pueden extraer las copias antes mencionadas.

Dada la observación anterior se puede inferir que una condición suficiente para que se pueda extraer de K_6 una copia monocromática G con el primer color, o una copia monocromática de H_1 con el segundo color, o copia monocromática de H_2 con el tercer color, es que el número de aristas del grafo completo que se estudie sea mayor o igual que $|E(G)| + |E(H_1)| + |E(H_2)|$. Por tal razón, se vuelve a incrementar el número de vértices en uno, es decir, $t + 1 \rightarrow t + 2$, obteniendo así un número de 7 vértices para formar el grafo completo K_7 . Luego, usando el Corolario 2.1 con $t = 5$, se tiene que el número de lados de K_7 es

$$P(5 + 2) = |E(K_7)| = \frac{5^2 + 3 \times 5 + 2}{2} = 21 > 19 = |E(G)| + |E(H_1)| + |E(H_2)|.$$

Ahora, aplicando el Corolario 2.2 se tiene que

$$Q(5) = \binom{P(5 + 2) + 2}{2} = \binom{P(7) + 2}{2} = \binom{23}{2} = \frac{23 \times 22}{2} = 253.$$

Entonces existe una aplicación

$$\Upsilon : E(K_{R(G,H)}) \rightarrow (s_i)_{i=1}^{253},$$

$$\begin{aligned}
s_{47} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2) \\
s_{48} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2) \\
s_{49} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2) \\
s_{50} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2) \\
s_{51} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{52} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{53} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{54} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{55} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{56} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \\
s_{57} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2) \\
s_{58} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2) \\
s_{59} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2) \\
s_{60} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2) \\
s_{61} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{62} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{63} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{64} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{65} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{66} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{67} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \\
s_{68} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2) \\
s_{69} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2) \\
s_{70} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2) \\
s_{71} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2) \\
s_{72} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{73} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{74} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{75} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{76} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{77} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{78} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{79} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \\
s_{80} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2) \\
s_{81} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2) \\
s_{82} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2) \\
s_{83} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2) \\
s_{84} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{85} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{86} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{87} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{88} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{89} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{90} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{91} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{92} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \\
s_{93} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)
\end{aligned}$$

- $s_{94} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$
- $s_{95} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$
- $s_{96} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2)$
- $s_{97} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{98} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{99} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{100} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{101} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{102} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{103} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{104} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{105} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{106} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$
- $s_{107} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)$
- $s_{108} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$
- $s_{109} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$
- $s_{110} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2)$
- $s_{111} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{112} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{113} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{114} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{115} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{116} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{117} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{118} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{119} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{120} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{121} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$
- $s_{122} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)$
- $s_{123} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$
- $s_{124} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2)$
- $s_{125} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{126} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{127} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{128} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{129} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{130} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{131} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{132} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{133} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{134} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{135} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{136} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{137} = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$
- $s_{138} = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)$
- $s_{139} = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$
- $s_{140} = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$

$$\begin{aligned}
s_{235} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2) \\
s_{236} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2) \\
s_{237} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{238} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{239} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{240} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{241} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{242} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{243} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{244} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{245} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{246} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{247} &= (1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{248} &= (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{249} &= (1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{250} &= (1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{251} &= (1, 2) \\
s_{252} &= (1, 2) \\
s_{253} &= (2, 2)
\end{aligned}$$

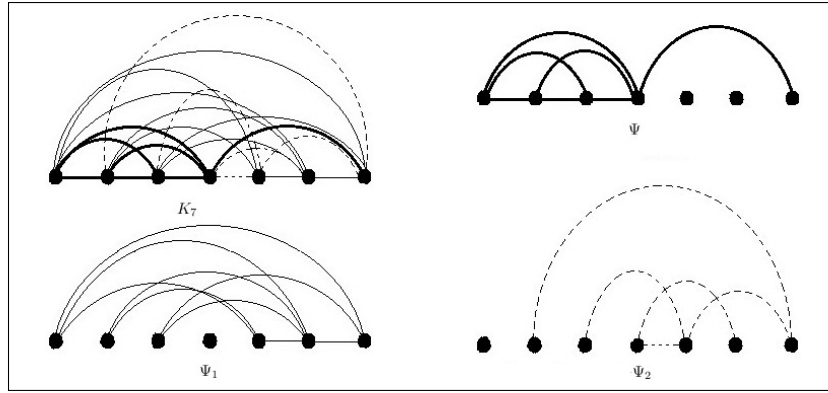


Figura 1: K_7 coloreado con la secuencia s_{111} y los subgrafos Ψ , Ψ_1 y Ψ_2 .

Por ejemplo, considérese la secuencia S_{111} para colorear arbitrariamente los lados del grafo completo K_7 , entonces hay una coloración tal que existe una terna de grafos (Ψ, Ψ_1, Ψ_2) donde se cumple que $K_7 = \Psi \cup \Psi_1 \cup \Psi_2$ y se puede extraer de Ψ una copia monocromática G' isomorfa a G con el primer color, o extraer de Ψ_1 una copia monocromática H'_1 de H_1 con el segundo color, o extraer de Ψ_2 una copia monocromática H'_2 de H_2 con el tercer color. Nótese, que de Ψ se puede extraer una copia monocromática G' isomorfa a G , como se observa en la Figura 1.

Finalmente, al colorear los lados del menor grafo completo $K_{R(G, H_1, H_2)}$ con cada secuencia s_i , para todo $i = 1, \dots, 253$, siempre existe una coloración en la cual es posible extraer de Ψ una copia monocromática G' de G , o de Ψ_1 una copia monocromática H'_1 de H_1 , o de Ψ_2 una copia monocromática H'_2 de H_2 . Por lo tanto, $R(G, H_1, H_2) = 7$, con $t = 5$, $n = 4$, para 3 grafos y 3 colores.

El conjunto de valores obtenidos en el Cuadro 1, provienen de haber resuelto una variada cantidad de ejemplos que dieron como resultado un conjunto de patrones de los números de Ramsey para tres grafos y tres colores. Este conjunto de patrones obtenidos en el Cuadro 1, satisfacen para tres grafos cualesquiera, simple, finitos, no vacíos, que solo van a depender del número de vértices y de tres colores diferentes.

$n \geq 4$	$t \geq 5$	$G = K_n$	$H_1 = W_n$	$R(G, H_1, K_4 - l)$	$ E(K_{t+2}) $	$\{s_i\}_{i=1}^{Q(t)}$
$n = 4$	$t = 5$	K_4	W_4	7	21	253
$n = 5$	$t = 6$	K_5	W_5	8	28	435
$n = 6$	$t = 7$	K_6	W_6	9	36	703
$n = 7$	$t = 8$	K_7	W_7	10	45	1081
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	t	K_n	W_n	$t + 2$	$\frac{t^2+3t+2}{2}$	$\frac{(t^2+3t+6)(t^2+3t+4)}{8}$

Cuadro 1: Patrón obtenido de los números Ramsey para los grafos K_n , W_n , y D_4 .

4 Resultado principal

El siguiente resultado es un caso general, para tres grafos cualesquiera, simples, finitos, no vacíos y tres colores diferentes.

Teorema 4.1. Sean $n \geq 4$, K_n un grafo completo, W_n un garfo rueda, y D_4 grafos diamante. Sean $\{0, 1, 2\}$ tres colores diferentes; $t = \max\{|K_n|, |W_n|, |D_4|\}$; $P(t) = \frac{t^2 - t}{2}$; $Q(t) = \binom{P(t) + 2}{2}$; y $\{s_i\}_{i=1}^{Q(t)}$ el conjunto de las secuencias formadas con los tres colores como en la Definición 2.4, entonces $R(K_n, W_n, D_4) = t + 2$, para $t \geq 5$.

Demostración. Sean K_n , W_n , y D_4 los grafos dados. Tómesese $t = \max\{|K_n|, |W_n|, |D_4|\}$, así $t = n + 1$ y defínanse los polinomios

$$P(t) = \binom{t}{2} = \frac{t^2 - t}{2} \quad \text{y} \quad Q(t) = \binom{P(t) + 2}{2} = \frac{t^4 + 6t^3 + 19t^2 + 30t + 24}{2^3}.$$

Por otro lado, sean $\{0, 1, 2\}$ tres colores diferentes y $W = \{s_i\}_{i=1}^{Q(t)}$ el conjunto de secuencias construidas como en la Definición 2.4 con las cuales se realizarán las coloraciones de los grafos que se estudiarán.

Supóngase ahora que $R(K_n, W_n, D_4) = t + 1$, entonces por la Definición 2.5 existe una terna (Ψ, Ψ_1, Ψ_2) tal que

- (i) $\bar{\Psi} = \Psi_1 \cup \Psi_2$.
- (ii) El grafo completo K_{t+1} es la superposición de Ψ .
- (iii) $|V(K_{t+1})| = |V(\Psi)| = |V(\Psi_1)| = |V(\Psi_2)|$.
- (iv) $E(\Psi_1) \cap E(\Psi_2) = \emptyset$.

- (v) El grafo Ψ contiene una copia monocromática G' de K_n o de Ψ_1 puede extraerse una copia monocromática H'_1 de W_n o de Ψ_2 puede extraerse una copia monocromática H'_2 de D_4 .

Nótese que si $|E(K_{t+1})| < |E(K_n)| + |E(W_n)| + |E(D_4)|$, por los ítem (i), (ii), y (iv), se tiene que

$$|E(\Psi)| + |E(\Psi_1)| + |E(\Psi_2)| < |E(K_n)| + |E(W_n)| + |E(D_4)| \quad (4.1)$$

pues $|E(K_{t+1})| = |E(\Psi)| + |E(\Psi_1)| + |E(\Psi_2)|$. Luego, por el ítem (v) se tendría que $|E(\Psi)| < |E(K_n)|$ o $|E(\Psi_1)| < |E(W_n)|$ o $|E(\Psi_2)| < |E(D_4)|$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $|E(\Psi)| < |E(K_n)|$. De donde, usando la ecuación (4.1), se obtiene que

$$|E(\Psi_1)| + |E(\Psi_2)| < |E(W_n)| + |E(D_4)| \quad (4.2)$$

En este punto, por el mismo ítem (v), se tendría que $|E(\Psi_1)| < |E(W_n)|$ o $|E(\Psi_2)| < |E(D_4)|$. De forma similar, y sin pérdida de generalidad, se puede suponer que

$$|E(\Psi_1)| < |E(W_n)| \quad (4.3)$$

Así, de las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3), se tiene que

$$|E(\Psi)| < |E(K_n)| \quad |E(\Psi_1)| < |E(W_n)| \quad |E(\Psi_2)| < |E(D_4)| \quad (4.4)$$

Esto último permite inferir claramente que no es posible extraer de Ψ una copia monocromática G' de K_n , o de Ψ_1 una copia monocromática H'_1 de W_n , o de Ψ_2 una copia monocromática H'_2 de D_4 , lo cual es una contradicción a lo supuesto de inicio.

Ahora, como $t = n + 1$ entonces $n = t - 1$

$$|E(K_n)| = |E(K_{t-1})| = \frac{(t-1)(t-2)}{2} \quad |E(W_{t-1})| = 2(t-2) \quad |E(D_4)| = 4 \quad (4.5)$$

y por tanto

$$\frac{(t-1)(t-2)}{2} + 2(t-2) + 4 = \frac{(t^2 - 3t + 2) + 4(t-2) + 8}{2} = \frac{t^2 + t + 2}{2} = \frac{t(t+1)}{2} + 1 > |E(K_{t+1})|$$

ya que $t \geq 5$. Luego, por lo demostrado anteriormente se tendría que $R(K_n, W_n, D_4) > t + 1$. Procédase a aumentar el valor de $t + 1$ en una unidad ($t + 1 \rightarrow t + 2$), para formar el grafo completo K_{t+2} cuyos lados serán coloreados con las secuencias $s_i \in W$. Luego, por hipótesis se tiene que $|E(D_4)| = 4 < t$ de donde:

$$\frac{(t-1)(t-2)}{2} + 2(t-2) + |E(D_4)| < \frac{t^2 + 3t - 6}{2}$$

Usando las ecuaciones (4.5) se obtiene que

$$|E(K_n)| + |E(W_n)| + |E(D_4)| < \frac{t^2 + 3t - 6}{2} < \frac{t^2 + 3t + 2}{2} = |E(K_{t+2})| \quad (4.6)$$

Ahora, si se representan por $C_i(K_{t+2})$ al conjunto de lados coloreados con el color i , para $i = 0, 1, 2$. Se obtiene, usando la ecuación (4.6), que las coloraciones del grafo completo K_{t+2} se pueden dividir en varios grupos:

- $|C_i(K_{t+2})| \geq |E(K_n)|$.
- $|C_i(K_{t+2})| < |E(K_n)|$ y $|C_i(K_{t+2})| \geq |E(W_n)|$.
- $|C_i(K_{t+2})| < |E(K_n)|$ y $|C_i(K_{t+2})| < |E(W_n)|$ y $|C_i(K_{t+2})| \geq |E(D_4)|$.

para $i = 0, 1, 2$.

Supóngase ahora que se colorea el grafo K_{t+2} con una secuencia $s_j \in W$ tal que

$$|C_i(K_{t+2})| \geq |E(K_n)|$$

Aquí, se hace Ψ al subgrafo monocromático de K_{t+2} coloreado con el color i tal que $|V(\Psi)| = |V(K_{t+2})|$. Como $|E(\Psi)| \geq |E(K_n)|$, y dado que K_{t+2} es conexo, entonces se puede extraer de Ψ un subgrafo G' conexo monocromático isomorfo a K_n , para $i = 0, 1, 2$. Luego, al colorear los lados de K_{t+2} , con las secuencias s_j dadas, existe por las definiciones 2.7 y 2.6, una función biyectiva φ que cumple que

$$\varphi : V(G') \rightarrow V(K_n); \quad u_a v_b \in E(G') \Leftrightarrow \varphi(u_a)\varphi(v_b) = w_a w_b \in E(K_n).$$

Si se colorea el grafo K_{t+2} con una secuencia $s_j \in W$ tal que $|C_i(K_{t+2})| < |E(K_n)|$ y $|C_i(K_{t+2})| \geq |E(W_n)|$, para $i = 0, 1, 2$, entonces se hace Ψ_1 al subgrafo monocromático de K_{t+2} coloreado con el color i tal que $|V(\Psi_1)| = |V(K_{t+2})|$. Como $|E(\Psi_1)| \geq |E(W_n)|$, y dado que K_{t+2} es conexo, entonces se puede extraer de Ψ_1 un subgrafo H'_1 conexo monocromático isomorfo a W_n . Luego, al colorear los lados de K_{t+2} con las secuencias s_j dadas, existe por las definiciones 2.7 y 2.6, una función biyectiva φ que cumple que

$$\varphi : V(H'_1) \rightarrow V(W_n); \quad u_c v_d \in E(H'_1) \Leftrightarrow \varphi(v_c)\varphi(v_d) = y_c y_d \in E(W_n).$$

Por último, si se colorea el grafo K_{t+2} con una secuencia $s_j \in W$ tal que

$$|C_i(K_{t+2})| < |E(G)| \quad y \quad |C_i(K_{t+2})| < |E(H_1)| \quad y \quad |C_i(K_{t+2})| \geq |E(H_2)|$$

para $i = 0, 1, 2$, entonces se hace Ψ_2 al subgrafo monocromático de K_{t+2} coloreado con el color i . Como $|E(\Psi_2)| \geq |E(D_4)|$, y dado que K_{t+2} es conexo, entonces se puede extraer de Ψ_2 un subgrafo H'_2 conexo monocromático isomorfo a W_n . Luego, al colorear los lados de K_{t+2} con las secuencias s_j dadas, existe por las definiciones 2.7 y 2.6, una función biyectiva φ que cumple que

$$\varphi : V(H'_2) \rightarrow V(D_4); u_e v_f \in E(H'_2) \Leftrightarrow \varphi(u_e)\varphi(v_f) = z_e z_f \in E(D_4).$$

Cumplíendose que G es bueno con respecto a H , es decir, existe el grafo completo

$$K_{t+2} = \Psi \cup \Psi_1 \cup \Psi_2$$


tal que de Ψ se pueda extraer una copia monocromática G' de K_n , o de Ψ_1 pueda extraer una copia monocromática H'_1 de W_n o Ψ_2 pueda extraer una copia monocromática H'_2 de D_4 , tendiendo entonces que $R(K_n, W_n, D_4) = t + 2$, para $t \geq 5$. \square

5 Dedicatoria

Esta publicación está dedicada al profesor José Rafael Figueroa quien no pudo ver concretada la publicación de este artículo, estudio que realizáramos conjuntamente durante el año 2022, del cual existe una continuación inconclusa. Gracias José por ser un gran colega y amigo, prometemos terminar y publicar en tu memoria (incluyéndote como autor) los trabajos que habíamos iniciado en conjunto durante los años 2022 y 2023. Ilumina nuestro entendimiento desde donde estés.

Referencias

- [1] Baskoro E.T. (2002) “The Ramsey number of paths and small wheels”, *J. Indones. Math. Soc. (MIHMI)* (1), 13-16.
- [2] Burr S.A. and Erdős P. (1984) “Generalizations of a Ramsey theoretic result of Chvatal”, *Journal of Graph Theory* **7**: 39–51.
- [3] Camacho D.J.A. *Teorema del Índice de Poincaré*, Universidad de Murcia 2012 – 2013.
- [4] Chen Y.; Zhang Y.; and Zhang K. (2005) “The Ramsey number paths, versus wheels”, *Discret Mathematics*, **290**, 85 – 87.
- [5] V. Chvátal and F. Harary, *Generalized Ramsey theory for graphs, III: small off- diagonal numbers*, *Pacific Journal of Mathematics*, **41** (1972), 335-345.
- [6] P. Erdős, *Some remarks on the theory of graphs* *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947), 292-294.
- [7] P. Erdős and G. Szekeres, *On a combinatorial problem in geometry*, *Composition Mathematica* **2** (1935), 463-470.
- [8] J. Figueroa; F. Villarroel; H. Ramirez y J. Otero, *Los Números de Ramsey con componente h-buena y secuencias simétricas*, *Divulgaciones Matemáticas*, No 1 **20**(2019), 78-90.
- [9] Radziszowski S.P. and Xia J. (1994) “Paths, cycles and wheels in graphs without antitriangles”, *Australasian Journal of Combinatorics* **9**, 221-232.
- [10] Surahmat and Baskoro E.T. (2001) “On the Ramsey Number of Path or Star versus W_4 or W_5 ”, *Proc. Twelfth Australasian Workshop on Combinatorial Algorithms, Bandung, Indonesia*, 14-17 July, 174-179.
- [11] Villarroel F.; Figueroa J.; Marquez H. and Anselmi A. *Un método algorítmico para el calculo del número Baricéntrico de Ramsey para el grafo estrella* *Bol.soc. Paran. Mat. (3s)* V.**36**. **2**(2018), 169–183.
- [12] Zhou H.L. (1995) “The Ramsey number of an odd cycles with respect to a wheel (in chinese”, *Journal of Mathematics, Shuxu Zazhi (Wuhan)*, **15**: 119–120.

Divulgaciones Matemáticas Vol. 23-24, No. 1-2 (2022-2023), pp. 29-43
<https://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones/>
DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.11529160>
 (CC BY-NC-SA 4.0)

©Autor(es)
e-ISSN 2731-2437
p-ISSN 1315-2068

Estudio cualitativo del metabolismo de una droga ingerida

Qualitative study of the metabolism of an ingested drug

Berónica Aguilar León (beronica.al94@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1457-4008>

Centro Universitario de Pílon
Universidad de Granma
Cuba

Adolfo Arsenio Fernández García (adolfof@uo.edu.cu)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0146-7193>

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Universidad de Oriente
Cuba

Sandy Sánchez Domínguez (sandys@uo.edu.cu)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3788-8413>

Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Universidad de Oriente
Cuba

Antonio Iván Ruiz Chaveco (iruiz2005@yahoo.es)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3473-1704>

Universidad del estado de Amazonas
Brazil

Resumen

En el presente trabajo se realiza un estudio cualitativo de un modelo matemático para la eliminación de una droga del cuerpo humano, particularmente el caso en que la matriz fundamental del sistema tiene un valor propio nulo y otro par de valores propios imaginarios puros, a través de ejemplos se verifican los resultados obtenidos. Adicionalmente se realiza un estudio preliminar del metabolismo de un fármaco en el organismo hasta su eliminación, el efecto que provoca y su incidencia en Cuba.

Palabras y frases clave: Modelo matemático, análisis cualitativo.

Abstract

In the present paper, a qualitative study of a mathematical model for the elimination of a drug from the human body is carried out, particularly the case in which the fundamental matrix of the system has a null eigenvalue and another pair of pure imaginary eigenvalues, through examples the results obtained are verified. Additionally, a preliminary study of the

Recibido 08/08/2022. Revisado 30/08/2022. Aceptado 10/11/2022.
MSC (2010): Primary 34C60; Secondary 34C20.
Autor de correspondencia: Sandy Sánchez Domínguez

metabolism of a drug in the body until its elimination, the effect it causes and its incidence in Cuba is carried out.

Key words and phrases: Mathematical model, qualitative analysis.

1 Introducción

En el eterno quehacer del hombre por tratar de describir los diversos fenómenos que ocurren en la vida cotidiana, procesos de diversa índole como la dinámica poblacional, los eventos meteorológicos, los fenómenos electromagnéticos, las reacciones e interacciones químicas, el crecimiento de tumores, el comportamiento de fármacos, drogas entre otros, son objeto de estudio de múltiples ramas del conocimiento humano y frecuentemente modelados matemáticamente en términos de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales.

Un modelo matemático nos da la posibilidad de estudiar integralmente el proceso, predecir su desarrollo, hacer estimaciones cuantitativas de los cambios que ocurren en él con el transcurso del tiempo; pero nunca será idéntico al objeto real, no transmite todas sus propiedades y peculiaridades. Para hacer posible la descripción matemática de un fenómeno real cualquiera, inevitablemente tendrá que ser simplificado, idealizarlo, resaltando y tomando en cuenta sólo los factores más importantes que actúan sobre éste y despreciando a los menos considerables. Surgiendo así el problema sobre si se han elegido correctamente o no las hipótesis de simplificación.

Es posible que los factores no considerados influyan fuertemente en el fenómeno estudiado, e intercambien sus características cuantitativas y cualitativas. En última instancia esta cuestión se transforma en la práctica, viendo si corresponden o no las conclusiones obtenidas con los datos del problema real, pero de todas formas en muchos casos se pueden señalar las condiciones bajo las cuales ciertas simplificaciones no son posibles.

Muchos problemas de la Medicina y la biología son modelados matemáticamente mediante ecuaciones diferenciales y determinar así su comportamiento en el tiempo. Un ejemplo de esto se encuentra recogidos en los trabajos [4], donde se presentan un conjunto de modelos matemáticos que frecuentemente han sido objeto de estudio en la medicina y biología. En [10] se presenta un modelo bicompartimental intrabasal y extrabasal donde se realiza una simulación numérica para realizar una interpretación de los resultados obtenidos.

Entre los modelos farmacocinéticos más estudiados desde el punto de vista matemático están los de difusión de una droga a través de la sangre arterial, tejido y sangre venosa, estudiado en [9], donde la solución se realiza mediante transformada de Laplace y simulación numérica, así como [6], donde los autores estudian mediante dos compartimientos el efecto de dos drogas en el tratamiento del cáncer, donde también realizan un tratamiento numérico al modelo propuesto.

Algunos trabajos precedentes realizan un estudio matemático del metabolismo de una droga usando diversas vías de administración, como [11], donde se realiza estudio de un caso particular de una droga administrada por vía intravenosa y se estudia usando formas normales el caso en que la matriz fundamental del sistema tiene un valor propio nulo y un par negativos. En [?] se presenta un modelo compartimental para la eliminación de una droga en el organismo suministrada por vía oral y su estudio usando formas normales de forma general.

Otros modelos matemáticos para el comportamiento de una droga son estudiados en [1, 3, 2], en cuyos trabajos se presentan de forma general modelos para el comportamiento de una droga suministrada por vía oral, olfativa y por vía intravenosa, en todos los casos se realizan de forma

general estudios cualitativos mediante formas normales. Una colección de modelos semejantes pueden ser consultados en [14].

Según la OMS La droga se define como: “Toda sustancia que, introducida en un organismo vivo, es capaz de modificar una o más funciones de este”. Es Toda sustancia química de origen natural o sintético que al introducirse por cualquier vía (oral-nasal-intramuscular-intravenosa) ejerce un efecto sobre el sistema nervioso central (SNC), compuesto por el cerebro y la médula espinal, de los organismos vivos [5]. Estas sustancias son capaces de inhibir el dolor, modificar el estado anímico o alterar las percepciones.

La producción, consumo, comercialización y tráfico ilícito de drogas, constituyen una problemática de relevancia social desde que el ser humano descubrió que el consumo de algunas sustancias (*drogas*) modificaba su estado de conciencia. La drogadicción es una enfermedad que consiste en la dependencia de sustancias que afectan el sistema nervioso central y las funciones cerebrales, produciendo alteraciones en el comportamiento, la percepción, el juicio y las emociones. Los efectos de las drogas son diversos, dependiendo del tipo de droga y la cantidad o frecuencia con la que se consume. Pueden producir alucinaciones, intensificar o entorpecer los sentidos, provocar sensaciones de euforia o desesperación. Algunas drogas pueden incluso llevar a la locura o la muerte [8]. El **consumo de drogas**, tanto legales como ilegales, está muy presente en nuestra sociedad, y se ha convertido en un **severo problema** de salud pública en el mundo, que está generando consecuencias negativas no sólo en el ámbito individual de quien la consume, sino también a nivel familiar y de la sociedad en su conjunto.

1.1 Problemática a nivel mundial

Según el Informe Mundial sobre las Drogas 2017 de la UNODC, la legalización del cannabis en algunas partes del mundo parece haber acelerado el consumo diario y las consecuencias relacionadas para la salud, conjuntamente al aumento sin precedentes de la fabricación de cocaína, la expansión de las drogas sintéticas a nuevos mercados y las continuas deficiencias en la disponibilidad de tratamientos contra las drogas. Alrededor de 284 millones de personas de entre 15 y 64 años consumieron drogas en todo el mundo en 2020, lo que supone un aumento del 26 % respecto a la década anterior.

Las personas jóvenes están consumiendo más drogas y los niveles de consumo actuales en muchos países son más altos que los de la generación anterior. En África y América Latina, las personas menores de 35 años representan la mayoría de quienes reciben tratamiento por trastornos relacionados con el consumo de drogas.

Se estima que, a nivel global, 11.2 millones de personas se inyectan drogas. Alrededor de la mitad vive con hepatitis C; 1.4 millones con VIH y 1.2 millones, con ambos.

La legalización del cannabis en Norteamérica parece haber aumentado su consumo diario, especialmente el de productos cannábicos potentes y sobre todo entre las personas adultas jóvenes. También se han reportado aumentos relacionados en personas con trastornos psiquiátricos, suicidios y hospitalizaciones. La legalización ha incrementado los ingresos fiscales y, en general, ha reducido las tasas de detención por posesión de cannabis.

La producción de cocaína alcanzó un máximo histórico en 2020, con un crecimiento del 11 % respecto a 2019, alcanzando las 1.982 toneladas. Las incautaciones de cocaína también aumentaron, a pesar de la pandemia de COVID-19, a un récord de 1.424 toneladas en 2020. Casi el 90 % de la cocaína incautada a nivel mundial en 2021 fue traficada en contenedores y/o por mar. Los datos sugieren que el tráfico de cocaína se está expandiendo a otras regiones fuera de los principales mercados de América del Norte y Europa, con niveles crecientes de tráfico hacia África y

Asia.

El tráfico de metanfetamina continúa expandiéndose geográficamente; 117 países informaron sobre incautaciones de metanfetamina entre 2016 y 2020, frente a 84 que lo hicieron entre 2006 y 2010. Por su parte, las cantidades de metanfetamina incautadas se quintuplicaron entre 2010 y 2020.

La producción de opio en todo el mundo creció un 7% entre 2020 y 2021, alcanzando las 7.930 toneladas, debido principalmente a un aumento de la producción en Afganistán. Sin embargo, la superficie global de cultivo de amapola se redujo un 16%, con 246.800 hectáreas cultivadas durante el mismo periodo.

En Estados Unidos y Canadá, las muertes por sobredosis, provocadas principalmente por la epidemia del uso no médico del fentanilo, siguen batiendo récords. Las estimaciones preliminares en Estados Unidos apuntan a más de 107.000 muertes por sobredosis en 2021, frente a unas 92.000 en 2020.

1.2 Situación en Cuba

Cuba no está ajena a la amenaza de la droga y sus impactos. Las instituciones y programas con que cuenta el Estado cubano para la protección a la familia, la niñez y la juventud, así como a la seguridad social, el acceso universal y gratuito a la salud, educación, cultura y recreación, dan garantía al despliegue sostenible de la política antidroga estructurada y multifactorial con participación activa de las organizaciones sociales y de masas, lo cual constituye su principal fortaleza. En Cuba la producción, venta, demanda, tráfico, distribución y tenencia ilícita de drogas, estupefacientes o sustancias psicotrópicas son delitos severamente penados por la ley [7].

2 Presentación del modelo matemático

Estudiemos el caso de una droga ingerida para evaluar su eliminación a través de los compartimientos presentados en el diagrama siguiente, donde vamos a suponer que Sc es la concentración de la droga en el Sistema circulatorio, Or es la concentración de la droga en el Órgano y Me es la concentración de la droga en el Metabolito respectivamente.

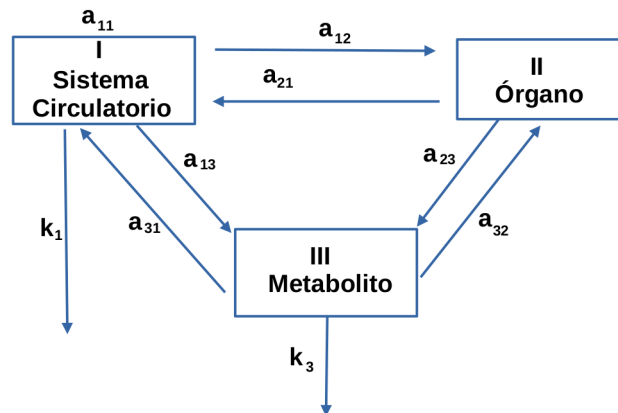


Figura 1: Diagrama compartimental del metabolismo de la droga

En virtud de este diagrama se formula el siguiente modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \frac{dS_c}{dt} = -(a_{12} - a_{11} + k_1)S_c + a_{21}O_r + a_{31}M_e + S_C(S_c, O_r, M_e) \\ \frac{dO_r}{dt} = a_{12}S_c - (a_{21} + a_{23})O_r + a_{32}M_e + O_R(S_c, O_r, M_e) \\ \frac{dM_e}{dt} = a_{13}S_c + a_{23}O_r - (a_{31} + a_{33} + k_3)M_e + M_E(S_c, O_r, M_e) \end{cases} \quad (2.1)$$

donde

$$\begin{aligned} S_C(S_c, O_r, M_e) &= \sum_{|p| \geq 2} S_C^{(p)}(t) S_c^{p_1} O_r^{p_2} M_e^{p_3}, & |p| &= p_1 + p_2 + p_3 \\ O_R(S_c, O_r, M_e) &= \sum_{|p| \geq 2} O_R^{(p)}(t) S_c^{p_1} O_r^{p_2} M_e^{p_3}, & |p| &= p_1 + p_2 + p_3 \\ M_E(S_c, O_r, M_e) &= \sum_{|p| \geq 2} M_E^{(p)}(t) S_c^{p_1} O_r^{p_2} M_e^{p_3}, & |p| &= p_1 + p_2 + p_3 \end{aligned}$$

Consideremos \bar{S}_c , \bar{O}_r y \bar{M}_e los valores admisibles de la droga en los compartimentos I, II y III respectivamente y \tilde{S}_c , \tilde{O}_r y \tilde{M}_e las concentraciones totales de la toxina en el correspondiente compartimento, de modo que las variables $S_c = \tilde{S}_c - \bar{S}_c$, $O_r = \tilde{O}_r - \bar{O}_r$ y $M_e = \tilde{M}_e - \bar{M}_e$ y cuando $S_c \rightarrow 0$, $O_r \rightarrow 0$ y $M_e \rightarrow 0$ se cumplen las siguientes condiciones $\tilde{S}_c \rightarrow \bar{S}_c$, $\tilde{O}_r \rightarrow \bar{O}_r$ y $\tilde{M}_e \rightarrow \bar{M}_e$ lo cual constituye el objetivo principal de este trabajo. La cantidad de droga que se encuentra en los compartimientos cumple el principio de conservación de masas, o sea $N = S_c(t) + O_r(t) + M_e(t)$.

Donde $a_{ij} > 0$ representa la concentración de droga que se traslada desde el compartimento i al compartimento j

$a_{11} \geq 0$ representa la concentración de droga que comienza a circular en el sistema, $a_{11} = 0$ cuando no se consume y $a_{11} > 0$ si todavía sigue consumiendo la droga.

Las series $S_C(S_c, O_r, M_e)$, $O_R(S_c, O_r, M_e)$ y $M_E(S_c, O_r, M_e)$ son perturbaciones externas, como por ejemplo si el que consume droga es alcohólico, si por el contrario es un atleta saludable que realiza ejercicios físicos y comienza a tomar drogas etc., desde el punto de vista matemático son infinitesimales de orden superior.

Por otra parte, $k_1 > 0$ representa la concentración de droga que es eliminada desde el Sistema circulatorio. $k_3 > 0$ representa la concentración de droga que es eliminada desde el Metabolito. Además, $-a_{ij}x_i$ representa el paso del elemento x_i desde el compartimento i y con signo positivo la llegada al compartimento j . Con el objetivo de reducir el número de parámetros introducimos el siguiente cambio de variables:

$$x_1 = S_c, \quad x_2 = O_r, \quad x_3 = M_e, \quad a = a_{12} - a_{11}, \quad b = a_{21} + a_{23} \quad c = a_{31} + a_{33},$$

vamos a considerar que la perturbación ocurre en la ecuación del órgano, o sea $S_C(S_c, O_r, M_e) = 0$, $O_R(S_c, O_r, M_e) = \alpha_2 O_r^3$ y $M_E(S_c, O_r, M_e) = 0$, de modo que el sistema con las nuevas variables

se transforma en:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -(a + k_1)x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{12}x_1 - bx_2 + a_{32}x_3 + \alpha_2x_2^3 \\ \frac{dx_3}{dt} = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 - (c + k_3)x_3 \end{cases} \quad (2.2)$$

3 Análisis cualitativo

Analicemos el comportamiento de las trayectorias del sistema (2.2) en una vecindad de la posición de equilibrio $(0,0,0)$, para lo cual se emplea el método de primera aproximación. La matriz de la parte lineal del sistema tiene la forma:

$$A = \begin{pmatrix} -(a + k_1) & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & -b & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & -(c + k_3) \end{pmatrix}$$

donde el polinomio de Hurwitz asociado a la matriz A tiene la expresión:

$$\lambda^3 + n_1\lambda^2 + n_2\lambda + n_3,$$

donde

$$\begin{aligned} n_1 &= (a + b + c + k_1 + k_3) \\ n_2 &= a(b + c + k_3) + b(c + k_1 + k_3) + k_1(c + k_3) - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32} \\ n_3 &= (a + k_1)(b(c + k_3) - a_{23}a_{32}) - a_{13}(a_{31}b + a_{21}a_{32}) - a_{12}(a_{21}(c + k_3) + a_{23}a_{31}) \end{aligned}$$

por tanto el comportamiento de las trayectorias alrededor de la posición de equilibrio está sujeto al siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Si se cumplen las condiciones siguientes:*

- $a_{12} + b + c + k_1 + k_3 > a_{11}$.
- $a(b + c + k_3) + b(c + k_1 + k_3) + k_1(c + k_3) > a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32}$.
- $(a + k_1)(b(c + k_3) - a_{23}a_{32}) > a_{13}(a_{31}b + a_{21}a_{32}) + a_{12}(a_{21}(c + k_3) + a_{23}a_{31})$.

entonces, el sistema es asintóticamente estable.

Demostración. De cumplirse estas condiciones todos los menores principales de la matriz de Hurwitz,

$$H_1 = \begin{pmatrix} n_1 & 1 & 0 \\ n_3 & n_2 & n_1 \\ 0 & 0 & n_3 \end{pmatrix}$$

serán mayores que cero, por lo tanto esta es una condición necesaria y suficiente para que las raíces del polinomio característico asociado a la matriz A tengan parte real negativa, de este modo, el sistema es asintóticamente estable, en caso contrario es inestable. \square

Nota 3.1. Es claro que la condición $a_{12} + b + c + k_1 + k_3 > a_{11}$ se refiere a que si en el sistema la concentración de droga que se encuentra en los compartimientos y la concentración de droga que se elimina es menor que la concentración de entrada a_{11} habrá control en el sistema, en caso contrario, si ocurre que $a_{12} + b + c + k_1 + k_3 < a_{11}$ la concentración de entrada es superior a la que se encuentra en los compartimientos y la que se puede eliminar, de modo que estamos en presencia de una sobredosis y el sistema es inestable, en este caso las consecuencias para la salud son nefastas y de ocurrir esto el paciente puede morir.

3.1 Caso en que aparecen dos valores propios imaginarios puros y uno nulo

En [12] se estudia el caso en que se presenta un valor propio nulo, uno negativo y otro par con parte real negativa para lo cual fue necesario reducir el sistema en la forma cuasi-normal combinada, en este caso vamos a estudiar el caso en que aparecen dos valores complejos conjugados con parte imaginaria nulo y otro valor propio nulo, supongamos que en el sistema (2.2) se cumplen las siguientes condiciones:

$$a = -k_1, \quad a_{12} = 0, \quad b = -(c + k_3), \quad a_{23} = c - k_3, \quad a_{21} = a_{31}, \quad a_{31} = -a_{31}, \quad a_{32} = -(c + k_3),$$

supongamos además que $a_{13}a_{31} < 2k_3(c + k_3)$, en cuyo caso se tiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{31}x_2 - a_{31}x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = (c + k_3)x_2 - (c + k_3)x_3 + a_{21}x_2^3 \\ \frac{dx_3}{dt} = a_{13}x_1 + (c - k_3)x_2 - (c + k_3)x_3, \end{cases} \quad (3.1)$$

la matriz de la parte lineal del sistema tiene la forma:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & a_{31} & -a_{31} \\ 0 & c + k_3 & -(c + k_3) \\ a_{13} & c - k_3 & -(c + k_3) \end{pmatrix}$$

y los valores propios son: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{\sigma}i$ y $\lambda_3 = -\sqrt{\sigma}i$, donde $\sigma = 2k_3(c + k_3) - a_{13}a_{31}$. Mediante el cambio de variables $\mathbf{x} = S_3\mathbf{y}$ se reduce el sistema al sistema equivalente

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = Y_1(y_1, y_2, y_3) \\ \frac{dy_2}{dt} = \sigma i y_2 + Y_2(y_1, y_2, y_3) \\ \frac{dy_3}{dt} = -\sigma i y_3 + Y_3(y_1, y_2, y_3) \end{cases} \quad (3.2)$$

donde:

$$Y_1(y_1, y_2, y_3) = \frac{2k_3}{a_{13}} + a_{31} \left(\frac{i y_2}{\sqrt{\sigma} + i(c + k_3)} y_1 + \frac{y_3}{c + k_3 + i\sqrt{\sigma}} \right)$$

$$Y_2(y_1, y_2, y_3) = y_1 + \frac{(c+k_3)}{c+k_3-i\sqrt{\sigma}}y_2 + \frac{(c+k_3)}{c+k_3+i\sqrt{\sigma}}y_3$$

$$Y_3(y_1, y_2, y_3) = y_1 + y_2 + y_3$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} \frac{2k_3}{a_{13}} & -\frac{a_{31}}{i\sqrt{\sigma} - (c+k_3)} & \frac{a_{31}}{i\sqrt{\sigma} + c+k_3} \\ 1 & \frac{c+k_3}{-i\sqrt{\sigma} + c+k_3} & \frac{c+k_3}{i\sqrt{\sigma} + c+k_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 3.2. *El cambio de variables:*

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + h_1(z_1) + \bar{h}_1(z_1, z_2, z_3) \\ y_2 = z_2 + h_2(z_1) \\ y_3 = z_3 + h_3(z_1) \end{cases} \quad (3.3)$$

transforma el sistema (3.2) al sistema:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = Z_1(z_1) \\ \frac{dz_2}{dt} = \sigma iz_2 + Z_2(z_1, z_2, z_3) \\ \frac{dz_3}{dt} = -\sigma iz_3 + Z_3(z_1, z_2, z_3) \end{cases} \quad (3.4)$$

donde $z_3 = \bar{z}_2$, $Z_2(z_1, z_2, z_3)$, $Z_3(z_1, z_2, z_3)$ y $\bar{h}_1(z_1, z_2, z_3)$ se anulan para $z_2 = z_3 = 0$.

Demostración. Derivando (3.3) a lo largo de las trayectorias de los sistemas (3.2) y (3.4) se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} Y_1(z_1 + h_1 + \bar{h}_1, z_2 + h_2, z_3 + h_3) = Z_1(z_1) + \frac{dh_1}{dz_1}Z_1(z_1) + \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial z_1}Z_1(z_1) + \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial z_2}\sigma iz_2 + \\ \quad + \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial z_2}Z_2(z_1, z_2, z_3) - \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial z_3}\sigma iz_3 + \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial z_3}Z_3(z_1, z_2, z_3) \\ \sigma ih_2 + Y_2(z_1 + h_1 + \bar{h}_1, z_2 + h_2, z_3 + h_3) = Z_2(z_1, z_2, z_3) + \frac{dh_2}{dz_1}Z_1(z_1) \\ -\sigma ih_3 + Y_3(z_1 + h_1 + \bar{h}_1, z_2 + h_2, z_3 + h_3) = Z_3(z_1, z_2, z_3) + \frac{dh_3}{dz_1}Z_1(z_1) \end{cases} \quad (3.5)$$

como $\bar{h}_1(z_1, z_2, z_3) = \sum_{|p|\geq 2} \bar{h}_1^{(p)} z_1^{p_1} z_2^{p_2} z_3^{p_3}$, entonces $\frac{\partial \bar{h}_1}{\partial z_2} z_2 = p_2 z_2 \sum_{|p|\geq 2} \bar{h}_1^{(p)} z_1^{p_1} z_2^{p_2-1} z_3^{p_3} = p_2 \bar{h}_1$,

similarmente $\frac{\partial \bar{h}_1}{\partial z_3} z_3 = p_3 \bar{h}_1$, sustituyendo estas expresiones en (3.5) se obtiene:

$$\begin{cases} Y_1(z_1 + h_1 + \bar{h}_1, z_2 + h_2, z_3 + h_3) - \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial z_1} Z_1(z_1) - \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial z_2} Z_2(z_1, z_2, z_3) - \\ \quad - \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial z_3} Z_3(z_1, z_2, z_3) - \frac{dh_1}{dz_1} Z_1(z_1) = Z_1(z_1) + \sigma i(p_2 - p_3) \bar{h}_1 \\ Y_2(z_1 + h_1 + \bar{h}_1, z_2 + h_2, z_3 + h_3) - \frac{dh_2}{dz_1} Z_1(z_1) = Z_2(z_1, z_2, z_3) - \sqrt{\sigma} i h_2 \\ Y_3(z_1 + h_1 + \bar{h}_1, z_2 + h_2, z_3 + h_3) - \frac{dh_3}{dz_1} Z_1(z_1) = Z_3(z_1, z_2, z_3) + \sqrt{\sigma} i h_3 \end{cases}$$

cuando $z_2 = z_3 = 0$, se calculan las series $Z_1(z_1)$, $h_1(z_1)$, $h_2(z_1)$ y $h_3(z_1)$ por medio del sistema siguiente

$$\begin{cases} Y_1(z_1 + h_1, h_2, h_3) - \frac{dh_1}{dz_1} Z_1(z_1) = Z_1(z_1) \\ Y_2(z_1 + h_1, h_2, h_3) - \frac{dh_2}{dz_1} Z_1(z_1) = -\sqrt{\sigma} i h_2 \\ Y_3(z_1 + h_1, h_2, h_3) - \frac{dh_3}{dz_1} Z_1(z_1) = \sqrt{\sigma} i h_3, \end{cases}$$

donde:

$$\begin{aligned} Z_1(z_1) &= -\frac{a_{13} a_{31} \alpha_2}{\sigma^2} z_1^3 - \frac{3a_{13}^2 a_{31}^2 \alpha_2^2}{\sigma^4} z_1^5 + \dots \\ h_2(z_1) &= \frac{i\alpha_2 (c + k_3 - i\sqrt{\sigma}) (\sigma^2 + 2k_3 (i\sqrt{\sigma}))}{2\sigma^3 \sqrt{\sigma} i} z_1^3 \\ &\quad + \frac{3ia_{13} a_{31} \alpha_2^2 (c + k_3 - i\sqrt{\sigma}) (\sigma^2 + 2k_3 (i\sqrt{\sigma}))}{2\sigma^4 \sqrt{\sigma}} z_1^5 + \dots \\ h_3(z_1) &= -\frac{i\alpha_2 (c + k_3 + i\sqrt{\sigma}) (\sigma^2 + 2k_3 (-i\sqrt{\sigma}))}{2\sigma^3 \sqrt{\sigma} i} z_1^3 \\ &\quad + \frac{3ia_{13} a_{31} \alpha_2^2 (c + k_3 + i\sqrt{\sigma}) (-\sigma^2 + 2k_3 (i\sqrt{\sigma}))}{2\sigma^4 \sqrt{\sigma}} z_1^5 + \dots \end{aligned}$$

en cambio cuando $z_2 \neq 0$, y $z_3 \neq 0$ respectivamente se calculan las series $Z_2(z_1, z_2, z_3)$, $Z_3(z_1, z_2, z_3)$ y $\bar{h}_1(z_1, z_2, z_3)$ por medio del sistema

$$\begin{cases} Y_1(z_1 + \bar{h}_1, z_2, z_3) - \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial z_1} Z_1(z_1) - \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial z_2} Z_2(z_1, z_2, z_3) - \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial z_3} Z_3(z_1, z_2, z_3) = \sigma i(p_2 - p_3) \bar{h}_1 \\ Y_2(z_1 + \bar{h}_1, z_2, z_3) = Z_2(z_1, z_2, z_3) \\ Y_3(z_1 + \bar{h}_1, z_2, z_3) = Z_3(z_1, z_2, z_3), \end{cases}$$

donde:

$$\bar{h}_1(z_1, z_2, z_3) = \frac{-6a_{13} a_{31} \alpha_2 (c + k_3)^2}{\sigma^2 (c + k_3) + \sigma^3} z_1 z_2 z_3 + \dots$$

$$Z_2(z_1 z_2 z_3) = -\frac{3i\alpha_2 (c + k_3)^2 (\sigma^2 + 2k_3\sqrt{\sigma}i)}{\sigma^2\sqrt{\sigma}(c + k_3) + \sigma^3 i} z_1 z_2 z_3 + \dots$$

$$Z_3(z_1, z_2, z_3) = \frac{3\alpha_2 (c + k_3)^2 (-\sigma^2 + 2k_3\sqrt{\sigma}i)}{\sigma^3 + \sigma^2\sqrt{\sigma}(c + k_3)i} z_1 z_2 z_3 + \dots$$

como la transformación es distinguida, todos los términos resonantes son arbitrarios y en este caso se toma $h_1(z_1) = 0$, para el caso no resonante $h_1(z_1)$ se obtiene de forma única, por lo tanto el sistema (3.4) tiene la expresión:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = -\frac{a_{13}a_{31}\alpha_2}{\sigma^2} z_1^3 - \frac{3a_{13}^2 a_{31}^2 \alpha_2^2}{\sigma^4} z_1^5 + \dots \\ \frac{dz_2}{dt} = \sigma i z_2 - \frac{3i\alpha_2 (c + k_3)^2 (\sigma^2 + 2k_3\sqrt{\sigma}i)}{\sigma^2\sqrt{\sigma}(c + k_3) + \sigma^3 i} z_1 z_2 z_3 + \dots \\ \frac{dz_3}{dt} = -\sigma i z_3 + \frac{3\alpha_2 (c + k_3)^2 (-\sigma^2 + 2k_3\sqrt{\sigma}i)}{\sigma^3 + \sigma^2\sqrt{\sigma}(c + k_3)i} z_1 z_2 z_3 + \dots \end{cases}$$

lo que prueba la existencia del cambio de variables. \square

Teorema 3.3. *La transformación de coordenadas:*

$$\begin{cases} z_1 = u_1 \\ z_2 = u_2 + h_2(u_2, u_3) \\ z_3 = u_3 + h_3(u_2, u_3) \end{cases} \quad (3.6)$$

reduce el sistema (3.4) a la Forma Normal Combinada:

$$\begin{cases} u'_1 = U_1(u_1) \\ u'_2 = \sigma i u_2 + u_2 P_2(u_2 u_3) \\ u'_3 = -\sigma i u_3 + u_3 P_3(u_2 u_3). \end{cases} \quad (3.7)$$

Demostración. Derivando (3.6) a lo largo de las trayectorias de los sistemas (3.4) y (3.7) se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} Z_1(u_1) = U_1(u_1) \\ \sigma i h_2 + Z_2(u_1, u_2 + h_2, u_3 + h_3) = u_2 P_2(u_2 u_3) + \frac{\partial h_2}{\partial u_2} \sigma i u_2 + \frac{\partial h_2}{\partial u_2} u_2 P_2(u_2 u_3) - \frac{\partial h_2}{\partial u_3} \sigma i u_3 + \\ \quad + \frac{\partial h_2}{\partial u_3} u_3 P_3(u_2 u_3) \\ -\sigma i h_3 + Z_3(u_1, u_2 + h_2, u_3 + h_3) = u_3 P_3(u_2 u_3) + \frac{\partial h_3}{\partial u_2} \sigma i u_2 + \frac{\partial h_3}{\partial u_2} u_2 P_2(u_2 u_3) - \frac{\partial h_3}{\partial u_3} \sigma i u_3 + \\ \quad + \frac{\partial h_3}{\partial u_3} u_3 P_3(u_2 u_3). \end{cases} \quad (3.8)$$

Para las series $h_2(u_2, u_3) = \sum_{|p|\geq 2} h_2^{(p)} u_2^{p_2} u_3^{p_3}$, por tanto $\frac{\partial h_2}{\partial u_2} u_2 = p_2 u_2 \sum_{|p|\geq 2} h_2^{(p)} u_2^{p_2-1} u_3^{p_3} = p_2 h_2$,

similarmente $\frac{\partial h_2}{\partial u_3}u_3 = p_3h_2$, $\frac{\partial h_3}{\partial u_2}u_2 = p_2h_3$ y $\frac{\partial h_3}{\partial u_3}u_3 = p_3h_3$, por tanto sustituyendo estas expresiones en el sistema (3.8) se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1(u_1) = U_1(u_1) \\ (p_2 - p_3 - 1)\sigma ih_2 + u_2P_2(u_2u_3) = Z_2(u_1, u_2 + h_2, u_3 + h_3) - \frac{\partial h_2}{\partial u_2}\sigma iu_2P_2(u_2u_3) - \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{\partial h_2}{\partial u_3}u_3P_3(u_2u_3) \\ (p_2 - p_3 + 1)\sigma ih_3 + u_3P_3(u_2u_3) = Z_3(u_1, u_2 + h_2, u_3 + h_3) - \frac{\partial h_3}{\partial u_2}\sigma iu_2P_2(u_2u_3) - \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{\partial h_3}{\partial u_3}u_3P_3(u_2u_3). \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Cuando $p_2 - p_3 - 1 = 0$ y $p_2 - p_3 + 1 = 0$ se calculan los coeficientes de las series $P_2(u_2u_3)$ y $P_3(u_2u_3)$,

$$\begin{aligned} U_1(u_1) &= -\frac{a_{13}a_{31}\alpha_2}{\sigma^2}u_1^3 - \frac{3a_{13}^2a_{31}^2\alpha_2^2}{\sigma^4}u_1^5 + \dots \\ u_2P_2(u_2u_3) &= \frac{6\alpha_2k_3(c+k_3)^3}{2\sigma((c+k_3)^2 + \sigma)}u_2^2u_3 - \frac{3\alpha_2(c+k_3)^3}{2\sqrt{\sigma}((c+k_3)^2 + \sigma)}iu_2^2u_3 + \dots \\ u_3P_3(u_2u_3) &= \frac{6\alpha_2k_3(c+k_3)^3}{2\sigma((c+k_3)^2 + \sigma)}u_2u_3^2 + \frac{3\alpha_2(c+k_3)^3}{2\sqrt{\sigma}((c+k_3)^2 + \sigma)}iu_2u_3^2 + \dots \end{aligned}$$

en el caso contrario se calculan los coeficientes de las series $h_2(u_2, u_3)$ y $h_3(u_2, u_3)$, donde:

$$\begin{aligned} h_2(u_2, u_3) &= -\frac{3i\alpha_2(c+k_3)^3(-a_{13}a_{31} + 2k_3(c+k_3 + i\sqrt{\sigma}))}{2\sqrt{\sigma}(2k_3(c+k_3) - a_{13}a_{31})(c+k_3 + i\sqrt{\sigma})^2}u_2u_3^2 + \dots \\ h_3(u_2, u_3) &= \frac{3i\alpha_2(c+k_3)^3(-a_{13}a_{31} + 2k_3(c+k_3 + i\sqrt{\sigma}))}{2\sqrt{\sigma}(2k_3(c+k_3) - a_{13}a_{31})(c+k_3 + i\sqrt{\sigma})^2}u_2^2u_3 + \dots \end{aligned}$$

lo que prueba la existencia del cambio de variables. De este modo el sistema (3.7) tiene la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_1 = -\frac{a_{13}a_{31}\alpha_2}{\sigma^2}u_1^3 - \frac{3a_{13}^2a_{31}^2\alpha_2^2}{\sigma^4}u_1^5 + \dots \\ u'_2 = \sigma iu_2 + \frac{3\alpha_2k_3(c+k_3)^3}{\sigma((c+k_3)^2 + \sigma)}u_2^2u_3 - \frac{3\alpha_2(c+k_3)^3}{2\sqrt{\sigma}((c+k_3)^2 + \sigma)}iu_2^2u_3 + \dots \\ u'_3 = -\sigma iu_3 + \frac{3\alpha_2k_3(c+k_3)^3}{\sigma((c+k_3)^2 + \sigma)}u_2u_3^2 + \frac{3\alpha_2(c+k_3)^3}{2\sqrt{\sigma}((c+k_3)^2 + \sigma)}iu_2u_3^2 + \dots \end{array} \right. \quad (3.10)$$

□

Teorema 3.4. *Si se cumplen las condiciones siguientes:*

- $\alpha_2a_{13}a_{31} < 0$
- $\frac{3\alpha_2k_3(c+k_3)^3}{\sigma((c+k_3)^2 + \sigma)} < 0$,

entonces las trayectorias del sistema (3.10) son asintóticamente estables, en caso contrario son inestables.

Demostración. Sea la función de Liapunov:

$$V_3(u_1, u_2, u_3) = \frac{u_1^2}{2} + u_2 u_3,$$

derivando respecto a t se obtiene:

$$\frac{dV_3}{dt} = -\frac{a_{13}a_{31}\alpha_2}{\sigma^2}u_1^4 + \frac{6\alpha_2k_3(c+k_3)^3}{\sigma((c+k_3)^2+\sigma)}u_2^2u_3^2 + \mathcal{R}_3(u_1, u_2, u_3).$$

La expresión $\mathcal{R}_3(u_1, u_2, u_3)$ contiene potencias de grado superior a tres, por tanto, usando el principio de primera aproximación podemos concluir que $\frac{dV_3}{dt} < 0$ si se cumplen simultáneamente las condiciones $\alpha_2 a_{13} a_{31} < 0$ y $\frac{3\alpha_2 k_3 (c+k_3)^3}{\sigma((c+k_3)^2+\sigma)} < 0$, de este modo la posición de equilibrio es asintóticamente estable. \square

Supongamos ahora que se cumplen las condiciones del Teorema 3.4

Ejemplo 3.1. Sean $c = -0,3$, $a_{13} = 0,1$, $a_{31} = 0,1$, $k_3 = 0,1$ y $\alpha_2 = -0,1$, de esta forma el sistema resultante es:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 0,1x_2 - 0,1x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = -0,2x_2 + 0,2x_3 - 0,1x_2^3 \\ \frac{dx_3}{dt} = 0,1x_1 - 0,4x_2 + 0,2x_3, \end{cases}$$

los valores propios de la matriz fundamental son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0,022i$ y $\lambda_3 = -0,022i$, en este caso el comportamiento gráfico muestra estabilidad.

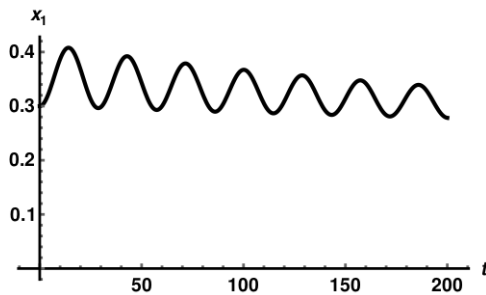


Figura 2: Gráfico de las trayectorias $x_1(t)$ en el Ejemplo 3.1

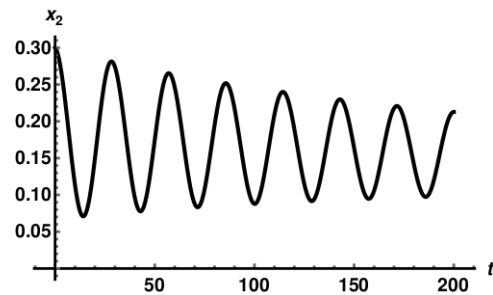


Figura 3: Gráfico de las trayectorias de $x_2(t)$ en el Ejemplo 3.1

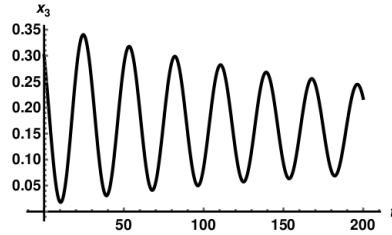


Figura 4: Gráfico de las trayectorias $x_3(t)$ en el Ejemplo 3.1

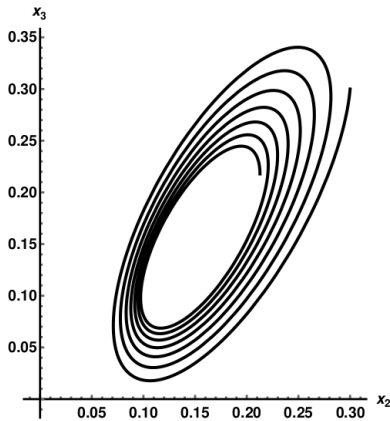


Figura 5: Gráfico de las trayectorias de $x_2(t)$ vs x_3 en el Ejemplo 3.1

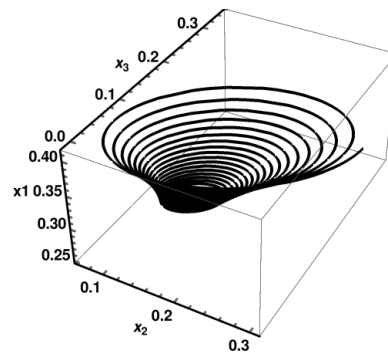


Figura 6: Gráfico de las trayectorias x_2 vs $x_3(t)$ vs x_1 en el Ejemplo 3.1

Supongamos ahora que no se cumplen las condiciones del teorema (3.4)

Ejemplo 3.2. Sean $c = 0,3$, $a_{13} = 0,1$, $a_{31} = 0,1$, $k_3 = -0,1$ y $\alpha_2 = 0,1$, de esta forma el sistema resultante es:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 0,1x_2 - 0,1x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = 0,2x_2 - 0,2x_3 + 0,1x_2^2 \\ \frac{dx_3}{dt} = 0,1x_1 + 0,4x_2 - 0,2x_3, \end{cases}$$

los valores propios de la matriz fundamental son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0,02236i$ y $\lambda_3 = -0,02236i$, en este caso el comportamiento gráfico muestra estabilidad.

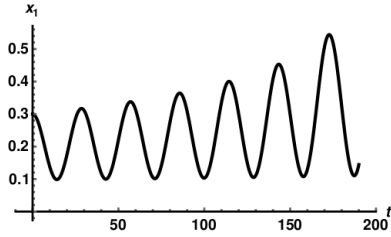


Figura 7: Gráfico de las trayectorias $x_1(t)$ en el Ejemplo 3.2

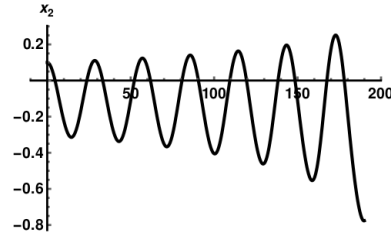


Figura 8: Gráfico de las trayectorias de $x_2(t)$ en el Ejemplo 3.2

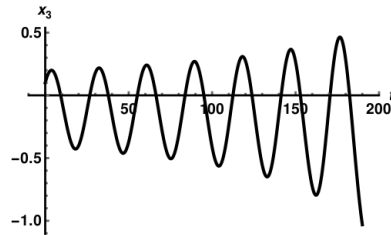


Figura 9: Gráfico de las trayectorias $x_3(t)$ en el Ejemplo 3.2

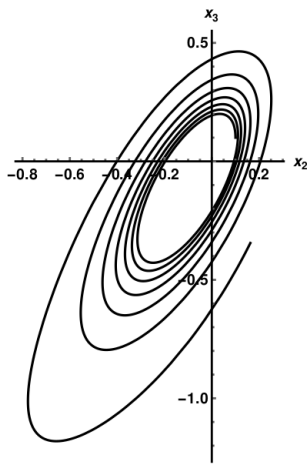


Figura 10: Gráfico de las trayectorias de $x_2(t)$ vs x_3 en el Ejemplo 3.2

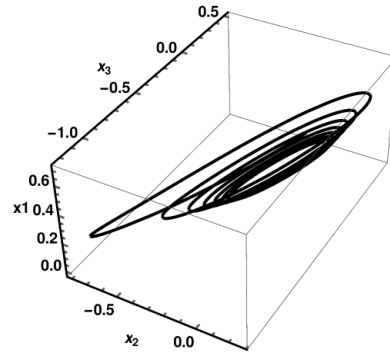



Figura 11: Gráfico de las trayectorias x_2 vs $x_3(t)$ vs x_1 en el Ejemplo 3.2

Nota 3.2. Si no se cumplen las condiciones del teorema (3.4), se deben tomar las medidas profilácticas necesarias para modificar el cuadro clínico y evitar un desenlace fatal como consecuencia de una concentración excesiva de la droga.

Referencias

- [1] Aguilar, B. Libório, A. Sánchez, S. Ribeiro, Z. Lacort, M. Ferreira, R. Ruiz, A. I. *Mathematical Modeling of an Ingerable Drug*, IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM), **15** (2019), 75–80.
- [2] Aguilar, B. Leão, L. Sánchez, S. Oliveira, K. Lacort, M. Ferreira, R. Rodrigues, E. Ruiz, A. I. *Combined normal form in the model of an injectable drug*, Journal of multidisciplinary engineering science and technology (JMEST), **7** (2020), 11535-11540.
- [3] Aguilar, B. Fernandes, N. Oliveira, K. Rodrigues, E. Leão, L. Libório, A. Sánchez, S. Ruiz, A. I. *Two critical cases of the model of an inhalable drug*, IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM), **16** (2020), 58–64.
- [4] Campollo Rivas, O. *Modelos matemáticos en medicina y biología. Bases teóricas y fundamentos*, Revista de Investigación Clínica, **46** (1994), 307–307.
- [5] Díaz, Mónica Méndez. Contreras, Alejandra E. Ruiz. Gómez, Berta Prieto. Romano, Antonio. Caynas, Seraid. García, Oscar Prospéro. *El cerebro y las drogas, sus mecanismos neurobiológicos*, Salud mental, **33** (2010), 451–456.
- [6] Feizabadi, Mitra Shojania. Volk, Christina. Hirschbeck, Sarah. *A two-compartment model interacting with dynamic drugs*, Applied Mathematics Letters, **22** (2009), 1205–1209.
- [7] Gálvez Cabrera, Elisa. *Bases legales de la actuación médica ante el uso de drogas ilícitas en Cuba*, Revista Cubana de Medicina General Integral, **21** (2005).
- [8] Gómez, César Pereiro. BARRERA, ANA BERMEJO. DE ABAJO, BENITO LÓPEZ. *Muerte por sobredosis: de la reacción aguda tras consumo de opiáceos a la muerte asociada al policonsumo*, Adicciones, **17** (2005), 151–165.
- [9] Khanday, M. A. Rafiq, Aasma. Nazir, Khalid. *Mathematical models for drug diffusion through the compartments of blood and tissue medium*, Alexandria Journal of Medicine, **53** (2017), 245–249.
- [10] López, Miguel Andériz. *Ecuaciones diferenciales en farmacocinética*, Revista de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza, **73** (2018), 59–95.
- [11] Rodríguez Más, Dannisel. Bermudes Sosa, Juana Emilia. Sánchez Domínguez, Sandy. Ruiz Chaveco, Antonio Iván. *Estudio cualitativo de un modelo matemático para la eliminación de una droga incorporada por vía intravenosa*, COMPUMAT, (2019).
- [12] Ruiz, A. I. Sánchez, S. Fernández, A. A. *Mathematical modeling of the polymerization of hemoglobin S*, Lap Lambert Academic Publishing, Deutschland, (2015).
- [13] Ruiz, A. I., Sánchez, S., Leão, L. M., Andrade, F., Lacort, M., Ferreira, R., de Carvalho, E., Fernández, A. A. Da Costa, T. *Applications of Differential Equations in Mathematical Modeling*, CRV, Brazil, (2016).
- [14] Ruiz, A. I., Fernández, A. A., Libório, A. M., Cabal, C., Batista, E., de Carvalho, E., Chagas, F., Leão, L. M., Lacortt, M., González, O. A., Castanêda, P., Ferreira, R., Sánchez, S., Marinho, T. V., da Costa, T. and Ribeiro, Z. *Modelagem matemática de problemas diversos*, Appris, Brazil, (2018).

Divulgaciones Matemáticas Vol. 23-24, No. 1-2 (2022-2023), pp. 44–53
<https://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones/>
DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.11539852>
 (CC BY-NC-SA 4.0)

©Autor(es)
e-ISSN 2731-2437
p-ISSN 1315-2068

$Top(X)$ y $Spec(\tau)$ como espacios primales

Top(X) and Spec(τ) as primal spaces

Viviana Benavides (bfviviana@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4984-4613>

Estudiante Maestría Académica con Trayectoria de Investigación en Matemática, Instituto de
Posgrado
Universidad Técnica de Manabí
Portoviejo, Manabí, Ecuador

Jorge Enrique Vielma (jvielma@espol.edu.ec)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9620-6756>

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas
Escuela Superior Politécnica del Litoral
Guayaquil, Guayas, Ecuador

Resumen

Una topología Alexandroff puede ser definida sobre un conjunto no vacío X , a través de una función $f : X \rightarrow X$, decidiendo que los abiertos del espacio son los conjuntos $A \subset X$ que contienen a su preimagen, es decir $\tau_f := \{A \subset X : f^{-1}(A) \subseteq A\}$. Esta topología es denominada topología primal, y al espacio (X, τ_f) se lo llama espacio primal. En este trabajo se explora una topología primal τ_ψ inducida en $Top(X)$, a través de la función $\psi : Top(X) \rightarrow Top(X)$, definida como $\psi(\tau) = \bar{\tau}$, con $\bar{\tau}$ la clausura de τ en 2^X con la topología producto. Se prueba que el conjunto de todas las topologías Alexandroff en $Top(X)$ es denso en $(Top(X), \tau_{\psi^*})$, con τ_{ψ^*} la cotopología. Se prueba además que el conjunto $\phi(\tau) := \{A \in \tau_\psi : \tau \not\subseteq A\}$ es un ideal maximal de τ_ψ si y solo si τ es Alexandroff. Finalmente se exploran las topologías primales en el espectro primo de un semianillo.

Palabras y frases clave: Topología primal; espectro primo; semianillo; topología Alexandroff.

Abstract

An Alexandroff topology can be defined over a non-empty set X , through a function $f : X \rightarrow X$, deciding that the open sets are those subsets $A \subseteq X$ that contain their preimage, that is $\tau_f := \{A \subset X : f^{-1}(A) \subseteq A\}$. This topology is called primal topology and the space (X, τ_f) is called primal space. In this work we explore a primal topology τ_ψ induced on $Top(X)$, through the function $\psi : Top(X) \rightarrow Top(X)$ defined as $\psi(\tau) = \bar{\tau}$, with $\bar{\tau}$ the closure of τ in 2^X with the product topology. It is shown that the set of all Alexandroff topologies in $Top(X)$ is dense in $(Top(X), \tau_{\psi^*})$, with τ_{ψ^*} the cotopology. It is also shown that the set $\phi(\tau) := \{A \in \tau_\psi : \tau \not\subseteq A\}$ is a maximal ideal of τ_ψ if and only if τ is Alexandroff. Finally we explore the primal topologies in the prime spectrum of a semiring.

Key words and phrases: Primal topology; prime spectrum; semiring; Alexandroff topology.

Recibido 29/11/2022. Revisado 28/02/2023. Aceptado 24/05/2023.
MSC (2010): Primary 54C99; Secondary 54H13.
Autor de correspondencia: Viviana Benavides

1 Introducción

Pavel Alexandroff en [1], introdujo una clase de espacios topológicos que él demonimó *Espacios discretos*. Estos espacios son aquellos que son cerrados bajo uniones arbitrarias de conjuntos cerrados. Es claro que esta definición es equivalente a que estos espacios son cerrados bajo intersecciones arbitrarias de conjuntos abiertos. Para evitar confusiones con aquellos espacios en los que todo subconjunto es abierto, futuros autores cambiarían regularmente su denominación. McCord en [8] los llama *A-spaces*, Johnstone en [7] los llama *Alexandroff*, Herman en [6], denomina *Espacios dispersos* a los espacios cerrados bajo intersecciones de abiertos que además son T_0 . Años después, el nombre usado se mantendría como Espacios Alexandroff. En este trabajo se explora una subclase propia de estos espacios, llamados *Espacios funcionales Alexandroff* (introducidos en [10]) o simplemente *Espacios primales*, definidos a continuación.

Definición 1.1. Sea X un conjunto no vacío y $f : X \rightarrow X$ una función, y τ_f la colección de todos los conjuntos, $A \subset X$ tal que $A \in \tau_f$ si y solo si $f^{-1}(A) \subset A$. La colección τ_f es denominada topología primal sobre X y (X, τ_f) es denominado espacio primal.

Es fácil ver, gracias a las propiedades de la pre-imagen de conjuntos, que la intersección arbitraria de abiertos de un espacio primal es un conjunto abierto, haciendo de éste un espacio Alexandroff. Para $Top(X)$, el conjunto de todas las topologías sobre un conjunto no vacío X , es posible definir una topología primal τ_ψ a través de la función $\psi : Top(X) \rightarrow Top(X)$ definida como $\psi(\tau) = \bar{\tau}$, la clausura de τ en 2^X con la topología producto. En este trabajo se estudian algunas de las propiedades topológicas de este espacio. Asimismo se hace el estudio de algunas propiedades de τ_ψ vista como un semianillo.

En la última sección de este trabajo, se hace un estudio sobre el espectro primo de un semianillo. En particular, se considera un semianillo Gelfand R y el conjunto de todos los ideales primos de tal semianillo $Spec(R)$. Se considera además la función $\phi : Spec(R) \rightarrow Spec(R)$ definida como $\phi(P) = M_P$ con M_P el único ideal maximal que contiene a P . Se hace el estudio del espacio $(Spec(R), \tau_\phi)$ y su relación con el espacio $(Spec(R), \tau_z)$ con τ_z la topología Zariski sobre $Spec(R)$.

2 Preliminares

En esta sección se muestran algunos de los resultados más fundamentales sobre espacios primales. Es posible, para todo espacio primal, definir dos conjuntos elementales, sobre los cuales se pueden construir abiertos y cerrados más generales del espacio.

Definición 2.1. Sea (X, τ_f) un espacio primal y $x \in X$, entonces los siguientes conjuntos

$$Orb(x) = \{f^n(x) : n \geq 0\} \text{ y } ker(x) = \bigcup \{f^{-n}(x) : n \geq 0\}$$

son denominados la órbita y el kernel de x , respectivamente.

Los siguientes son conocidos resultados sobre los conjuntos ya definidos.

Lema 2.1. *Sea (X, τ_f) un espacio primal y $x \in X$, entonces $ker(x)$ es el mínimo abierto de X que contiene a x .*

Como resultado inmediato de este lema, se tiene que la colección de kernels de todo elemento de un espacio primal forma una base para la topología primal.

Lema 2.2. *Sea (X, τ_f) un espacio primal, entonces $\ker(x)$ es un subconjunto conexo de (X, τ_f) si x es un punto fijo.*

Demostración. Supongamos que $\ker(x) = A \cup B$ donde $A \cap B = \emptyset$, A y $B \neq \emptyset$ y además $\overline{A} \cap B = \emptyset$, $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Supongamos que $x \in A$, entonces $x \notin \overline{B}$ así $x \in \overline{B}^C$. Por lo tanto, $\ker(x) \subset \overline{B}^C$ y así $\ker(x) \cap B = \emptyset$, una contradicción. \square

Nota 2.1. En futuras secciones, se usará también la notación $\ker(x)$, para representar la mínima vecindad abierta que contiene al punto x de un espacio topológico X no necesariamente primal.

Lema 2.3. *Sea (X, τ_f) un espacio primal, entonces $\text{Orb}(x)$ es el mínimo cerrado que contiene a x .*

El siguiente resultado aparece en [9].

Lema 2.4. *Sea (X, τ) un espacio topológico y A un subconjunto de X . Si A es conexo, entonces \overline{A} es conexo.*

Lema 2.5. *Sea (X, τ_f) un espacio primal, entonces $\text{Orb}(x)$ es un subconjunto conexo de (X, τ_f) .*

Demostración. Es claro que $\{x\}$ es conexo, y como $\overline{\{x\}}$ es conexo por el lema anterior, se tiene que $\overline{\{x\}} = \text{Orb}(x)$ es conexo. \square

El siguiente resultado es mostrado en [10] en el Teorema 2.1.

Lema 2.6. *Sea (X, τ_f) un espacio primal. Dos puntos $p, q \in X$ están en la misma componente conexa si existen enteros no negativos n, m tales que $f^n(p) = f^m(q)$.*

3 Topologías primales en $\text{Top}(X)$

En esta sección se mostrarán algunos resultados sobre una topología primal definida para $\text{Top}(X)$, el conjunto de todas las topologías definidas para un conjunto no vacío X . Se muestran, antes de ello, algunas definiciones fundamentales.

Definición 3.1. Sea (X, τ_f) un espacio primal. Un punto $x \in X$ se dice punto fijo de X si $f(x) = x$. Un punto $y \in X$ se dice punto periódico de X si existe un entero $n \geq 1$ tal que $f^n(y) = y$.

Ejemplo 3.1. Sea \mathbb{R}^n y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal, entonces $0_{\mathbb{R}^n}$ es un punto fijo de \mathbb{R}^n .

Ejemplo 3.2. Sea \mathbb{N} y $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la función de Collatz, definida como:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

entonces 1, 2, 4 son puntos periódicos de \mathbb{N} que no son fijos.

Definición 3.2. Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$; denotemos por $C_\tau(A)$ a la familia de cerrados que contienen a A . Como $A \subset X$ y X es un cerrado, entonces $C_\tau(A)$ es no vacío.

Definición 3.3. Llamaremos clausura de A o adherencia de A en X al conjunto:

$$\bar{A} := \bigcap C_T(A)$$

Los elementos de la clausura de A en X , se llaman puntos adherentes a A en X o simplemente puntos adherentes a A si el espacio topológico se da por sobreentendido [4].

De manera alternativa, se usará $cl(A)$ para denotar también la clausura de A . Los siguientes son interesantes resultados mostrados por Uzcátegui y Vielma en [12].

Teorema 3.1. *Sea τ una topología sobre X , la clausura $\bar{\tau}$ de τ en 2^X (i.e. $\{0, 1\}^X$ con la topología producto y $2 = \{0, 1\}$ con la topología discreta) es una topología.*

Teorema 3.2. *Sea τ una topología sobre X . Entonces los siguientes son equivalentes:*

1. τ es una topología Alexandroff.
2. $\tau \subseteq 2^X$ es cerrada.

De esta manera, la clausura $\bar{\tau}$ de τ en 2^X es la topología Alexandroff más pequeña que contiene a τ . Sea $Top(X)$ el conjunto de todas las topologías sobre un conjunto no vacío X . Se define la función $\psi : Top(X) \rightarrow Top(X)$ de la siguiente manera:

$$\psi(\tau) = \bar{\tau}$$

donde $\bar{\tau}$ es la clausura topológica de τ en 2^X (con la topología producto). La buena definición de esta función se obtiene de la unicidad de la clausura topológica de un conjunto y por el Teorema 3.1. Esta función además, induce una topología primal τ_ψ en $Top(X)$. Denotemos además por $A(X)$ al conjunto de todas las topologías Alexandroff sobre X y $Per(Top(X))$ al conjunto de puntos periódicos de ψ en $Top(X)$.

El siguiente resultado fue mostrado por Echi en [5].

Lema 3.1. *Sea (X, τ) un espacio primal, entonces X es T_0 si y solo si el conjunto de puntos periódicos es igual al conjunto de puntos fijos de X .*

Teorema 3.3. *$(Top(X), \tau_\psi)$ es un espacio T_0 .*

Demostración. Es claro que todo punto fijo es un punto periódico. Se verá que en $(Top(X), \tau_\psi)$ además, todo punto periódico corresponde a un punto fijo. Si $\tau \in Top(X)$ y es Alexandroff, entonces por el Teorema 3.2 se tiene que $\psi(\tau) = \tau$ por lo que τ es un punto periódico. Por lo tanto $A(X)$ es un conjunto de puntos periódicos. Asumamos que existe un punto $\tau \in Top(X)$ tal que $\min\{n \in \mathbb{N} : \psi^n(\tau) = \tau\} \geq 2$, es decir, τ es un punto periódico no fijo. Es evidente que, debido a que $\psi(\tau) = \bar{\tau} \neq \tau$ entonces τ no es Alexandroff. Además, por ser periódico, existe $\tau_p = \psi^{-1}(\tau) \in Top(X)$ por lo que τ es la imagen por ψ de una topología, y por el Teorema 3.2 se tiene que τ es Alexandroff, una contradicción. De esta manera, no pueden existir puntos periódicos no fijos. \square

El siguiente es un resultado mostrado por Echi en [5].

Lema 3.2. *Sea (X, τ_f) un espacio primal. Entonces las siguientes son equivalentes:*

1. (X, τ_f) es un espacio T_1

2. (X, τ_f) es un espacio T_2

3. $f = id_X$

Teorema 3.4. $(Top(X), \tau_\psi)$ es un espacio T_1 si y solo si X es finito.

Demostración. Si asumimos que X no es finito entonces la topología del complemento finito $\rho \in Top(X)$ es una topología no Alexandroff T_1 . Por el Teorema 3.2 se tiene que $\bar{\rho}$ es una topología Alexandroff tal que $ker(\bar{\rho}) = \{\bar{\rho}, \rho\}$ con $\rho \neq \bar{\rho}$, por lo que $\psi \neq id_{Top(X)}$ y por el Lema 3.2 se tiene que $(Top(X), \tau_\psi)$ no puede ser T_1 .

Por otro lado, si asumimos que X es finito, entonces toda topología τ definida en X es Alexandroff. Por lo tanto $Orb(\tau) = \{\tau\} = ker(\tau)$ y así τ_ψ es discreta por lo que $Top(X)$ es T_1 . \square

Definición 3.4. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se denotará por τ^* a la cotopología sobre X , el conjunto formado por los subconjuntos cerrados de (X, τ) .

Definición 3.5. Un subconjunto A de un espacio topológico (X, τ) es denso en X si para cada $x \in X$, toda vecindad U de x intersecta a A .

Teorema 3.5. Sea X un conjunto no vacío. El conjunto $A(X)$ es denso en $(Top(X), \tau_\psi^*)$ pero no es denso en $(Top(X), \tau_\psi)$.

Demostración. Se prueba que $A(X)$ no es denso en $(Top(X), \tau_\psi)$ mostrando que existe un elemento de $Top(X)$, y una vecindad abierta en τ_ψ de tal punto, que no intersecta a $A(X)$. Si τ no es Alexandroff, entonces $ker(\tau) = \{\tau\}$, por lo que $ker(\tau) \cap A(X) = \emptyset$ y así $A(X)$ no es τ_ψ denso. Por otro lado, si τ no es Alexandroff, entonces $Orb(\tau) = \{\tau, \bar{\tau}\}$ por lo que $Orb(\tau) \cap A(X) \neq \emptyset$, y por ser $Orb(\tau)$ el mínimo abierto de τ en τ_ψ^* se tiene que toda vecindad abierta de $\tau \in (Top(X), \tau_\psi^*)$ intersecta $A(X)$, y así $A(X)$ es τ_ψ^* denso. \square

Ejemplo 3.3. Sea X un conjunto infinito. La topología del complemento finito $\rho \in Top(X)$ es una topología no Alexandroff, por lo que $\bar{\rho}$ es una topología Alexandroff tal que $ker(\bar{\rho}) = \{\bar{\rho}, \rho\}$ con $\rho \neq \bar{\rho}$. Así, ρ es un elemento de $Top(X)$ con una vecindad abierta $ker(\rho) = \{\rho\}$ que no intersecta a $A(X)$, por lo que $A(X)$ no es denso en $(Top(X), \tau_\psi)$.

Teorema 3.6. $(Top(X), \tau_\psi)$ es compacto si y solo si X es finito

Demostración. Si X es finito, $Top(X)$ es finito y entonces compacto. Si $(Top(X), \tau_\psi)$ es compacto entonces $A(X) = Per(Top(X))$ es un conjunto finito y además para todo $\tau \notin A(X)$ se cumple que $\bar{\tau}$ es periódico y además $\bar{\tau} \in A(X)$ y $ker(\tau) = \{\tau\}$. Por lo tanto $Top(X) = \bigcup_{\tau \in A(X)} ker(\tau)$ es un conjunto finito y entonces X es finito \square

Lema 3.3. $A(X)$ es un conjunto cerrado de $(Top(x), \tau_\psi)$.

Demostración. Sea $\tau \in A(X)$, entonces $Orb(\tau) = \{\tau\}$. Por lo tanto, $A(X) = \bigcup_{\tau \in A(X)} \{\tau\}$ y así $A(X)$ es cerrado. \square

Definición 3.6. Un espacio topológico se dice que es $T_{\frac{1}{2}}$ si cada conjunto unitario o es abierto o es cerrado [11].

Teorema 3.7. $(Top(X), \tau_\psi)$ es un espacio $T_{\frac{1}{2}}$

Demostración. Sea $\tau \in Top(x)$. Si τ es Alexandroff, entonces por el Teorema 3.2, se tiene que $\tau \subseteq 2^X$ es cerrada y $Orb(\tau) = \{\tau\}$. Si τ no es Alexandroff, entonces por los Teoremas 3.2 y 3.1, se tiene que $ker(\tau) = \{\tau\}$ por lo tanto $\{\tau\} \in \tau_\psi$. \square

Definición 3.7. Una propiedad se dice que es teórica en el orden si por cada espacio topológico (X, τ) que satisface P también se cumple que $(X, \bar{\tau})$ satisface P y viceversa (Un ejemplo está dado en el Lema 3.4).

Teorema 3.8. Una propiedad P es teórica en el orden si y solo si $\delta = \{\tau \in Top(X) : (X, \tau) \text{ satisface la propiedad P}\}$ es un subconjunto cerrado de $(Top(X), \tau_\psi)$

Demostración. Sea $\tau \in \delta$ y P una propiedad teórica en el orden, entonces $\psi(\tau) = \bar{\tau} \in \delta$. Por lo tanto $\psi(\delta) \subseteq \delta$ y δ es cerrado. Por otro lado, si δ es cerrado, entonces $\psi(\tau) = \bar{\tau} \in \delta$ para todo $\tau \in \delta$. Por lo tanto $(X, \bar{\tau})$ satisface la propiedad P y P es teórica en el orden. \square

El siguiente resultado es mostrado por Uzcátegui y Vielma en [12]

Lema 3.4. Sea τ una topología sobre X, entonces:

- τ es T_0 si y solo si $\bar{\tau}$ es T_0
- τ es T_1 si y solo si $\bar{\tau}$ es denso en 2^X .

Definición 3.8. Un espacio topológico (X, τ) se dice que satisface el axioma de separación $T_{1/4}$ si $\{x\}$ es cerrado o $\{x\} = \bigcap_{A \in \tau} A$ para todo $x \in X$ [3].

Corolario 3.1. Los subconjuntos de $Top(X)$: $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_{1/4}$, donde $\sigma_i = \{\tau \in Top(X) : (X, \tau) \text{ es } T_i\}$ son cerrados en $(Top(X), \tau_\psi)$.

Teorema 3.9. El conjunto $\sigma_1 = \{\tau \in Top(x) : (X, \tau) \text{ es } T_1\}$ es un subconjunto conexo de $Top(X)$ y es la componente conexa de cada uno de sus puntos.

Demostración. Sea $\tau \in \sigma_1$, entonces por el Teorema 3.2 y el Lema 3.4 se tiene que $\bar{\tau}$ es la topología discreta τ_d . Por lo tanto, $Orb(\tau) = \{\tau, \tau_d\}$ para todo $\tau \in \sigma_1$. Entonces $ker(\tau_d) = \sigma_1$ y por el Lema 2.2, se tiene que σ_1 es conexo. \square

Teorema 3.10. El conjunto $\sigma_1 = \{\tau \in Top(x) : (X, \tau) \text{ es } T_1\}$ es un subconjunto compacto de $(Top(X), \tau_\psi)$

Demostración. Sea β una colección de subconjuntos abiertos de $Top(X)$ que cubre σ_1 . Existe al menos un $A \in \beta$ tal que $\tau_d \in A$. Entonces $ker(\tau_d) \subset A$ pero $ker(\tau_d) = \sigma_1$, con lo cual $\sigma_1 \subset A$ y el conjunto formado únicamente por A es un subcubrimiento finito de β y por lo tanto σ_1 es compacto. \square

La siguiente definición es dada por Barría et al. en [2].

Definición 3.9. Un semianillo es una estructura algebraica $(R, +, \cdot, 0, 1)$ donde R es un conjunto con 0 y 1 elementos de $R, y + y \cdot$ son operaciones binarias internas sobre R llamadas suma y multiplicación respectivamente que satisfacen lo siguiente:

1. $(R, +, 0)$ es un monoide conmutativo con elemento de identidad 0.
2. $(R, \cdot, 1)$ es un monoide con elemento de identidad 1.

3. La multiplicación es distributiva respecto a la adición.
4. 0 es el elemento absorbente de la multiplicación.

Teorema 3.11. *Sea $\tau \in Top(x)$ y $\phi(\tau) = \{A \in \tau_\psi : \tau \notin A\}$, entonces $\phi(\tau)$ es un ideal maximal si y solo si τ es una topología Alexandroff.*

Demostración. Asumamos que τ no es Alexandroff. Por el Teorema 3.2, se tiene que $\ker(\tau) = \{\tau\}$. Además, puesto que $\tau \in \ker(\tau)$ y $\tau \in \ker(\bar{\tau})$ se tiene que $\ker(\tau)$ y $\ker(\bar{\tau}) \notin \phi(\tau)$. Entonces $I = \phi(\tau) \cup \ker(\tau)$ es un ideal propio de τ_ψ que contiene propiamente a $\phi(\tau)$, y $\phi(\tau)$ no puede ser maximal.

Por otro lado, si $\phi(\tau)$ no es maximal, entonces existe un ideal I de τ_ψ tal que $\phi(\tau) \subset I$. Entonces existe $A \in I$ tal que $A \notin \phi(\tau)$, y $\tau \in A$. Como τ es Alexandroff, por el Teorema 3.2, se tiene que $\text{cl}(\tau) = \{\tau\}$ por lo que $\text{Top}(X) \setminus \{\tau\}$ es un abierto que pertenece a $\phi(\tau)$. Por lo tanto $(\text{Top}(X) \setminus \{\tau\}) \cup A = \text{Top}(X) \in I$, y $\tau_\psi = I$. De aquí que $\phi(\tau)$ es un ideal maximal de τ_ψ . \square

Los siguientes resultados son mostrados por Barria en [2].

Lema 3.5. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Todo ideal finitamente generado de τ es un ideal principal.*

Lema 3.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si I es un ideal de τ , entonces $I \subset \langle \bigcup\{a : a \in I\} \rangle$.*

Se tiene entonces el siguiente resultado.

Teorema 3.12. *Todo ideal maximal M de τ_ψ tal que $\bigcup\{A : A \in M\} \neq \text{Top}(X)$ es un ideal principal.*

Demostración. Si $\bigcup\{A : A \in M\} \neq \text{Top}(X)$, entonces $\langle \bigcup\{A : A \in M\} \rangle \neq \tau_\psi$. Por el Lema 3.6, se tiene que $M \subset \langle \bigcup\{A : A \in M\} \rangle$ y puesto que M es maximal, entonces se tiene $M = \langle \bigcup\{A : A \in M\} \rangle$. \square

4 Topologías primales en el espectro primo de un semianillo

En esta sección se estudian algunas de las propiedades de una topología primal definida para $\text{Spec}(R)$ con R un semianillo Gelfand. Se estudian además la relación de las propiedades de este espacio con aquellas del espacio $(\text{Spec}(R), \tau_z)$ con τ_z la topología Zariski. La siguiente definición es mostrada en [2].

Definición 4.1. Sea R un semianillo con identidad no nula. Denotemos por $\text{Spec}(R)$ al conjunto de los ideales primos de R . Se define la topología de Zariski τ_z en $\text{Spec}(R)$ como aquella cuyos cerrados son de la forma:

$$(I)_z = \{P \in \text{Spec}(R) : I \subseteq P, I \text{ es un ideal de } R\}$$

En [2] se muestran los cuatro siguientes resultados.

Lema 4.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces para todo $x \in X$ se tiene:*

1. $\ker_{\bar{\tau}}(x)$ es el menor $\bar{\tau}$ -abierto que contiene a x .

2. $cl_\tau(\{x\}) = cl_{\bar{\tau}}(\{x\})$
3. $ker_\tau(x) = ker_{\bar{\tau}}(x)$

Corolario 4.1. *Considérese los espacios $(Spec(R), \tau_z)$ y $(Spec(R), \bar{\tau}_z)$, y $P \in Spec(R)$, entonces:*

1. $(P)_z = cl_{\tau_z}(\{P\}) = cl_{\bar{\tau}_z}(\{P\})$
2. $ker_{\tau_z}(\{P\}) = ker_{\bar{\tau}_z}(\{P\})$

Lema 4.2. *Considere el espacio $(Spec(R), \tau_z)$. Si $M \in Max(R)$, entonces $P \in ker_{\tau_z}(M)$ si y solo si $P \subseteq M$.*

Definición 4.2. Sea R un semianillo con identidad no nula y $Spec(R)$ el conjunto de los ideales primos de R . Se dice que R es Gelfand si cada ideal primo está contenido en un único ideal maximal. Se dice semilocal si tiene una cantidad finita de ideales maximales y se dice local si tiene un solo ideal maximal.

Teorema 4.1. *Un semianillo R es Gelfand si y solo si para todo $M \in Max(R)$, $ker(M)$ es $\bar{\tau}_z$ clopen.*

Demostración. Sean $P \in ker(M)$ y $Q \in (P)_z$. Por el Lema 4.2, se tiene $P \subseteq M$. Como $P \subseteq Q$ y R es un semianillo Gelfand, si M_Q es el único ideal maximal que contiene a Q , entonces $M_Q = M$. Puesto que $Q \subseteq M$, por el Lema 4.2, $Q \in ker(M)$. Luego, $(P)_z \subseteq ker(M)$ y así $\bigcup\{(P)_z : P \in ker(M)\} = ker(M)$. Por el Corolario 4.1, $ker(M)$ es $\bar{\tau}_z$ cerrado.

Por otro lado, sean P un ideal primo y M_1, M_2 ideales maximales que contienen a P . Por el Lema 4.2, $P \in ker(M_1)$ y $P \in ker(M_2)$. Por el Corolario 4.1 e hipótesis, $(P)_z = cl_{\bar{\tau}_z}(P) \subseteq ker(M_2)$. Además, como $M_1 \in (P)_z$, por el Lema 4.2, $M_1 \in ker(M_2)$, por lo que $M_1 = M_2$. Por lo tanto, R es un semianillo Gelfand. \square

Consideremos a R como un semianillo Gelfand y $\phi : Spec(R) \rightarrow Spec(R)$ definida como

$$\phi(P) = M_p$$

donde M_p es el único ideal maximal que contiene a P . Esta función induce una topología primal τ_ϕ en $Spec(R)$.

Lema 4.3. *Sea $Max(R)$ el conjunto de los ideales maximales de R , entonces $\{ker(M) : M \in Max(R)\}$ es un cubrimiento de $\bar{\tau}_z$ abierto de $Spec(R)$.*

Demostración. Por el Lema 4.1, se tiene que $ker(M)$ es $\bar{\tau}_z$ abierto para todo $M \in Max(R)$. Sea $P \in Spec(R)$, por ser R un semianillo Gelfand, entonces existe un único ideal maximal M que contiene a P , además $P \in ker(M)$. Es claro entonces que la colección $\{ker(M) : M \in Max(R)\}$ es un cubrimiento de $\bar{\tau}_z$ abierto de $Spec(R)$. \square

Teorema 4.2. *Sea R un semianillo Gelfand no vacío, entonces los siguientes son equivalentes:*

1. $(Spec(R), \tau_\phi)$ es compacto
2. R es semilocal
3. $(Spec(R), \bar{\tau}_z)$ compacto

Demostración. (1 \rightarrow 2) Sea $\{M_\alpha\}$ una colección de ideales maximales de R . Por ser R un semianillo Gelfand, entonces cada ideal primo P de R está contenido en algún M_α y así $Spec(R) = \bigcup_{M_\alpha \in Spec(R)} ker(M_\alpha)$. Si $(Spec(R), \tau_\phi)$ es compacto, entonces existe una subcolección finita $\{M_n\}$ tal que $Spec(R) = \bigcup_{M_n \in Spec(R)} ker(M_n)$. Es claro entonces que R contiene una cantidad finita de ideales maximales y así es semilocal.

(2 \rightarrow 1) Sea $\{A_\alpha\}$ una colección de abiertos de $(Spec(R), \tau_\phi)$ tales que $Spec(R) = \bigcup_{A_\alpha \in Spec(R)} A_\alpha$. Dado que cada abierto A_α puede ser escrito como $A_\alpha = \bigcup_{M_i \in A_\alpha} ker(M_i)$ con M_i los ideales maximales de R en A_α entonces $Spec(R) = \bigcup_{M_j \in Spec(R)} ker(M_j)$. Dado que R es semilocal, entonces existe una colección finita $\{M_n\}$ de ideales maximales de R y entonces $Spec(R) = \bigcup_{M_n \in Spec(R)} ker(M_n)$, donde $M_n \in A_{\alpha_n}$ y así $(Spec(R), \tau_\phi)$ es compacto.

(2 \rightarrow 3) Si R es semilocal, entonces R tiene una cantidad finita de ideales maximales M_i con $i = 1, 2, \dots, n$. Sea $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ un cubrimiento de $\bar{\tau}_z$ abiertos de $Spec(R)$. Para todo $M_i \in Spec(R)$ existe α_i tal que $M_i \in U_{\alpha_i}$, y de aquí $ker(M_i) \subseteq U_{\alpha_i}$. Por el Lema 4.3 se tiene que $\{ker(M_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$ es un cubrimiento finito de $Spec(R)$ y así $(Spec(R), \bar{\tau}_z)$ es compacto.

(3 \rightarrow 2) De la demostración de la implicación anterior y del Lema 4.3 se deduce fácilmente. \square

Teorema 4.3. *Sea R un semianillo Gelfand no vacío, entonces los siguientes son equivalentes:*

1. $(Spec(R), \tau_\phi)$ es conexo
2. R es local
3. $(Spec(R), \bar{\tau}_z)$ conexo

Demostración. (1 \rightarrow 2) Si R no es local, entonces existen al menos dos ideales maximales M_1, M_2 de R . Dado que R es un semianillo Gelfand entonces $ker(M_1) \cap ker(M_2) = \emptyset$ y $ker(M_1) \cup ker(M_2) = Spec(R)$ y así $(Spec(R), \tau_\phi)$ no es conexo.

(2 \rightarrow 1) Si R es local, entonces existe un único ideal maximal M de R y para todo ideal primo P de R se tiene $\phi(P) = M$ y así $(Spec(R), \tau_\phi)$ es conexo.

(2 \rightarrow 3) Sean U un $\bar{\tau}_z$ clopen, M el único ideal maximal de R y $P \in Spec(R)$. Si $P \in U$, entonces por el Corolario 4.1 se tiene que $(P)_z = cl_{\bar{\tau}_z}(P) \subseteq U$. Por tanto, $M \in U$, por lo que $ker(M) \subseteq U$. Por el Lema 4.3 se tiene que $ker(M) = Spec(R)$, por lo que $U = Spec(R)$.

(3 \rightarrow 2) Sea M un ideal maximal de R . Por el Teorema 4.1 se tiene que $ker(M)$ es $\bar{\tau}_z$ clopen, y dado que $ker(M) \neq \emptyset$ se sigue que $Spec(R) = ker(M)$. Además, si M_0 es un ideal maximal de R , entonces $M_0 \in ker(M)$ y por el Lema 4.2 se tiene $M_0 \subseteq M$, y de aquí que M es el único ideal maximal de R . \square

Teorema 4.4. *Sea R un semianillo Gelfand no vacío y $P \in Spec(R)$, entonces los siguientes son equivalentes:*

1. $\{P\}$ es τ_z cerrado
2. $\{P\}$ es τ_ϕ cerrado
3. P es un ideal maximal

Demostración. (1 \rightarrow 2) Si $\{P\}$ es τ_z cerrado, entonces P es el único ideal primo que contiene a I , un ideal de R . Además, si $\phi(P) \neq P$ entonces existe un ideal $M \in Spec(R)$ tal que $M \in Orb(P)$ y $P \subsetneq M$. De esta manera $I \subset P \subsetneq M$, una contradicción.

(2 \rightarrow 3) Si $\{P\}$ es τ_ϕ cerrado, entonces $\phi(P) = P$ y por la definición de la función ϕ se tiene que P es maximal.

(3 \rightarrow 1) Como P es maximal, entonces el único ideal primo de R que contiene a P es sí mismo. De esta manera $\{P\}$ es τ_z cerrado. \square

Teorema 4.5. *Max(R) es un subconjunto cerrado y además es τ_ϕ^* denso*


Demostración. Del Teorema 4.4, se tiene que si P es maximal entonces $\{P\}$ es τ_ϕ cerrado, es decir $\phi(P) = P$. Por lo tanto $\phi(\text{Max}(R)) = \text{Max}(R)$ y así $\text{Max}(R)$ es τ_ϕ cerrado. Además, si $P \in \text{Spec}(R)$ tal que $P \notin \text{Max}(R)$ se tiene que $\phi(P) = M_P \in \text{Max}(R)$ con M_P el único ideal maximal que contiene a P . Por lo tanto $\text{Orb}(P) \cap \text{Max}(R) \neq \emptyset$ y así $\text{Max}(R)$ es τ_ϕ^* denso. \square

Agradecimientos

Se agradece al Magíster Carlos García Mendoza por la guía brindada en la preparación y edición del artículo.

Referencias

- [1] Alexandroff, P. *Diskrete Raume*, Recueil Mathématique, **2**(24) (1937), 501 - 5019.
- [2] Barría, S. *Propiedades de las topologías vistas como semianillos*, Tesis de Maestría, Universidad de Concepción, 2016.
- [3] Colasante, M., Uzcátegui, C., and Vielma, J. *Low separation axioms via the diagonal*, Applied General Topology, **9**(1) (2008), 39 - 50.
- [4] Croom, F. *Principles of Topology*, Dover Publications, 2016.
- [5] Echi, O. *The categories of flows of Set and Top*, Topology and its Applications, **159**(9) (2012), 2357 - 2366.
- [6] Herman, G. *On topology as applied to image analysis*, Computer Vision, Graphics, and Image Processing, **52**(3) (1990), 409-415.
- [7] Johnstone, S. *Stone Spaces*, Cambridge University Press, 1982.
- [8] McCord, M. *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces*, Duke Mathematical Journal, **33**(3) (1966), 465-474.
- [9] Munkres, J. *Topology*, Prentice Hall, 2000.
- [10] Shirazi, F. and Golestani, N. *Functional Alexandroff Spaces*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, **40**(4) (2011), 515 - 522.
- [11] Subha, E. and Nagaveni, N. *Strong separation axioms of $T_{1/2}$ -spaces*, International Journal of Mathematical Analysis, **8**(33) (2014), 1723-1732.
- [12] Uzcátegui, C. and Vielma, J. *Alexandroff topologies viewed as closed sets in the Cantor cube*, Divulgaciones Matemáticas, **13**(1) (2005), 45 - 53.

Divulgaciones Matemáticas Vol. 23-24, No. 1-2 (2022-2023), pp. 54–63
<https://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones/>
DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.11540082>
 (CC BY-NC-SA 4.0)

©Autor(es)
e-ISSN 2731-2437
p-ISSN 1315-2068

Grafo divisor de cero de $\mathbb{Z}_{2^r q^s}$

Zero divisor graph of $\mathbb{Z}_{2^r q^s}$

Juan M. Otero Acosta (jmotero746@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-8245-9803>

Departamento de Informática
Universidad Clodosbaldo Russián
Cumaná, República Bolivariana de Venezuela.

Daniel Brito (danieljosb@gmail.com)

Departamento de Matemática
Universidad de Oriente
Cumaná, República Bolivariana de Venezuela.

Tobías Rosas Soto (tjrosas@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8085-5011>

Departamento de Matemática
Facultad Experimental de Ciencias
Universidad del Zulia
Maracaibo, Estado Zulia
República Bolivariana de Venezuela.

Resumen

Este artículo se continua el estudio de los grafos divisores de cero, presentado en 1988 por Istan Beck [2]. Allí se define un grafo divisor de cero como un grafo cuyos vértices son los elementos del conjunto de divisores de cero de un anillo, donde dos vértices distintos x e y son adyacentes si y solo si $x \cdot y = 0$. En este trabajo, se presenta una nueva forma de calcular el grafo divisor de cero del anillo $\mathbb{Z}_{2^r q^s}$ para q primo impar, con r y s enteros positivos mayores que 2, además se da el ejemplo del grafo divisor de cero del anillo \mathbb{Z}_{36} .

Palabras y frases clave: Anillos, conjunto divisor de cero, grafo divisor de cero.

Abstract

This article continues the study of zero divisor graphs, presented in 1988 by Istan Beck [2]. There, a zero divisor graph is defined as a graph whose vertices are the elements of the set of zero divisors of a ring, where two distinct vertices x and y are adjacent if and only if $x \cdot y = 0$. In this work, we present a new way to calculate the zero divisor graph of the ring $\mathbb{Z}_{2^r q^s}$ for q an odd prime, with r and s positive integers greater than 2, and the example of the zero divisor graph of the ring \mathbb{Z}_{36} is also given.

Key words and phrases: Rings, zero divisor set, zero dividers graph.

Recibido 15/02/2023. Revisado 21/04/2023. Aceptado 15/04/2024.
MSC (2010): Primary 05C85; Secondary 13M05.
Autor de correspondencia: Juan Otero Acosta

1 Introducción

Harary en 1972, define a un grafo G como un par ordenado $G = (V, E)$ donde: V es un conjunto vértices o nodos; y E es un conjunto de aristas o arcos, que relacionan a estos nodos. Los grafos permiten representar relaciones binarias entre elementos de un conjunto. Además, si R es un anillo conmutativo con identidad, entonces $\Omega(R)$ representa el conjunto de los divisores de cero de R . El estudio de los llamados grafos divisores de cero, originados por Beck [2], en su artículo “Coloring of commutative ring”, es cada día más necesario por su articulación con otras ramas de la investigación matemática. En 1988, Beck define los grafos divisores de cero de la siguiente manera: asociando un grafo simple a un anillo conmutativo R , donde los vértices son los elementos del anillo y la adyacencia (aristas) entre los vértices se obtiene a través de los divisores de cero, es decir, dos vértices distintos x e y son adyacencia si y solo si $x \cdot y = 0$.

El objetivo en el artículo de Beck, era estudiar la coloración de los anillos conmutativos, con la idea de establecer una relación entre la teoría de grafo y la teoría de anillos conmutativo. En 1999, Andersen y Livistong [1], publican el artículo “The zero divisor graph of a commutative ring” y es en éste donde se estudian las propiedades y estructuras de los grafos divisores de cero, los cuales también se estudian en el presente trabajo, y se denotan por $\Gamma(R)$, donde R es un anillo conmutativo.

En [7] se dan algunas representaciones y caracterizaciones de los grafos divisores de cero, para los anillos conmutativos de la forma $\mathbb{Z}_{p^n q}$. En [3], se introduce la definición de conjuntos r -partitos, definición clave para la representación de los grafos divisores de cero. Así como también algunas caracterizaciones, el diámetro y el número de clique para estos grafos.

Los aportes de este trabajo son:

- i.- Trabajar con las estructuras algebraicas de los anillos conmutativos de la forma $\mathbb{Z}_{2^r q^s}$, para q primos distintos, r y s entero positivos mayores que 2.
- ii.- Estudiar las representaciones de los grafos divisores de cero sobre $\mathbb{Z}_{2^r q^s}$, que se obtendrán para cada caso, así como su caracterizaciones, el diámetro, número de clique.
- iii.- Dar un método para la elaboración de un algoritmo donde se puedan representar estos grafos para las estructuras algebraicas antes mencionadas.

2 Conjuntos divisores de cero

En esta sección se presentan un resumen de definiciones y resultados relacionados con los conjuntos divisores de cero.

Definición 2.1 (Divisor de cero). Sea R un anillo, un elemento $x \in R$, se llama divisor de cero, si existe $y \in R$, distinto de cero, tal que $x \cdot y = 0$.

Nota 2.1. Se trabajará muy a menudo con el anillo conmutativo $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}$, el cual no es más que el conjunto de las clases módulo n . En lo que continúa de escritura, se suprimirá las barras para denotar al mismo anillo \mathbb{Z}_n , en caso contrario se informará.

Definición 2.2 (Conjunto divisor de cero). Dado un anillo R , el conjunto divisor de cero de R , denotado por $\Omega(R)$, es el conjunto para el cual, cada vez que se elija un elemento $x \in \Omega(R)$, no nulo, existe otro elemento no nulo $y \in \Omega(R)$, tal que $x \cdot y = 0$.

Ejemplo 2.1. Sea el anillo conmutativo siguiente $\mathbb{Z}_{36} = \mathbb{Z}_{2^2 3^2} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 35\}$. Su conjunto divisor de cero es:

$$\Omega(\mathbb{Z}_{36}) = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34\}.$$

Nota 2.2. Otra manera de ver $\Omega(\mathbb{Z}_{36})$, son los elementos no primos relativos con 36.

Otros anillos a los cuales también se les calcula su conjunto divisor de cero son los siguientes:

Ejemplo 2.2. Sea el anillo conmutativo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$. Su conjunto divisor de cero es: $\Omega(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Puesto que:

$$\begin{aligned}(1, 0) \times (0, 1) &= (0, 0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ (1, 0) \times (1, 1) &= (1, 0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ (0, 1) \times (1, 1) &= (0, 1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3. Sea el anillo

$$R = \frac{\mathbb{Z}_3[x]}{x^2} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, x, x + \bar{1}, x + \bar{2}, \bar{2}x, \bar{2}x + \bar{1}, \bar{2}x + \bar{2}\}.$$

Su conjunto divisor de cero es: $\Omega(\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{x^2}) = \{x, \bar{2}x\}$. Puesto que:

$$x \cdot \bar{2}x = \bar{2}x^2 = \bar{2} \cdot \bar{0} = \bar{0}$$

n	Descomposición $p^r q^s$	$ \Omega(\mathbb{Z}_n) $
36	$2^2 3^2$	23
72	$2^3 3^2$	47
100	$2^2 5^2$	59
108	$2^2 3^3$	71
144	$2^4 3^2$	95
196	$2^2 7^2$	111
200	$2^3 5^2$	119
300	$2^2 5^3$	219
392	$2^3 7^2$	223

Cuadro 1: Tabla con la cardinalidad algunos $\Omega(\mathbb{Z}_{2^r q^s})$

Los siguientes son resultados relacionados con los conjuntos divisores de cero. En [6], aparecen los siguientes corolarios

Corolario 2.1. El anillo \mathbb{Z}_p no tiene divisores de cero si y solo si p es primo.

Corolario 2.2. Un anillo no tiene divisores de cero si y solo si se cumple la ley cancelativa del producto para todo elemento no nulo del anillo.

Seguidamente en [4], se presenta el siguiente resultado:

Proposición 2.1. Sea R un anillo conmutativo finito, entonces cada elemento de R es invertible o divisor de cero.

Demostración. Sea $a \in R$. Si $a \in \Omega(R)$, esto significa que a es un divisor de cero. Por otro lado, si a no pertenece a $\Omega(R)$, entonces $a \neq 0$ y para todo $b \in R - \{0\}$, se tiene que $a \cdot b \neq 0$. Como R es finito, supóngase que R tiene n elementos y hágase $R = \{0, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. Luego, multiplicando cada elemento de R por a se obtiene $a \cdot 0 = 0$ y $a \cdot a_i \neq 0$, para $2 \leq i \leq n$. Si $i \neq j$, $a \cdot a_i \neq a \cdot a_j$, pues en caso contrario $a(a_i - a_j) = 0$, lo que diría que $a \in \Omega(R)$ lo que es una contradicción. Como R es un anillo conmutativo, entonces $1 \in R$ y por ser R finito debe existir $a_k \in R$, con $2 \leq k \leq n$, tal que $a \cdot a_k = 1$ de manera que a es invertible. \square

El siguiente teorema dado en [4], es fundamental para futuras investigaciones conectadas por los grafos divisores de cero y anillos de polinomios.

Teorema 2.1 (Teorema de McCoy). *Sea R un anillo. Un polinomio $f \in R[x]$ es un divisor de cero si y solo si, existe $r \in R$ tal que $r \cdot f = 0$.*

3 Grafo divisor de cero

En esta sección, se presenta una definición de grafo divisor de cero entre las muchas que existen, y algunos resultados relacionados con los mismos. En este apartado los anillos de trabajo se consideran conmutativos y con identidad. A continuación se presentan las definiciones más elementales que sustentan el trabajo.

Definición 3.1. Un grafo es un par de conjuntos $G = (V, E)$, donde V es un conjunto no vacío de elementos llamados *vértices, nodos o puntos* y E es un conjunto formado por pares, no ordenados, de elementos de V llamados *lados, aristas o líneas*. A los conjuntos V y E también se les suele denotar por $V(G)$ y $E(G)$, respectivamente.

La siguiente definición de conjunto r -partitos es bueno conocerla puesto que es crucial en la construcción de los grafos divisores de cero, aquí propuestos.

Definición 3.2. Un grafo $G = (V, E)$ se dice k -partito si sus vértices están o pueden ser particionados en k diferentes *conjuntos independientes*. Lo que se traduce diciendo que: existen conjuntos W_1, W_2, \dots, W_r , tales que cumplen las siguientes condiciones:

1. $W_i \neq \emptyset, \forall i = 1, 2, \dots, r$.
2. $W_i \cap W_j = \emptyset \forall i, j = 1, 2, \dots, r$, con $i \neq j$.
3. $\bigcup_{i=1}^r W_i = V$
4. Si $v, w \in W_i$ entonces $(v, w) \notin E$, para todo $i = 1, \dots, r$.

Definición 3.3. Sea R un anillo conmutativo, el grafo divisor de cero de R , el cual se denotará por $\Gamma(R)$, se define por:

$$\Gamma(R) = (V(\Gamma(R)), E(\Gamma(R)))$$

donde $V(\Gamma(R))$: es el conjunto formado por los elementos del conjunto divisor de cero de R , es decir,

$$\Omega(R) = V(\Gamma(R))$$

y

$$E(\Gamma(R)) = \{(x, y) : x, y \in V(\Gamma(R)), x \cdot y = 0, x \neq y\}$$

4 Clique, diámetro y girth de $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$

A los grafos divisores de cero también se le asocian el clique, diámetro y girth, como se verá a continuación.

Definición 4.1. Un grafo simple $G = (V, E)$ es *completo*, si cada uno de los vértices es adyacente a los restantes vértices del grafo G , el grafo completo de orden n es denotado por K_n .

Definición 4.2. Todo subgrafo K_r de $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ es llamado un *clique* de orden r .

Definición 4.3. El *número de clique* de $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$, denotado por $\omega(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$, es el mayor entero $r \geq 1$, tal que $K_r \subset \Gamma(\mathbb{Z}_n)$

Definición 4.4. La *distancia* entre un par de vértices de un grafo G , es la longitud del camino más corto entre ellos. Si no existe tal camino se dice que la distancia es infinita.

Definición 4.5. El *diámetro* del $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$, es la mayor distancia entre cualquiera dos vértices distintos. Tal distancia se denotará por $\Delta(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$

Un resultado importante que aparece en [2], en el cálculo del diámetro en $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^r q^s})$ es el siguiente:

Teorema 4.1. *Si p y q son primos distintos, r y s enteros positivos mayores que 2. Entonces $\Delta(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^r q^s})) = 3$*

Definición 4.6. Un *ciclo* de $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$, es un camino cerrado en el cual no se repite ningún vértice, salvo el vértice inicial. Un ciclo de orden n de $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ se denotará por C_n , donde n es el número de vértices.

Definición 4.7. El *girth* de $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$, es la longitud del ciclo más corto. El girth de $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$, se denotará por $\Phi(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$

Ejemplo 4.1. *Sea el grafo divisor de cero del anillo \mathbb{Z}_{36} , esto es $\Gamma(\mathbb{Z}_{36})$, entonces $\omega(\Gamma(\mathbb{Z}_{36})) = 5$ como se puede ver en el subgrafo de $\Gamma(\mathbb{Z}_{36})$, coloreado de azul en la Figura 1. De igual forma $\Delta(\Gamma(\mathbb{Z}_{36})) = 3$ como se puede ver, como ejemplo, el subgrafo coloreado de rojo de $\Gamma(\mathbb{Z}_{36})$, en la Figura 1. Por último, $\Phi(\Gamma(\mathbb{Z}_{36})) = 3$ como se puede observar en el subgrafo K_3 de $\Gamma(\mathbb{Z}_{36})$ con dos aristas coloreadas de verde y una de azul en la Figura 1.*

Ejemplo 4.2. *Para el grafo $\Gamma(\mathbb{Z}_{72}) = \Gamma(\mathbb{Z}_{2^3 3^2})$. Este caso todos los subgrafos completos no-isomorfos para $\Gamma(= \mathbb{Z}_{2^3 3^2})$ son K_2 y K_3 . Por lo tanto $\omega(\Gamma(= \mathbb{Z}_{72})) = 3$*

5 Método de Representación

En esta sección se da un nuevo método para representar los $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^r q^s})$, basado en la teoría de anillos, conjunto divisor de cero y conjuntos r -partitos. Es oportuno resaltar, que ya existen una gran cantidad de métodos en este estilo, por ejemplo en [8], se presenta un método que articula la teoría de órbitas con las constantes baricéntricas y en [5], se da un método matricial que relaciona a las constantes baricéntricas y la teoría de matrices, este último método se implementó en el lenguaje de computación conocido como MatLab.

Método:

Supóngase que se quiere representar el grafo divisor de cero del anillo \mathbb{Z}_n o equivalentemente $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$. Si n es primo entonces n no tiene divisores de cero y por lo tanto no existe su grafo divisor de cero, esto fundamentado en el Corolario 2.1. Supóngase que n se puede descomponer en factores primos en la forma $2^r q^s$, donde q es un primo impar, r y s son enteros positivos mayores que 2. Luego, se busca el conjunto divisor de cero del anillo, esto es, $\Omega(\mathbb{Z}_{2^r q^s})$. Seguidamente se busca los siguientes conjuntos a partir de $\Omega(\mathbb{Z}_{2^r q^s})$:

1. $A = \{2k : 2k < n, \text{ con } 1 \leq k \leq \frac{n-2}{2}\}$.
2. $B = \{kq : kq < n, \text{ con } k \text{ impar}\}$.
3. $C = \{x \in A : n \mid x2q\}$. Aquí $n \mid x2q$ significa que n divide al producto $x2q$.
4. $D = \{x \in C : n \mid xz, \text{ para todo } z \in A\}$.

Nótese que el conjunto D tiene un solo elemento dado que si $x \in D$ este elemento debe cumplir que $n \mid xz$, para todo $z \in A$ en particular para los elementos 2 y $2q$ que están en A , de manera que x debe ser de la forma $2^{r-1}q^s$. Luego, con los conjuntos dados se realizan las siguientes particiones:

$$V_1 = A - C, \quad V_2 = B \cup D, \quad V_3 = C - D.$$

Nótese que si $v, w \in V_1$, es decir, $v, w \in A$ y $v, w \notin C$. Por tanto, se tiene que n no divide al producto vw pues de ser así entonces $v \in C$ o $w \in C$ lo cual es una contradicción. Así el conjunto V_1 es un conjunto independiente. Por otro lado, si $v, w \in V_2$ entonces se pueden tener las siguientes posibilidades:

1. $v, w \in B$.
2. $v \in B$ y $w \in D$, o viceversa, ya que D contiene un solo elemento.

En el supuesto que $v, w \in B$ se tiene que n no divide al producto vw pues ni v ni w no tiene ningún factor de la forma 2^k para ningún valor de $k = 1, \dots, r$. De manera que en este caso no hay una arista entre esos vertices de V . Supóngase ahora, sin pérdida de generalidad, que $v \in B$ y $w \in D$. De manera que v no tiene ningún factor de la forma 2^k para ningún valor de $k = 1, \dots, r$ y como w sería $2^{r-1}q^s$, entonces n no divide al producto vw . Teniendo con esto que no existen aristas entre puntos de V_2 y por tanto el conjunto es independiente.

Nótese que si $x \in V_3$ entonces x contiene los factores 2^{r-1} y q^{s-1} para poder obtener que n divida al producto $x2q$. Así, entre todos y cada uno, de los elementos del conjunto V_3 se tienen aristas entre ellos. De manera que por cada elemento presente en V_3 se debe formar un conjunto con un solo elemento, cada uno de los cuales será independiente.

Por último obsérvese que el conjunto de conjuntos independientes, o el número de partición, es $|V_3|$ más los dos conjuntos V_1 y V_2 , es decir, nuestro grafo $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^r q^s})$ es $(|V_3| + 2)$ -partito.

6 Ejemplo de aplicación del método

Ejemplo 6.1. Representar del grafo divisor de cero del anillo \mathbb{Z}_{36} .

Paso 1: Se chequea si $n = 36$ es primo, si es cierto $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ no existe. Sino continuar con el siguiente paso.

Paso 2: Se descomponen $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{36}$ en la forma $\mathbb{Z}_{2^r q^s}$, esto es, $\mathbb{Z}_{36} = \mathbb{Z}_{2^2 3^2}$

Paso 3: En este paso se procede a calcular el conjunto divisor de cero del anillo esto es,

$$\Omega(\mathbb{Z}_{36}) = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34\}$$

Paso 4: Aquí se calculan los conjuntos A, B, C y D , tal cual se definieron en el método, para buscar una partición de $\Omega(\mathbb{Z}_{36})$, esto es:

1. $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34\}$.
2. $B = \{3, 9, 15, 21, 27, 33\}$.
3. $C = \{12, 18, 24, 30\}$
4. $D = \{18\}$.

Paso 5: Construcción de la partición de representación de $\Omega(\mathbb{Z}_{36})$.

1. $V_1 = A - C = \{2, 4, 6, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 28, 32, 34\}$.
2. $V_2 = B \cup D = \{3, 9, 18, 15, 21, 27, 33\}$.
3. $V_3 = C - D = \{12, 24, 30\}$

Paso 6: Resultado de $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^2 3^2})$. Finalmente, como $|V_3| + 2 = 3 + 2 = 5$. Entonces $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^2 3^2})$ es 5-partito.

Paso 7: Representación de $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^2 3^2})$

Nótese que $\Omega(\mathbb{Z}_{36})$ es 5-partito cuyos conjuntos estarían dados por:

$$W_1 = \{24\} \quad W_2 = \{30\} \quad W_3 = \{3, 9, 15, 18, 21, 27, 33\} \quad W_4 = \{12\}$$

$$W_5 = \{2, 4, 6, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 28, 30, 34\}$$

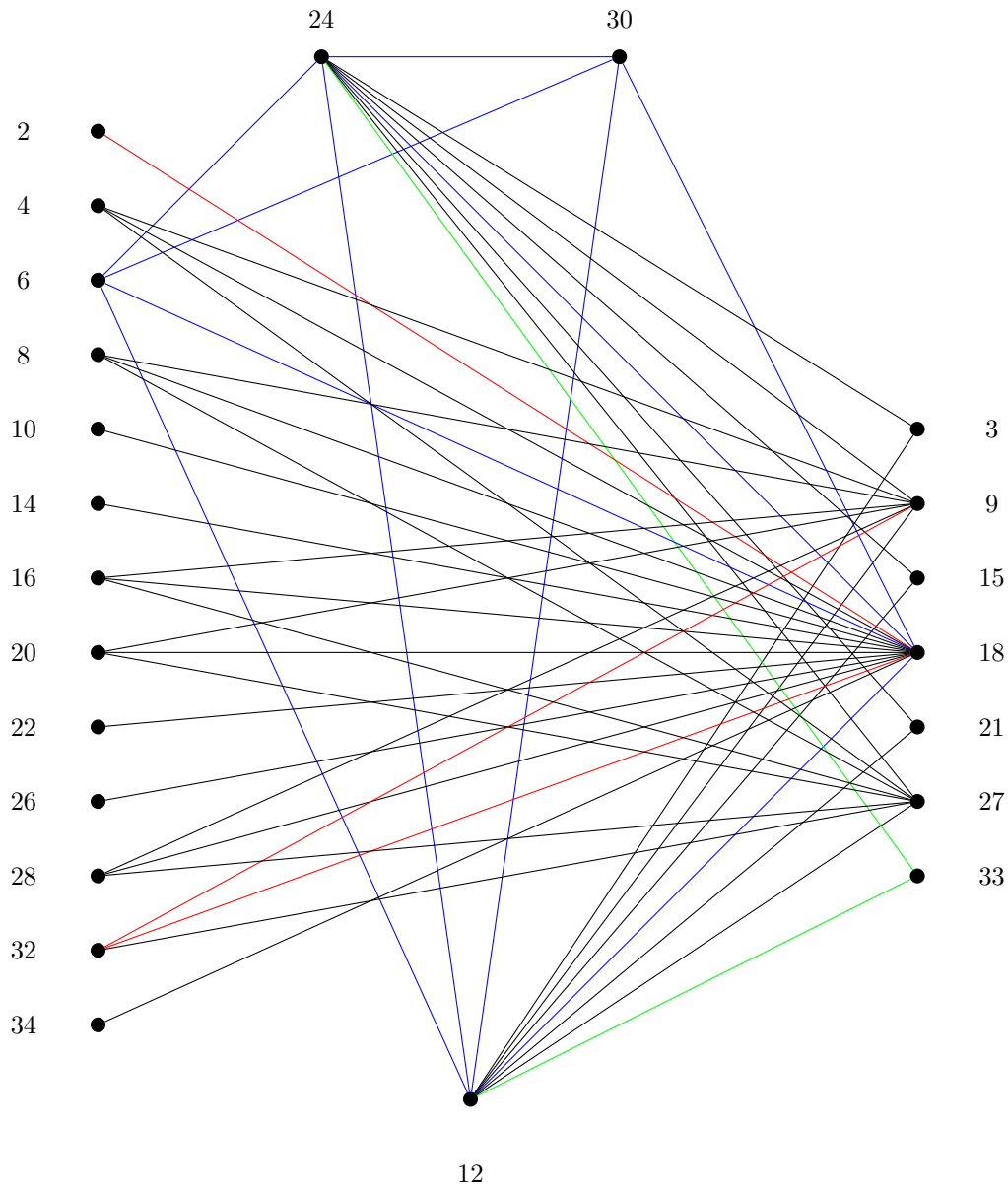


Figura 1: $\Omega(\mathbb{Z}_{36})$, grafo divisor de cero del anillo \mathbb{Z}_{36} .

7 Algoritmo principal del método para $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^r q^s})$

Entrada: n entero positivo mayor que 2.

Salida: Representación de $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$.

Paso 1 Se chequea si n es primo, en cuyo caso \mathbb{Z}_n no tiene divisores de cero. Por lo tanto, no se tiene representación de $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$. En caso contrario.

Paso 2 Determinar la descomposición en factores primos de n , esto se traduce en escribir $n = 2^r q^s$, donde p, q son números primos distintos y r, s enteros positivos mayor o igual a 2.

Paso 3 Obtener el conjunto divisor de cero \mathbb{Z}_n .

Paso 4 Calcular los Conjuntos A, B, C y D , definidos como sigue:

1. $A = \{2k : 2k < n, \text{ con } 1 \leq k \leq \frac{n-2}{2}\}$.
2. $B = \{kq : kq < n, \text{ con } k \text{ impar}\}$.
3. $C = \{x \in A : n \mid x2q\}$. Aquí $n \mid x2q$ significa que n divide al producto $x2q$.
4. $D = \{x \in C : n \mid xz, \text{ para todo } z \in A\}$.

Paso 5 Con los conjuntos obtenidos en el paso 4, se contruye la partición:

1. $V_1 = A - C$.
2. $V_2 = B \cup D$.
3. $V_3 = C - D$.

Paso 6 Con la expresión $|V_3| + 2$, se conoce el número de conjuntos r partitos que tendrá el grafo buscado.

Paso 7 Salida $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$.

Paso 8 Fin.

A continuación tabla con algunos valores de grafos r partitos.

n	Descomposición $p^r q^s$	$\Gamma(\mathbb{Z}_n)$
36	$2^2 3^2$	5-partito
72	$2^3 3^2$	7-partito
100	$2^2 5^2$	9-partito
108	$2^2 3^3$	6-partito
144	$2^4 3^2$	11-partito

Cuadro 2: Tabla con algunas clases de $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$

Referencias

- [1] Andersen, D. and Livinston, P. *The zero divisor graph of a commutative ring*, J. Algebra, **217** (1999), 434-447.

-
- [2] Beck, I. *Coloring of Commutative rings*, J. Algebra, **116** (1988), 288-226.
- [3] Chartrand, G. and Lesniak, L. *Graphs and Digraphs*, Wadsworth and Brooks. 3era ed, California (1986).
- [4] Fanelli, C. *Grafo Divisor de Zero de un Anillo Conmutativo*, Tesis de Maestría, Universidad de Maringá, Brazil, (2011).
- [5] Otero, J. *Un método matricial para el cálculo de las constantes de Davenport y Olson k -baricéntricas*. Tesis de Maestría. Universidad de Oriente. Venezuela. 2011.
- [6] Rojo, A. *Álgebra I*, Buenos Aires, Argentina, 1983.
- [7] Shuker, N.; Mohammad, H. and Ali, A. *The Zero Divisor Graph of $\mathbb{Z}_{p^n q}$* , International Journal of Algebra, **6** (2012), 1049-1055.
- [8] Villarroel, F. *La constante de Olson k -baricéntrica y un teorema inverso de Erds-Ginzburg-Ziv*. Tesis Doctoral. Universidad Central de Venezuela. 2008.

Divulgaciones Matemáticas Vol. 23-24, No. 1-2 (2022-2023), pp. 64–81
<https://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones/>
DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.11540294>
(CC BY-NC-SA 4.0)

©Autor(es)
e-ISSN 2731-2437
p-ISSN 1315-2068

Un método nuevo para eliminar la indeterminación en los problemas singularmente perturbados con resonancia de Ackerberg y O'Malley

A new method for eliminating the indeterminacy in the singularly perturbed problems with Ackerberg-O'Malley resonance

Jacques Laforgue (laforgue007@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8823-9694>

Departamento de Matemáticas, Núcleo de Sucre

Universidad de Oriente

Cumaná, Estado Sucre, Venezuela

Resumen

En los problemas singularmente perturbados con carácter resonante en el sentido de Ackerberg y O'Malley, el método tradicional de las expansiones asintóticas empatadas fracasa para determinar la amplitud de la resonancia. Se presenta un método nuevo, basado en procedimientos establecidos de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, para eliminar tal indeterminación aprovechando el resultado incompleto de las expansiones asintóticas empatadas y eliminando de manera natural el grado de libertad superfluo, mediante la derivación e imposición de una condición de frontera exacta adicional que relaciona las pendientes en los dos extremos del dominio. El método nuevo es efectivo para la variedad de problemas reconocidos como resonantes, incluyendo los que exhiben supersensibilidad, y también para los de estructura diferente pero con indeterminación análoga, por ejemplo involucrando una ecuación en derivadas parciales.

Palabras y frases clave: Perturbaciones singulares, Resonancia de capas de frontera, Expansiones asintóticas empatadas.

Abstract

In the singularly perturbed problems with resonant character in the sense of Ackerberg and O'Malley, the traditional method of matched asymptotic expansions fails to determine the resonance's amplitude. A new method is presented, based on established procedures from the theory of ordinary differential equations, for eliminating such indeterminacy taking advantage of the incomplete result of the matched asymptotic expansions and eliminating in a natural fashion the superfluous degree of freedom, through the derivation and imposition of an additional exact boundary condition that relates the slopes at both extremities of the domain. The new method is effective for the variety of problems recognized as resonant, including those exhibiting supersensitivity and also for those of a different structure but with

Recibido 20/11/2022. Revisado 12/03/2023. Aceptado 17/09/2023.

MSC (2020): Primary 34E15; Secondary 34A05.

Autor de correspondencia: Jacques Laforgue

analogous indeterminacy, for example involving a partial differential equation.

Key words and phrases: Singular perturbations, Boundary layer resonance, Matched asymptotic expansions.

1 Introducción

Las ciencias aplicadas usan a menudo modelos diferenciales cuyas soluciones requieren ser aproximadas analíticamente, por no existir fórmulas exactas y porque los resultados numéricos no se prestan a la dilucidación cualitativa de los mecanismos obrando. Como es común que los fenómenos físicos no converjan uniformemente a la dinámica más simple correspondiente a la anulación del parámetro pequeño, la teoría y las técnicas de las *perturbaciones singulares* [9, 17, 31] se vuelven imprescindibles. Su método básico más versátil es el de las expansiones asintóticas empataadas: se construyen varias aproximaciones locales aparentemente independientes, se relacionan entre sí, y si es posible, se componen para obtener estimaciones más globales. En el transcurso de este proceso, se acepta la presencia de coeficientes cuyo valor, necesario para el resultado final, momentáneamente se desconoce. El método es efectivo si se logra fijar de alguna manera acertada tales valores pendientes para suministrar una respuesta única al problema. Esto es lo que ocurre de manera rutinaria, y este éxito ha hecho universal el uso del método.

Sin embargo, hace medio siglo, Ackerberg y O'Malley [1] publicaron una investigación, en la cual habían detectado una situación previamente desapercibida por la comunidad matemática, donde una solución que se pensaba prácticamente nula en toda oportunidad, lucía en casos excepcionales un comportamiento funcional a tener en cuenta, que bien podía llamarse *resonante*. Pero ocurría que, al aplicar el Método de Expansiones Asintóticas Empatadas (MEAE) para averiguar las características de estas soluciones excepcionales, un coeficiente crucial quedaba indeterminado, ocultando por vía de consecuencia la estructura o perfil real de tales soluciones.

El artículo de Ackerberg y O'Malley ha tenido muchas repercusiones pero los procedimientos que se han propuestos para determinar las soluciones resonantes (a menudo novedosos, pero sin justificación rigurosa) en la gran mayoría de los casos abandonan el MEAE. Como tal método ha demostrado tanta utilidad, parece más razonable enriquecerlo en vez de desecharlo.

El trabajo [18] del autor para ascender a Profesor Titular de la Universidad de Oriente (Venezuela) consiste en proponer un método nuevo que se adapta al MEAE y lo completa con un procedimiento que está justificado por la teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) [30]. El propósito de este artículo es el de dar a conocer el contenido de dicho trabajo.

En la Sección 2, se presenta el contexto del problema de Ackerberg y O'Malley y de la indeterminación ocurrida. En la Sección 3, se describe el método nuevo propuesto. En la Sección 4, se detalla la resolución de un problema particular, incluyendo (Subsección 4.1) cuando se agregue una perturbación exponencialmente pequeña capaz de tener efectos de orden uno (*supersensibilidad*). La Sección 5 alista otros problemas resueltos en [18]. En la Sección 6, se muestra cómo el método también sirve para eliminar la indeterminación en el caso de una ecuación en derivadas parciales. Finalmente, una Conclusión resume lo logrado.

2 Contexto

Ackerberg y O'Malley [1] consideran el Problema con Valores en la Frontera (PVF)

$$\begin{cases} \varepsilon y'' - xp(x)y' + p(x)q(x)y = 0, & -1 \leq x \leq L, \\ y(-1, \varepsilon) = A, \quad y(L, \varepsilon) = B, & 0 < \varepsilon \ll 1, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $L \in (0, \infty)$, $A, B \in \mathbb{R}$, $p(x) > 0$ para todo $x \in [-1, L]$ y la función q satisface la condición especial $q(0) \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. De manera más general, los parámetros constantes involucrados pueden tomarse como funciones analíticas de ε ; es decir, $A = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i$, $B = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i B_i$ y $L = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i L_i$ (con $L_0 > 0$); también las funciones p y q pueden depender similarmente de ε (con $p|_{\varepsilon=0} > 0$).

Como el parámetro pequeño ε multiplica la derivada de orden más alto, se tiene una *perturbación singular*. En el interior del dominio, $x = 0$ es un punto de retorno simple, con un coeficiente de y' que pasa de positivo a negativo; estos signos hacen factibles capas de frontera (de variación abrupta de la solución) en ambos extremos del dominio.

La aplicación del MEAE empieza por la búsqueda de una solución $Y = Y(x, \varepsilon)$ exterior (a las capas) que sea regular, para lo cual se le asume una expansión asintótica de Poincaré en potencias de ε :

$$Y(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Y_i(x) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

La ecuación que ha de satisfacer el término dominante $Y_0 = Y_0(x)$, después de simplificar por $p(x)$, es

$$-xY_0' + q(x)Y_0 = 0, \quad -1 < x < 1.$$

Tiene una degeneración en $x = 0$. Antes de Ackerberg y O'Malley, se consideraba que la singularidad de esta ecuación imponía como única solución suave la idénticamente nula, con el mismo resultado para todos los términos $Y_i = Y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$. Pero la condición especial que introdujeron hace admisible la función

$$Y_0(x) = k_0 x^{q(0)} \exp \left[\int_0^x \frac{q(s) - q(0)}{s} ds \right], \quad -1 < x < 1, \quad (2.2)$$

cualquiera que sea la constante $k_0 \in \mathbb{R}$, y ellos calificaron de *resonancia* a este posible fenómeno excepcional (los términos siguientes Y_1, Y_2, \dots pueden también ser suaves solamente si se satisfacen más condiciones especiales).

Siguiendo con la aplicación del MEAE, se busca una solución interior a la capa izquierda usando el cambio de escala $t \stackrel{\text{def}}{=} (x+1)/\varepsilon \in (0, \infty)$ que regulariza localmente la ecuación diferencial, lo cual permite asumir aquí también una expansión asintótica para $Z^{\text{izq}}(t, \varepsilon) =: y(x, \varepsilon)$ cuando $x = -1 + O(\varepsilon)$

$$Z^{\text{izq}}(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Z_i^{\text{izq}}(t) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Como debe satisfacerse además la condición inicial $Z^{\text{izq}}(0, \varepsilon) = y(-1, \varepsilon)$, el término dominante $Z_0^{\text{izq}} = Z_0^{\text{izq}}(t)$ será solución del problema

$$\ddot{Z}_0^{\text{izq}} + p(-1)\dot{Z}_0^{\text{izq}} = 0, \quad Z_0^{\text{izq}}(0) = A_0,$$

donde cada punto superior indica una derivación respecto de t . Esto implica un grado de libertad provisional, con la presencia de la constante $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$Z_0^{\text{izq}}(t) = \alpha + (A_0 - \alpha)e^{-p(-1)t}, \quad t \in [0, \infty).$$

La búsqueda de una solución interior a la capa derecha es análoga; con ahora $t \stackrel{\text{def}}{=} (x-L)/\varepsilon \in (-\infty, 0]$, la expansión $Z^{\text{der}}(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Z_i^{\text{der}}(t)$ ($\varepsilon \rightarrow 0^+$) tiene un término dominante $Z_0^{\text{der}} = Z_0^{\text{der}}(t)$ solución del problema

$$\ddot{Z}_0^{\text{der}} - L_0 p(L_0) \dot{Z}_0^{\text{der}} = 0, \quad Z_0^{\text{izq}}(0) = B_0,$$

lo cual implica otro grado de libertad provisional, con la constante $\beta \in \mathbb{R}$:

$$Z_0^{\text{der}}(t) = \beta + (B_0 - \beta)e^{L_0 p(L_0)t}, \quad t \in (-\infty, 0].$$

Empatar la aproximación interior izquierda con la exterior y empear ésta con la aproximación interior derecha es aquí sencillo. Las condiciones $\lim_{t \rightarrow \infty} Z^{\text{izq}}(t, \varepsilon) = Y(-1, \varepsilon)$ y $Y(L, \varepsilon) = \lim_{t \rightarrow -\infty} Z^{\text{der}}(t, \varepsilon)$ permiten fijar los grados de libertad mencionados:

$$\alpha := Y_0(-1) \quad \text{y} \quad \beta := Y_0(L_0).$$

También la sencillez de los empates permite componer las tres aproximaciones locales (sumándolas y restando los términos duplicados α y β) para la posible obtención de una aproximación asintótica uniforme:

$$y(x, \varepsilon) \sim Y_0(x) + [A_0 - Y_0(-1)]e^{-p(-1)(x+1)/\varepsilon} + [B_0 - Y_0(L_0)]e^{L_0 p(L_0)[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon}. \quad (2.3)$$

Sin embargo, la solución exterior Y_0 incluye todavía la constante indeterminada $k_0 \in \mathbb{R}$. El desconocimiento de esta *amplitud de la resonancia* impide toda interpretación del resultado incompleto (2.3) que pretenda aclarar el comportamiento real de la solución. De hecho, se verá más adelante que de manera genérica, no hay dos capas de frontera usualmente sino una sola, porque precisamente el valor de k_0 anula bien sea el factor $[A_0 - Y_0(-1)]$, bien sea el factor $[B_0 - Y_0(L_0)]$. La presencia de las dos capas de frontera es también posible, pero bajo el cumplimiento de una condición particular sobre el parámetro L_0 .

La indeterminación así encontrada una vez completada la aplicación del MEAE contrasta con la usual efectividad de dicho método. Por esto en particular, el artículo [1] captó el interés de muchos investigadores y muchas contribuciones fueron publicadas desde entonces hasta la actualidad [3–8, 10–13, 15, 21–23, 25–29, 32–36, 38, 39]. Algunas de ellas desecharon el MEAE de entrada para recurrir a procedimientos de otra naturaleza. Pero las bondades de este método incitan más bien a rescatarlo de alguna manera.

Unos pocos autores partieron del resultado (2.3) para completarlo. Lagerstrom [20] eliminó elegantemente la indeterminación pero en el caso muy particular de estar presente una simetría bien apropiada.

Grasman y Matkowsky [8] no siguieron con el MEAE sino que recurrieron al cálculo variacional; sus estimaciones y cálculos son complicados y no hay justificación matemática rigurosa (de hecho, Srinivasan [34] mostró que la propuesta específica de [8] no daba la respuesta correcta para órdenes más altos).

MacGillivray [25] se quedó en el marco del MEAE pero lo extendió de manera nada convencional; no hay justificación matemática y no se sabe si el método funciona en todos los casos.

Las tres alternativas que se acaban de mencionar no son plenamente satisfactorias, lo cual justifica proponer un nuevo método que tenga más virtudes a su favor.

3 Descripción del método nuevo propuesto

En la teoría y en la aplicación de las EDO, es punto de partida casi ineludible la conformación de un problema *bien planteado* que garantice existencia, unicidad y cierta suavidad de la solución. Esto, de manera rutinaria, se logra asociando a la ecuación diferencial un número ajustado de condiciones adicionales, llamadas genéricamente condiciones de frontera, que fijan en un punto determinado algún valor para la solución (condición de Dirichlet) o para su derivada (condición de Neuman); o bien imponen una identidad relacionando valores de ambos tipos (condición de Robín).

Ahora bien, cuando este problema bien planteado se desea resolver en computadora digital, el especialista de análisis numérico procede a una discretización de sus ecuaciones diferenciales que las transforma en un sistema de naturaleza matemática distinta, el cual en particular puede no tener el mismo número de grados de libertad que el original. Si es menor, el especialista recurre a un método de optimización y si es mayor, agrega a las condiciones de frontera originales otras llamadas condiciones numéricas, consistentes con el problema original y sus propiedades, para forzar la unicidad de la solución.

De igual manera, el método propuesto para eliminar la indeterminación encontrada en la resonancia de Ackerberg y O'Malley consiste en agregar una tercera condición de frontera derivada rigurosamente de la ecuación diferencial.

Esta nueva condición, para que aporte algo, debe ser independiente de las dos que ya se están tomando en cuenta. Como éstas son condiciones de Dirichlet, la derivada de la solución estará involucrada.

Otra característica necesitada para la condición adicional tiene que ver con la dificultad fundamental de los problemas resonantes. Al contrario de todos los problemas usuales, incluidos los singularmente perturbados, cantidades trascendentalmente pequeñas influyen de manera decisiva en la estructura y amplitud de la solución resonante. Como el MEAE sólo toma en cuenta potencias de ε , ignora estas cantidades exponencialmente pequeñas y por esto fracasa. La condición de frontera por agregar será de tipo mixto, en el sentido de que relacionará en la misma identidad valores de las pendientes en los dos extremos fronterizos, lo cual, de una cierta manera, equivale precisamente a captar la información trascendental que viaja desapercibida a lo largo del dominio.

Ahora bien, ¿cómo se construye una condición de frontera que satisfaga estos requerimientos? En la caracterización de los problemas resonantes, los artículos publicados enfatizan que son especialmente los que pueden ser transformados en ciertas ecuaciones modelo (ver, por ejemplo, Olver [29]); resulta que la posibilidad de aplicar un método de reducción del orden (quizás después de algún cambio de variables) es aquí la regla y no la excepción. Se aprovechará esta técnica clásica de la teoría de EDO, ya que su validez está bien establecida, al contrario de los métodos de [8] y [25]. La *primera integral* así obtenida se evaluará en los dos extremos del dominio y la identidad resultante proveerá la relación buscada entre las dos pendientes fronterizas.

Las clases de PVF cuyo carácter resonante ha sido demostrado rigurosamente en la literatura son relativamente pocas. Se aplicó el método propuesto a prácticamente todas, resultando siempre efectiva la eliminación de la indeterminación. En la sección siguiente, se presenta una muestra.

4 Ecuación asociada a un tiempo de salida

En probabilidades aplicadas, tiene relevancia el PVF

$$\begin{cases} \varepsilon y'' - x^m p(x) y' = 0, & -1 \leq x \leq L(\varepsilon), \\ y(-1, \varepsilon) = A(\varepsilon), \quad y(L(\varepsilon), \varepsilon) = B(\varepsilon), & 0 < \varepsilon \ll 1, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde m es un número natural impar, la función suave p es positiva, $L_0 > 0$ y $A_0 B_0 \neq 0$.

Se va primero a resolver directamente el PVF y estimar asintóticamente su solución exacta para que cuando, después, se obtengan los resultados del método nuevo propuesto, se pueda verificar en el momento el acierto de sus aproximaciones.

Un factor integrante de la EDO en (4.1) es $\exp[-P(x)/\varepsilon]$, donde P es la función (no negativa) tal que

$$P(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x s^m p(s) ds, \quad x \geq -1. \quad (4.2)$$

Por lo tanto, $y'(x, \varepsilon) = c_1(\varepsilon) \exp[P(x)/\varepsilon]$ y se sigue $y(x, \varepsilon) = c_1(\varepsilon) I(x, \varepsilon) + c_2(\varepsilon)$, donde

$$I(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x \exp[P(s)/\varepsilon] ds, \quad x \geq -1.$$

Las constantes de integración $c_1(\varepsilon)$ y $c_2(\varepsilon)$ han de satisfacer $c_1(\varepsilon) I(-1, \varepsilon) + c_2(\varepsilon) = A(\varepsilon)$ y $c_1(\varepsilon) I(L(\varepsilon), \varepsilon) + c_2(\varepsilon) = B(\varepsilon)$. Resulta

$$y(x, \varepsilon) = \frac{A(\varepsilon) I(L(\varepsilon), \varepsilon) - B(\varepsilon) I(-1, \varepsilon) + [B(\varepsilon) - A(\varepsilon)] I(x, \varepsilon)}{I(L(\varepsilon), \varepsilon) - I(-1, \varepsilon)}. \quad (4.3)$$

Como el único valor máximo de $P(s)$ cuando s está entre cero y $x \neq 0$ es $P(x)$, y como $P(s) = P(x) + x^m p(x)(s-x) + \dots$, el método de Laplace (ver, por ejemplo, Wong [37, página 58]) suministra la estimación asintótica para $x \neq 0$

$$I(x, \varepsilon) = \frac{\varepsilon e^{P(x)/\varepsilon}}{x^m p(x)} [1 + O(\varepsilon)] \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Como $P(L(\varepsilon)) - P(L_0) = \int_{L_0}^{L_0 + \varepsilon L_1 + O(\varepsilon^2)} s^m p(s) ds = \varepsilon L_1 L_0^m p(L_0) + O(\varepsilon^2)$, se tiene entonces $I(L(\varepsilon), \varepsilon) = \left[\frac{\varepsilon}{\lambda(L_0, L_1)} \exp \frac{P(L_0)}{\varepsilon} \right] [1 + O(\varepsilon)]$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, donde por conveniencia se usa la constante $\lambda(L_0, L_1)$ definida como $\lambda(L_0, L_1) \stackrel{\text{def}}{=} L_0^m p(L_0) \exp[-L_1 L_0^m p(L_0)]$. Luego, de la solución exacta (4.3) se obtiene por una parte para $x = 0$, que $y(0, \varepsilon) = y_0(\varepsilon)[1 + O(\varepsilon)]$ donde

$$y_0(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_0 p(-1) \exp[P(L_0)/\varepsilon] + B_0 \lambda(L_0, L_1) \exp[P(-1)/\varepsilon]}{p(-1) \exp[P(L_0)/\varepsilon] + \lambda(L_0, L_1) \exp[P(-1)/\varepsilon]}$$

y por otra parte para $x \neq 0$,

$$y(x, \varepsilon) = \left\{ y_0(\varepsilon) + \frac{(B_0 - A_0) \frac{\lambda(L_0, L_1) p(-1)}{x^m p(x)} \exp[P(x)/\varepsilon]}{p(-1) \exp[P(L_0)/\varepsilon] + \lambda(L_0, L_1) \exp[P(-1)/\varepsilon]} \right\} [1 + O(\varepsilon)].$$

El comportamiento de la solución depende de los valores relativos de $P(-1)$ y $P(L_0)$; conviene introducir el umbral \hat{L} donde estos dos valores son iguales.

Lema 4.1. Si la integral impropia $\int_{-1}^{\infty} s^m p(s) ds$ diverge o si converge a un valor positivo, existe un único número $\widehat{L} \in (0, \infty)$ tal que $\int_{-1}^{\widehat{L}} s^m p(s) ds = 0$ (por ejemplo, si la función p es par, entonces $\widehat{L} = 1$); se tiene entonces $P(\widehat{L}) = P(-1)$ con $P(x) < P(-1)$ para todo $x \in (-1, \widehat{L})$ y $P(x) > P(-1)$ para todo $x > \widehat{L}$. Si la integral impropia $\int_{-1}^{\infty} s^m p(s) ds$ converge a un valor negativo o nulo, se tiene $P(x) < P(-1)$ para todo $x > -1$ y se define $\widehat{L} \stackrel{\text{def}}{=} \infty$.

Demostración. Son consecuencias inmediatas de que la función suave P es estrictamente decreciente en el intervalo $[-1, 0]$ y estrictamente creciente después. \square

Ahora se está en condiciones de describir explícitamente el comportamiento asintótico de la solución exacta, distinguiendo tres casos, tratados en las tres proposiciones siguientes.

Proposición 4.1. Si $L_0 < \widehat{L}$ donde \widehat{L} está definido en el Lema 4.1, se cumple

$$y(x, \varepsilon) \sim B_0 + (A_0 - B_0) e^{-p(-1)(x+1)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (4.4)$$

La solución tiene una capa de frontera a la izquierda en $x = -1$ y fuera de ella es aproximadamente constante, con el valor límite impuesto en el extremo derecho.

Demostración. $L_0 < \widehat{L}$ implica $P(L_0) < P(-1)$; entonces $y_0(\varepsilon) = B_0 + O(\exp \frac{P(L_0) - P(-1)}{\varepsilon})$ (la diferencia es trascendentalmente pequeña) y para $x \neq 0$ se tiene $y(x, \varepsilon) = [B_0 + (B_0 - A_0) \frac{p(-1)}{x^m p(x)} \exp \frac{P(x) - P(-1)}{\varepsilon}] [1 + O(\varepsilon)]$, con $P(x) < P(-1)$ si $x > -1$. Luego si $x + 1 \neq O(\varepsilon)$, entonces $y(x, \varepsilon) = B_0 + O(\varepsilon)$ y si $x + 1 = O(\varepsilon)$, entonces $P(x) - P(-1) = P'(-1)(x+1) + O((x+1)^2) = -p(-1)(x+1) + O(\varepsilon^2)$, se tiene $y(x, \varepsilon) = \{B_0 + (B_0 - A_0) \frac{p(-1)}{-p(-1) + O(\varepsilon)} \exp[-p(-1)(x+1)/\varepsilon]\} [1 + O(\varepsilon)]$, y la conclusión sigue. \square

Proposición 4.2. Si $L_0 > \widehat{L}$ donde \widehat{L} está definido en el Lema 4.1, se cumple

$$y(x, \varepsilon) \sim A_0 + (B_0 - A_0) e^{L_0^m p(L_0)[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (4.5)$$

La solución tiene una capa de frontera a la derecha en $x = L(\varepsilon)$ y fuera de ella es aproximadamente constante, con el valor límite impuesto en el extremo izquierdo.

Demostración. $L_0 > \widehat{L}$ implica $P(L_0) > P(-1)$; entonces $y_0(\varepsilon) = A_0 + O(\exp \frac{P(-1) - P(L_0)}{\varepsilon})$ (la diferencia es trascendentalmente pequeña) y para $x \neq 0$ se tiene $y(x, \varepsilon) = [A_0 + (B_0 - A_0) \frac{\lambda(L_0, L_1)}{x^m p(x)} \exp \frac{P(x) - P(L_0)}{\varepsilon}] [1 + O(\varepsilon)]$, con $P(x) < P(L_0)$ si $x < L_0$. Luego si $x - L_0 \neq O(\varepsilon)$, entonces $y(x, \varepsilon) = A_0 + O(\varepsilon)$ y si $x - L_0 = O(\varepsilon)$, entonces $P(x) - P(L_0) = P'(L_0)(x - L_0) + O((x - L_0)^2) = L_0^m p(L_0)(x - L_0) + O(\varepsilon^2)$, se tiene $y(x, \varepsilon) = \{A_0 + (B_0 - A_0) \frac{L_0^m p(L_0) \exp[-L_1 L_0^m p(L_0)]}{L_0^m p(L_0) + O(\varepsilon)} \exp[L_0^m p(L_0)(x - L_0)/\varepsilon]\} [1 + O(\varepsilon)]$, y $L_0^m p(L_0)(x - L_0 - \varepsilon L_1)/\varepsilon = L_0^m p(L_0)[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon + O(\varepsilon)$ implica la conclusión. \square

Proposición 4.3. Si $L_0 = \widehat{L}$ definido en el Lema 4.1, se cumplen $y(0, \varepsilon) \sim y_0$ con $y_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_0 p(-1) + B_0 \lambda(L_0, L_1)}{p(-1) + \lambda(L_0, L_1)} e$

$$y(x, \varepsilon) \sim y_0 + \frac{(A_0 - B_0) \lambda(L_0, L_1)}{p(-1) + \lambda(L_0, L_1)} e^{-p(-1)(x+1)/\varepsilon} + \frac{(B_0 - A_0) p(-1)}{p(-1) + \lambda(L_0, L_1)} e^{L_0^m p(L_0)[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (4.6)$$

La solución tiene capas de frontera en ambos extremos $x = -1$ y $x = L(\varepsilon)$; entre ellas es aproximadamente constante, un promedio ponderado de los valores límites impuestos en los bordes.

Demostración. Como $P(L_0) = P(-1)$, entonces $y_0(\varepsilon) = y_0$ y para $x \neq 0$ se tiene

$$y(x, \varepsilon) = \left\{ y_0 + \frac{(B_0 - A_0)\lambda(L_0, L_1)p(-1)}{x^m p(x)[p(-1) + \lambda(L_0, L_1)]} \exp \frac{P(x) - P(-1)}{\varepsilon} \right\} [1 + O(\varepsilon)],$$

con $P(x) < P(-1)$ si $-1 < x < L_0$. Luego si $x + 1 \neq O(\varepsilon)$ y $x - L_0 \neq O(\varepsilon)$, entonces $y(x, \varepsilon) = y_0 + O(\varepsilon)$. Los casos $x + 1 = O(\varepsilon)$ y $x - L_0 = O(\varepsilon)$ son análogos a los vistos para las Proposiciones 4.1 y 4.2 respectivamente. \square

Observación 4.1. Como $\lim_{L_1 \rightarrow -\infty} \lambda(L_0, L_1) = \infty$ y $\lim_{L_1 \rightarrow \infty} \lambda(L_0, L_1) = 0$, la aproximación (4.6) evoluciona continuamente de la (4.4) a la (4.5) cuando L_1 varía de $-\infty$ a ∞ .

Así aclarado el comportamiento asintótico de la solución exacta, se asume desconocido y se aplica el MEAE. Una solución regular de la EDO $Y(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Y_i(x)$ debe satisfacer $-x^m p(x) Y_0' = 0$ y $x^m p(x) Y_{i+1}' = Y_i'' = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$; por lo tanto, todos sus términos son constantes:

$$Y(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i k_i \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Para una posible capa de frontera a la izquierda en $x = -1$, se introduce el cambio de variables $t = (x + 1)/\varepsilon$, $z(t, \varepsilon) = y(x, \varepsilon)$. El problema local correspondiente es

$$\begin{cases} \ddot{z} + (1 - \varepsilon t)^m p(-1 + \varepsilon t) \dot{z} = 0, & 0 \leq t < \infty \\ z(0, \varepsilon) = A(\varepsilon), & \lim_{t \rightarrow \infty} z(t, \varepsilon) = Y(-1, \varepsilon). \end{cases}$$

Se resuelve mediante una expansión asintótica $z(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i z_i(t)$, cuyo término dominante $z_0 = z_0(t)$ va a satisfacer

$$\ddot{z}_0 + p(-1) \dot{z}_0 = 0, \quad z_0(0) = A_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z_0(t) = k_0;$$

por lo tanto, resulta

$$z_0(t) = k_0 + (A_0 - k_0)e^{-p(-1)t}, \quad t \in [0, \infty).$$

En particular, se anota $\dot{z}_0(0) = (k_0 - A_0)p(-1)$ para uso futuro.

Para una posible capa de frontera a la derecha en $x = L(\varepsilon)$, se introduce el cambio de variables $t = [x - L(\varepsilon)]/\varepsilon$, $z(t, \varepsilon) = y(x, \varepsilon)$. El problema local correspondiente es

$$\begin{cases} \ddot{z} - [L(\varepsilon) + \varepsilon t]^m p(L(\varepsilon) + \varepsilon t) \dot{z} = 0, & -\infty < t \leq 0 \\ z(0, \varepsilon) = B(\varepsilon), & \lim_{t \rightarrow -\infty} z(t, \varepsilon) = Y(L(\varepsilon), \varepsilon). \end{cases}$$

Se resuelve mediante una expansión asintótica $z(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i z_i(t)$, cuyo término dominante $z_0 = z_0(t)$ va a satisfacer

$$\ddot{z}_0 - L_0^m p(L_0) \dot{z}_0 = 0, \quad z_0(0) = B_0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} z_0(t) = k_0;$$

por lo tanto, resulta

$$z_0(t) = k_0 + (B_0 - k_0)e^{L_0^m p(L_0)t}, \quad t \in (-\infty, 0].$$

En particular, se anota $\dot{z}_0(0) = (B_0 - k_0)L_0^m p(L_0)$ para uso futuro.

De conocerse el valor de la constante k_0 , se contaría con la aproximación asintótica compuesta

$$y(x, \varepsilon) \sim k_0 + (A_0 - k_0)e^{-p(-1)(x+1)/\varepsilon} + (B_0 - k_0)e^{L_0^m p(L_0)[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (4.7)$$

Para determinar el valor de k_0 , se va a derivar una condición de frontera adicional de tipo mixto; es decir, involucrando ambos extremos del dominio. Como ya se imponen los valores de la solución ahí, será una condición sobre los valores de su primera derivada.

Se multiplica la EDO en (4.1) por el factor integrante $\exp[-P(x)/\varepsilon]$, donde la función P fue definida en (4.2). Viene $\{\varepsilon y' \exp[-P(x)/\varepsilon]\}' = 0$, lo cual se integra de $x = -1$ a $x = L(\varepsilon)$, resultando $\varepsilon y'(L(\varepsilon), \varepsilon) \exp[-P(L(\varepsilon))/\varepsilon] = \varepsilon y'(-1, \varepsilon) \exp[-P(-1)/\varepsilon]$. Luego, usando los valores $\dot{z}_0(0)$ anotados más arriba, se obtiene

$$(B_0 - k_0)L_0^m p(L_0) + O(\varepsilon) = [(k_0 - A_0)p(-1) + O(\varepsilon)] \exp \frac{P(L(\varepsilon)) - P(-1)}{\varepsilon},$$

de donde

$$(B_0 - k_0)\lambda(L_0, L_1) + O(\varepsilon) = [(k_0 - A_0)p(-1) + O(\varepsilon)] \exp \frac{P(L_0) - P(-1)}{\varepsilon}.$$

Esto implica que si $L_0 < \widehat{L}$, se tiene $k_0 = B_0$, la aproximación (4.7) se reduce a la (4.4) y se deduce lo contenido en la Proposición 4.1; si $L_0 > \widehat{L}$, se tiene $k_0 = A_0$, la aproximación (4.7) se reduce a la (4.5) y se deduce lo contenido en la Proposición 4.2; finalmente, si $L_0 = \widehat{L}$, se tiene $k_0 = \frac{A_0 p(-1) + B_0 \lambda(L_0, L_1)}{p(-1) + \lambda(L_0, L_1)} = y_0$, la aproximación (4.7) coincide con la (4.6) y se deduce lo contenido en la Proposición 4.3. Así, el método propuesto produce lo correcto en todos los casos.

Se presenta ahora una ilustración de lo analizado en esta sección con un ejemplo particular.

Ejemplo 4.1. Para disponer de una solución exacta que se pueda representar gráficamente con facilidad, se va a usar el valor $m = 1$ así como una función positiva p que depende además del parámetro ε (pero sin tender a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$).

La solución general de la EDO

$$\varepsilon y'' - x \left(1 + \frac{2\varepsilon}{x^2 + \varepsilon}\right) y' = 0 \quad (4.8)$$

es $y(x, \varepsilon) = c_1(\varepsilon)x \exp\left(\frac{x^2-1}{2\varepsilon}\right) + c_2(\varepsilon)$, y su solución particular bajo las condiciones de frontera

$$y(-1, \varepsilon) = -1, \quad y(L(\varepsilon), \varepsilon) = 1 \quad (4.9)$$

es

$$y(x, \varepsilon) = \frac{2xe^{\frac{x^2-1}{2\varepsilon}} + 1 - L(\varepsilon)e^{\frac{L^2(\varepsilon)-1}{2\varepsilon}}}{1 + L(\varepsilon)e^{\frac{L^2(\varepsilon)-1}{2\varepsilon}}},$$

la cual admite como aproximación asintótica uniforme cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$y(x, \varepsilon) \sim \begin{cases} 1 - 2e^{-(x+1)/\varepsilon} & \text{si } L_0 < 1, \\ \frac{1 - e^{L_1}}{1 + e^{L_1}} - \frac{2}{1 + e^{L_1}} e^{-(x+1)/\varepsilon} + \frac{2e^{L_1}}{1 + e^{L_1}} e^{[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} & \text{si } L_0 = 1, \\ -1 + 2e^{L_0[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} & \text{si } L_0 > 1. \end{cases}$$

Esto es consistente con (4.4) (aquí $p(-1, 0) = 1$), con (4.5) (aquí $p(L_0, 0) = 1$) y con (4.6) (aquí $\lambda(L_0, L_1) = e^{-L_1}$).

La Figura 1 muestra la solución exacta del PVF (4.8)-(4.9) y su aproximación asintótica uniforme superpuesta, para varios valores representativos de $L(\varepsilon)$, con una capa de frontera a la izquierda cuando $L_0 < \hat{L}$, una a la derecha cuando $L_0 > \hat{L}$ y las dos capas de frontera cuando $L_0 = \hat{L}$ (aquí, $\hat{L} = 1$ porque p es una función par de x).

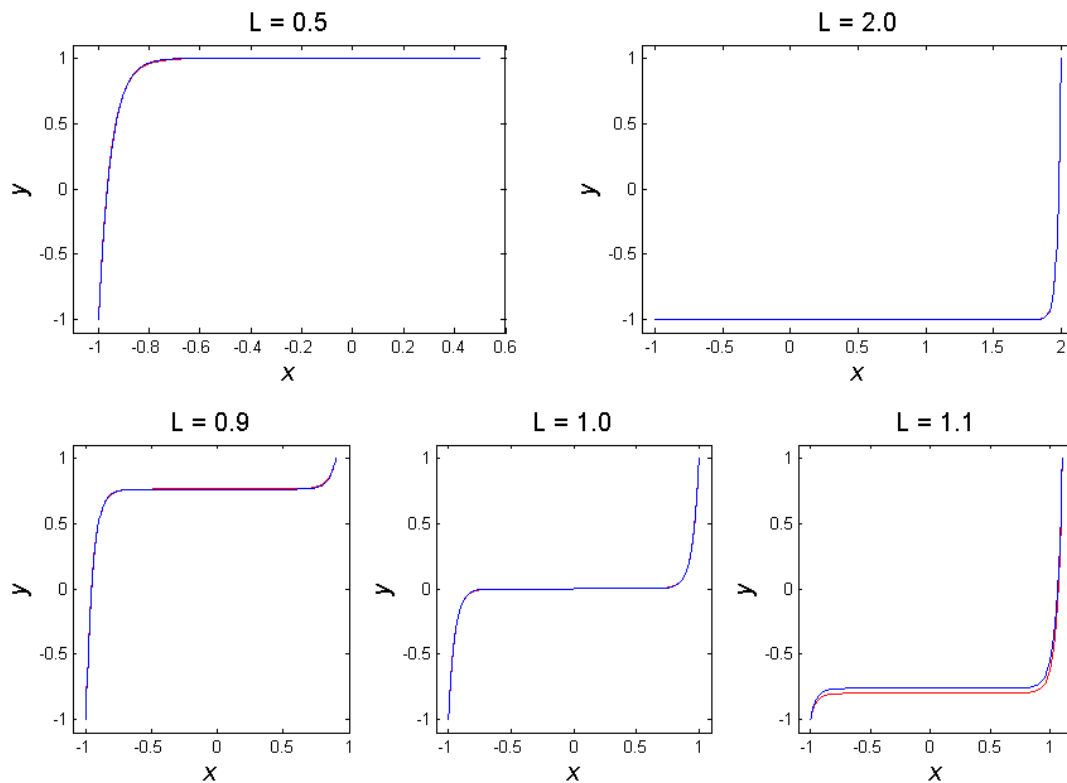


Figura 1: Superposición de la solución del Ejemplo 4.1 y de su aproximación para los casos $L(\varepsilon) = 0,5 < \hat{L}$, $L(\varepsilon) = 2 > \hat{L}$ y $L(\varepsilon) \simeq 1 = \hat{L}$. Se usó el valor $\varepsilon = 0,05$.

4.1 Ecuación perturbada exhibiendo supersensibilidad

El método presentado ha eliminado la indeterminación, incluyendo la situación sensible planteada por Skinner [33], en la cual una modificación de orden ε de la extensión del dominio implica un cambio de orden uno en la solución resonante, cuando $L(\varepsilon) = \widehat{L} + O(\varepsilon)$.

Se va a ver que el método además sirve para resolver la situación *supersensible* [14,19] planteada por Williams [36] (ver también Kopell [11]), en la cual una perturbación trascendentalmente pequeña en la EDO puede provocar un cambio de orden uno en la solución resonante.

Se considera la EDO perturbada

$$\varepsilon y'' - x^m p(x) y' = \varepsilon^{\frac{-1}{m+1}} e^{-M/\varepsilon} q(x) [y - C(\varepsilon)],$$

donde intervienen adicionalmente la constante positiva M , la función suave q tal que $q(0) > 0$, y la función real analítica $C(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i C_i$ con $C_0 \neq 0$.

Como la perturbación es trascendentalmente pequeña (mientras y se mantenga acotada), el MEAE da el mismo resultado como en el caso no perturbado que se acaba de tratar.

Se deriva una condición de frontera adicional de la misma manera, usando el factor integrante $\exp[-P(x)/\varepsilon]$ e integrando de $x = -1$ a $x = L(\varepsilon)$; resulta

$$\begin{aligned} \varepsilon y'(L(\varepsilon), \varepsilon) \exp[-P(L(\varepsilon))/\varepsilon] - \varepsilon y'(-1, \varepsilon) \exp[-P(-1)/\varepsilon] \\ = \varepsilon^{\frac{-1}{m+1}} e^{-M/\varepsilon} \int_{-1}^{L(\varepsilon)} q(s) [y(s, \varepsilon) - C(\varepsilon)] \exp[-P(s)/\varepsilon] ds. \end{aligned}$$

Como el único valor mínimo de $P(s)$ cuando s está entre -1 y $L(\varepsilon)$ es $P(0) = 0$, y como $P(s) = \frac{p(0)}{m+1} s^{m+1} + \dots$, el método de Laplace (ver, por ejemplo, Holmes [9, página 306]) proporciona la estimación

$$\varepsilon^{\frac{-1}{m+1}} \int_{-1}^{L(\varepsilon)} q(s) [y(s, \varepsilon) - C(\varepsilon)] \exp[-P(s)/\varepsilon] ds = \mu [y(0, 0) - C_0] + O(\varepsilon),$$

donde μ es la constante $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2q(0)\Gamma(1/(m+1))}{m+1\sqrt{(m+1)^m p(0)}}$. La condición adicional se transforma en

$$\begin{aligned} [(B_0 - k_0)L_0^m p(L_0) + O(\varepsilon)] e^{-P(L(\varepsilon))/\varepsilon} + [(A_0 - k_0)p(-1) + O(\varepsilon)] e^{-P(-1)/\varepsilon} \\ = [\mu(k_0 - C_0) + O(\varepsilon)] e^{-M/\varepsilon}. \end{aligned}$$

Si $M > \min\{P(-1), P(L_0)\}$, la perturbación introducida en la EDO es demasiado pequeña para tener efecto perceptible y valen las Proposiciones 4.1, 4.2 y 4.3.

Si $M < \min\{P(-1), P(L_0)\}$, la perturbación domina los demás efectos e impone $k_0 = C_0$ como amplitud de la resonancia en primera aproximación.

Si $M = \min\{P(-1), P(L_0)\}$, el valor de k_0 queda determinado como

$$k_0 = \begin{cases} \frac{\lambda(L_0, L_1)B_0 + \mu C_0}{\lambda(L_0, L_1) + \mu} & \text{si } M = P(L_0) < P(-1), \\ \frac{p(-1)A_0 + \lambda(L_0, L_1)B_0 + \mu C_0}{p(-1) + \lambda(L_0, L_1) + \mu} & \text{si } M = P(L_0) = P(-1), \\ \frac{p(-1)A_0 + \mu C_0}{p(-1) + \mu} & \text{si } M = P(-1) < P(L_0). \end{cases}$$

Todos estos resultados supersensibles (donde aparece la nueva constante C_0) son consistentes con lo obtenido en [15] mediante dinámica metaestable.

5 Otros problemas exitosamente resueltos

En [18], se aplicó el método propuesto nuevo además a los casos de indeterminación siguientes.

- Una ecuación propuesta por Kreiss y Parter [13]

$$\varepsilon y'' - xy' + \frac{xy}{a+x} = 0,$$

donde el número real a es tal que $a > 1$ (ellos usaron $a = 2$).

- La ecuación de Hermite singularmente perturbada [11]

$$\varepsilon y'' - xy' + qy = 0,$$

donde está dado el número natural q .

- La misma ecuación, con perturbación supersensible (comparar con [36])

$$\varepsilon y'' - xy' + qy = \varepsilon^{-q-1/2} e^{-M/\varepsilon} r(x) [y - C(\varepsilon)h(x, \varepsilon)],$$

donde intervienen adicionalmente la constante positiva M , la función suave r tal que $r(0) > 0$, la función real analítica $C = C(\varepsilon)$ con $C_0 \neq 0$ y la función polinomial de grado q en x y grado $[q/2]$ (parte entera de $q/2$) en ε

$$h(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{[q/2]} \frac{q!}{(q-2i)!} \frac{(-\varepsilon/2)^i}{i!} x^{q-2i}.$$

- Una ecuación de Hermite generalizada, estudiada por Cook y Eckhaus [3] y por Lewis [22]

$$\varepsilon y'' - xy' + (q + ax - a^2\varepsilon)y = 0,$$

donde están dados los números $q \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$.

- Una ecuación con un punto de retorno de orden impar y dos simples en la frontera (comparar con [1])

$$\varepsilon y'' + px^m(x+1)[x - L(\varepsilon)]y' = 0,$$

donde el número real p es positivo, el número natural m es impar y la función real analítica $L = L(\varepsilon)$ da la frontera derecha del dominio.

- Una ecuación de tercer orden (comparar con [10])

$$\varepsilon y''' - xy'' = 0,$$

con dos condiciones de Dirichlet usuales y una de Neuman de tipo mixto:

$$\varepsilon [\alpha(\varepsilon)y'(-1, \varepsilon) + \beta(\varepsilon)y'(L(\varepsilon), \varepsilon)] = C(\varepsilon),$$

siendo α , β y C funciones reales analíticas de ε .

- Una ecuación no lineal que pertenece a una clase de problemas estudiados por Bohé [2]

$$\varepsilon y'' - xy'^{3/2} = 0.$$

- Una ecuación con un término no local (comparar con [16])

$$\varepsilon y'' - xy' + y - M_\varepsilon[y(\cdot, \varepsilon)] = 0,$$

donde el funcional M_ε es el promedio común tal que

$$M_\varepsilon[y] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{L(\varepsilon) + 1} \int_{-1}^{L(\varepsilon)} y(s) ds,$$

para cualquier función y integrable en el intervalo $[-1, L(\varepsilon)]$.

Se consideró además un caso que no es de EDO, cuya resolución se presenta en la sección siguiente.

6 Ecuación en derivadas parciales

Se considera el PVF elíptico en un rectángulo del plano xy

$$\begin{cases} \varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} - xu_x - yu_y = 0, & -1 \leq x \leq L, \quad -1 \leq y \leq M, \\ u(-1, y, \varepsilon) = A(y, \varepsilon), \quad u(L, y, \varepsilon) = B(y, \varepsilon), \\ u(x, -1, \varepsilon) = C(x, \varepsilon), \quad u(x, M, \varepsilon) = D(x, \varepsilon), & 0 < \varepsilon \ll 1, \end{cases} \quad (6.1)$$

donde están dadas las dos constantes positivas L y M aquí independientes del parámetro de perturbación ε , y las funciones reales analíticas A , B , C y D las cuales satisfacen condiciones de consistencia entre sí: $A(-1, \varepsilon) = C(-1, \varepsilon)$, $B(M, \varepsilon) = D(L, \varepsilon)$, $A(M, \varepsilon) = D(-1, \varepsilon)$ y $B(-1, \varepsilon) = C(L, \varepsilon)$.

Con el objeto de aplicar el MEAE, se empieza buscando una función regular $U = U(x, y, \varepsilon)$ que satisfaga la ecuación reducida. La convergencia, en una región “exterior”, de la solución del PVF (6.1) hacia la de un problema reducido apropiado, está bien establecida para los PVF de su clase (Lions [24]).

Las soluciones no constantes de la ecuación hiperbólica $xU_x + yU_y = 0$, del tipo $f(-y/x)$ en el triángulo $-1 \leq x \leq y \leq -Mx$, del tipo $f(-x/y)$ en el triángulo $-1 \leq y \leq x \leq -Ly$, del tipo $f(Ly/x)$ en el triángulo $-x \leq Ly \leq Mx \leq ML$ y del tipo $f(Mx/y)$ en el triángulo $-y \leq Mx \leq Ly \leq LM$, implican una singularidad en el origen del plano, punto de retorno de la ecuación. Por lo tanto, para poder ser regular, la solución exterior es de la forma

$$U(x, y, \varepsilon) = k(\varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i k_i \quad (x, y) \in (-1, L) \times (-1, M),$$

donde los términos k_i son constantes reales.

Esto implica desde ya que si ninguna de las funciones dadas A , B , C o D es constante, se pueden esperar cuatro capas de frontera, una en cada lado del rectángulo.

La averiguación de una capa de frontera en el lado oeste del rectángulo pasa por la sustitución de la coordenada x en una vecindad del borde $x = -1$ por la variable local $t = (x + 1)/\varepsilon$. El problema correspondiente es

$$\begin{cases} \ddot{u} + \varepsilon^2 u_{yy} + (1 - \varepsilon t)\dot{u} - \varepsilon y u_y = 0, & 0 \leq t < \infty, \quad -1 \leq y \leq M, \\ u(0, y, \varepsilon) = A(y, \varepsilon), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, y, \varepsilon) = k(\varepsilon). \end{cases}$$

El término dominante local $u_0 = u_0(t, y)$ debe satisfacer

$$\ddot{u}_0 + \dot{u}_0 = 0, \quad u_0(0, y) = A_0(y), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u_0(t, y) = k_0;$$

por lo tanto, resulta

$$u_0(t, y) = k_0 + [A_0(y) - k_0]e^{-t}, \quad 0 \leq t < \infty, \quad -1 \leq y \leq M.$$

Procediendo de manera similar para el lado sur del rectángulo con la nueva variable local $t = (y + 1)/\varepsilon$, se obtiene

$$u_0(x, t) = k_0 + [C_0(x) - k_0]e^{-t}, \quad -1 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Para el lado este, la variable local es $t = (x - L)/\varepsilon$ y el problema correspondiente es

$$\begin{cases} \ddot{u} + \varepsilon^2 u_{yy} - (L + \varepsilon t)\dot{u} - \varepsilon y u_y = 0, & -\infty < t \leq 0, \quad -1 \leq y \leq M, \\ u(0, y, \varepsilon) = B(y, \varepsilon), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t, y, \varepsilon) = k(\varepsilon). \end{cases}$$

El término dominante local $u_0 = u_0(t, y)$ debe satisfacer

$$\ddot{u}_0 - L\dot{u}_0 = 0, \quad u_0(0, y) = B_0(y), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} u_0(t, y) = k_0;$$

por lo tanto, resulta

$$u_0(t, y) = k_0 + [B_0(y) - k_0]e^{Lt}, \quad -\infty < t \leq 0, \quad -1 \leq y \leq M.$$

Procediendo de manera similar para el lado norte del rectángulo con la nueva variable local $t = (y - M)/\varepsilon$, se obtiene

$$u_0(x, t) = k_0 + [D_0(x) - k_0]e^{Mt}, \quad -1 \leq x \leq L, \quad -\infty < t \leq 0.$$

De todo lo anterior, se desprende un *ansatz* de aproximación asintótica compuesta al orden uno,

$$\begin{aligned} u(x, y, \varepsilon) \sim & k_0 + [A_0(y) - k_0]e^{-(x+1)/\varepsilon} + [C_0(x) - k_0]e^{-(y+1)/\varepsilon} \\ & + [B_0(y) - k_0]e^{L(x-L)/\varepsilon} + [D_0(x) - k_0]e^{M(y-M)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+), \end{aligned} \quad (6.2)$$

donde la constante real k_0 quedó sin determinar.

Se recurre entonces a derivar una condición de frontera adicional a partir de la ecuación en derivadas parciales. Al multiplicarla por el factor no nulo $\exp(-\frac{x^2+y^2}{2\varepsilon})$, se obtiene la ley de conservación

$$\left(\varepsilon u_x e^{-\frac{x^2+y^2}{2\varepsilon}} \right)_x + \left(\varepsilon u_y e^{-\frac{x^2+y^2}{2\varepsilon}} \right)_y = 0.$$

Integrando respecto de x entre -1 y L , y respecto de y entre -1 y M , viene la nueva condición de frontera

$$\int_{-1}^M \left[\varepsilon u_x(L, y, \varepsilon) e^{-\frac{L^2}{2\varepsilon}} - \varepsilon u_x(-1, y, \varepsilon) e^{-\frac{1}{2\varepsilon}} \right] e^{-\frac{y^2}{2\varepsilon}} dy + \int_{-1}^L \left[\varepsilon u_y(x, M, \varepsilon) e^{-\frac{M^2}{2\varepsilon}} - \varepsilon u_y(x, -1, \varepsilon) e^{-\frac{1}{2\varepsilon}} \right] e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}} dx = 0. \quad (6.3)$$

Se pueden usar las soluciones interiores dominantes para estimar los integrandos:

$$\int_{-1}^M \left\{ L[B_0(y) - k_0] e^{-\frac{L^2}{2\varepsilon}} + [A_0(y) - k_0] e^{-\frac{1}{2\varepsilon}} \right\} e^{-\frac{y^2}{2\varepsilon}} dy + \int_{-1}^L \left\{ M[D_0(x) - k_0] e^{-\frac{M^2}{2\varepsilon}} + [C_0(x) - k_0] e^{-\frac{1}{2\varepsilon}} \right\} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}} dx \sim 0.$$

Al aplicar el método de Laplace y simplificando por $\sqrt{2\pi\varepsilon}$, se sigue finalmente la condición

$$L[B_0(0) - k_0] e^{-\frac{L^2}{2\varepsilon}} + M[D_0(0) - k_0] e^{-\frac{M^2}{2\varepsilon}} + [A_0(0) + C_0(0) - 2k_0] e^{-\frac{1}{2\varepsilon}} \sim 0.$$

La indeterminación queda entonces eliminada de la manera siguiente.

$$k_0 = \begin{cases} B_0(0) & \text{si } L < \min\{M, 1\}, \\ D_0(0) & \text{si } M < \min\{L, 1\}, \\ [B_0(0) + D_0(0)]/2 & \text{si } L = M < 1, \\ [A_0(0) + C_0(0)]/2 & \text{si } 1 < \min\{L, M\}, \\ [A_0(0) + B_0(0) + C_0(0)]/3 & \text{si } L = 1 < M, \\ [A_0(0) + C_0(0) + D_0(0)]/3 & \text{si } M = 1 < L, \\ [A_0(0) + B_0(0) + C_0(0) + D_0(0)]/4 & \text{si } L = M = 1. \end{cases}$$

Estos resultados son consistentes con lo obtenido por Grasman y Matkowsky [8] usando su método de cálculo variacional. El valor de la constante k_0 (valor límite de la solución en todo el interior del rectángulo) está determinado por el o los puntos más cercanos al origen-punto de retorno, puntos de contacto con la frontera del círculo interior al rectángulo centrado en el origen y de radio máximo: según los valores de L y M , son uno o varios de los puntos $(0, -1)$, $(L, 0)$, $(0, M)$ y $(-1, 0)$, en los cuales están impuestos los valores $C(0, \varepsilon)$, $B(0, \varepsilon)$, $D(0, \varepsilon)$ y $A(0, \varepsilon)$, respectivamente.

7 Conclusión

Los problemas singularmente perturbados que exhiben el fenómeno de resonancia de Ackerberg y O'Malley representan un reto difícil para el científico interesado en conocer el comportamiento preciso de sus soluciones y su dependencia del parámetro pequeño ε , debido al fracaso del método de expansiones asintóticas empatadas que, en las demás situaciones, le aporta toda la información que busca. Las alternativas de resolución ofrecidas en la literatura especializada involucran alejarse del análisis asintótico estándar, sin ofrecer demostración rigurosa de la validez de los resultados así conseguidos.

El método dado a conocer en este artículo ofrece una alternativa más asequible porque se ha visto que involucra los mismos procedimientos básicos que se emplean de manera rutinaria en el manejo de las ecuaciones diferenciales ordinarias clásicas.

Además, la efectividad del método queda establecida con la resolución de prácticamente todos los problemas cuyo carácter resonante haya sido debidamente demostrado en la literatura, con comprobación de los resultados específicos mediante la estimación de la solución exacta cuando esté disponible o mediante la consistencia con los resultados de otro procedimiento.

También el método ha resultado versátil, ya que ha sido capaz de resolver los casos excepcionales de supersensibilidad así como los problemas de estructura diferente que presenten una indeterminación análoga, un ejemplo se ha visto con la ecuación en derivadas parciales tratada en la Sección 6.

Agradecimientos

In memoriam: Agradecimiento eterno al Profesor Bob O'Malley (1939-2020), primera autoridad incontestable en la teoría, el análisis, los métodos, las aplicaciones y la historia de las perturbaciones singulares, pero sobre todo maestro ejemplar, de una humanidad fuera de lo común, cuya carismática personalidad ha marcado profundamente a quienes se beneficiaron de sus enseñanzas, y fuimos muchísimos en el mundo entero, gracias a su disposición siempre abierta y atenta para todos.

Referencias

- [1] Ackerberg, R.C., O'Malley, Jr., R.E.; *Boundary layer problems exhibiting resonance*, Stud. Appl. Math., **49**(3) (1970), 277 - 295.
- [2] Bohé, A.; *Free layers in a singularly perturbed boundary value problem*, SIAM J. Appl. Anal., **21**(5) (1990), 1264 -1280.
- [3] Cook, L.P., Eckhaus, W.; *Resonance in a boundary value problem of singular perturbation type*, Stud. Appl. Math., **52**(2) (1973), 129 - 139.
- [4] de Groen, P.P.N.; *The nature of resonance in a singular perturbation problem of turning point type*, SIAM J. Math. Anal., **11**(1) (1980), 1 - 22.
- [5] De Maesschalck, P.; *Ackerberg-O'Malley resonance in boundary value problems with a turning point of any order*, Comm. Pure Appl. Anal., **6**(2) (2007), 311 - 333.
- [6] Fruchard, A., Schäfer, R.; *Composite asymptotic expansions*, Springer-Verlag, Berlín Heidelberg, 2013.
- [7] Fu-ru, J.; *On the boundary value problems for ordinary differential equations with turning points*, Appl. Math. Mech., **12**(2) (1991), 121 - 129.
- [8] Grasman, J., Matkowsky, B.J.; *A variational approach to singularly perturbed boundary value problems for ordinary and partial differential equations with turning points*, SIAM J. Appl. Math., **32**(3) (1977), 588 - 597.
- [9] Holmes, M.H.; *Introduction to perturbation methods*, Springer, Nueva York, 2013.

- [10] Jiang, F.-r., Jin, Q.-n.; *Asymptotic solutions of boundary value problems for third-order ordinary differential equations with turning points*, Appl. Math. Mech., **22**(4) (2001), 394 - 403.
- [11] Kopell, N.; *A geometric approach to boundary layer problems exhibiting resonance*, SIAM J. Appl. Math., **37**(2) (1979), 436 - 458.
- [12] Kreiss, H.-O.; *Resonance for singular perturbation problems*, SIAM J. Appl. Math., **41**(2) (1981), 331 - 344.
- [13] Kreiss, H.O., Parter, S.V.; *Remarks on singular perturbations with turning points*, SIAM J. Math. Anal., **5**(2) (1974), 230 - 251.
- [14] Laforgue, J.; *Supersensibilidad en un modelo de agregación con tiempo discreto*, Divulg. Mat., **6**(2) (1998), 113 - 119.
- [15] Laforgue, J.; *Odd-order turning point: resonance and dynamic metastability*, En: Tercer congreso sobre ecuaciones diferenciales y aplicaciones, Mayo 1997 (Rueda, A.D., Guíñez, J.), La Universidad del Zulia, Maracaibo, (1998), **II**, 17 - 23.
- [16] Laforgue, J.; *Estudio asintótico de un impulso metaestable para una ecuación con un término no local*, Pro Math., **14**(27-28) (2000), 13 - 23.
- [17] Laforgue, J.; *Métodos de perturbaciones para ecuaciones algebraicas y diferenciales*, XI T-ForMa, Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente, Cumaná, 2011.
- [18] Laforgue, J.; *Resolución de la indeterminación en la resonancia de Ackerberg y O'Malley*, Trabajo de Ascenso, Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente, Cumaná, 2022.
- [19] Laforgue, J.G., O'Malley, Jr., R.E.; *Supersensitive boundary value problems*, En: Asymptotic and numerical methods for partial differential equations with critical parameters (Kaper, H.G., Garbey, M.), Kluwer, Dordrecht, (1993), 215 - 223.
- [20] Lagerstrom, P.; *Matched asymptotic expansions - Ideas and techniques*, Springer-Verlag, Nueva York, 1988.
- [21] Lakin, W.D.; *Boundary value problems with a turning point*, Stud. Appl. Math., **51**(3) (1972), 261 - 275.
- [22] Lewis, G.N.; *Turning point problems and resonance*, IMA J. Appl. Math., **28** (1982), 169 - 183.
- [23] Lin, C.H.; *The sufficiency of Matkowsky-condition in the problem of resonance*, Trans. Amer. Math. Soc., **278**(2) (1983), 647 - 670.
- [24] Lions, J.L.; *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal*, Springer-Verlag, Berlín Heidelberg, 1973.
- [25] MacGillivray, A.D.; *A method for incorporating transcendently small terms into the method of matched asymptotic expansions*, Stud. Appl. Math., **99** (1997), 285 - 310.
- [26] Matkowsky, B.J.; *On boundary layer problems exhibiting resonance*, SIAM Review, **17**(1) (1975), 82 - 100. *Errata*, SIAM Review, **18**(1) (1976), 112 - 112.

- [27] McKelvey, R., Bohac, R.; *Ackerberg-O'Malley resonance revisited*, Rocky Mountain J. Math., **6** (1976), 637 - 650.
- [28] Nijijima, K.; *Approximate solutions of singular perturbation problems with a turning point*, Funkcialaj Ekvacioj, **24** (1981), 259 - 280.
- [29] Olver, F.W.J.; *Sufficient conditions for Ackerberg-O'Malley resonance*, SIAM J. Math. Anal., **9**(2) (1978), 328 - 355.
- [30] O'Malley, Jr., R.E.; *Thinking about ordinary differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [31] O'Malley., R.E.; *Historical developments in singular perturbations*, Springer, Cham, 2014.
- [32] Sibuya, Y.; *A theorem concerning uniform simplification at a transition point and the problem of resonance*, SIAM J. Math. Anal., **12**(5) (1981), 653 - 668.
- [33] Skinner, L.A.; *Uniform solution of boundary layer problems exhibiting resonance*, SIAM J. Appl. Math., **47**(2) (1987), 225 - 231.
- [34] Srinivasan, R.; *A variational principle for the Ackerberg-O'Malley resonance problem*, Stud. Appl. Math., **79** (1988), 271 - 289.
- [35] Watts, A.M.; *A singular perturbation problem with a turning point*, Bull. Austral. Math. Soc., **5** (1971), 61 - 73.
- [36] Williams, M.; *Another look at Ackerberg-O'Malley resonance*, SIAM J. Appl. Math., **41**(2) (1981), 288 - 293.
- [37] Wong, R.; *Asymptotic approximations of integrals*, Academic Press, San Diego, 1989.
- [38] Wong, R., Yang, H.; *On the Ackerberg-O'Malley resonance*, Stud. Appl. Math., **110** (2003), 157 - 179.
- [39] Zauderer, E.; *Boundary value problems for a second order differential equation with a turning point*, Stud. Appl. Math., **51**(4) (1972), 411 - 413.

Divulgaciones Matemáticas Vol. 23-24, No. 1-2 (2022-2023), pp. 82–106
<https://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones/>
DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.11540455>
(CC BY-NC-SA 4.0)

©Autor(s)
e-ISSN 2731-2437
p-ISSN 1315-2068

Boundary Estimation with the Fuzzy Set Regression Estimator

Estimación Frontera con el Estimador de Regresión con Conjunto Difuso

Jesús A. Fajardo

(jfajardogonzalez@gmail.com; jfajardo@udo.edu.ve)

Departamento de Matemática del Núcleo de Sucre
Universidad de Oriente
Cumaná 6101, República Bolivariana de Venezuela

Abstract

In order to extend the properties of the fuzzy set regression estimation method and provide new results related to the nonparametric regression estimation problems not based on kernels, this paper analyzes the possible boundary effects, if any, of the fuzzy set regression estimator and presents a criterion to remove it. Moreover, a boundary fuzzy set estimator is proposed which is defined as a particular class of fuzzy set regression estimators, where the bias, variance, mean squared error and function that minimizes the mean squared error of the proposed estimator are given. Finally, these theoretical findings are illustrated through some numerical examples, and with one real data example. Simulations show that the proposed estimator has better performance at points near zero in a spread neighborhood of the smoothing parameter, when it is compared with a general boundary kernel regression estimator for the two regression models and two density functions considered. The previously exposed represents the natural extension of the recent results to the boundary fuzzy set density estimator case.

Palabras y frases clave: Fuzzy set regression estimator, boundary estimation.

Resumen

Con el fin de ampliar las propiedades del método de estimación de regresión con conjunto difuso y proporcionar nuevos resultados relacionados con los problemas de estimación no paramétrica de la regresión no basados en núcleos, este artículo analiza los posibles efectos frontera, si los hay, del estimador de regresión con conjunto difuso y presenta un criterio para eliminarlo. Además, se propone un estimador frontera con conjunto difuso el cual se define como una clase particular de estimadores de regresión con conjunto difuso, donde el sesgo, la varianza, el error cuadrático medio y la función que minimiza el error cuadrático medio del estimador propuesto son presentados. Finalmente, estos resultados teóricos se ilustran a través de algunos ejemplos numéricos y con un ejemplo de datos reales. Las simulaciones muestran que el estimador propuesto tiene un mejor desempeño en los puntos cercanos a cero en un entorno disperso del parámetro de suavizado, cuando se compara con un estimador general frontera de la regresión con núcleo para los dos modelos de regresión y las dos funciones de densidad consideradas. Lo expuesto anteriormente representa la extensión

Recibido 04/05/2023. Revisado 14/7/2023. Aceptado 12/12/2023.
MSC (2010): Primary 62G99; Secondary 62G05.
Autor de correspondencia: Jesús Fajardo.

natural de los resultados recientes al caso del estimador frontera de la densidad con conjunto difuso.

Key words and phrases: Estimador de regresión con conjunto difuso, estimación frontera.

1 Introducción

Let $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ be n independent copies of a random vector (X, Y) . The regression model is given by

$$Y_i = r(X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

where the observation errors $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ are random variables such that

$$\mathbb{E}[\varepsilon_i | X] = 0, \quad \text{Var}[\varepsilon_i | X] = \sigma^2 < \infty, \quad i = 1, \dots, n,$$

and unknown regression function $r(t) = \mathbb{E}[Y | X = t]$, for $t \in \mathbb{R}$. The main goal of this paper is to introduce a new method to estimate the regression function r at points near zero in a spread neighborhood of the smoothing parameter.

Numerous nonparametric methods have been developed in the literature to estimate r , with independent pairs of data. Nevertheless, most of those estimation methods are not consistent when the support of r has finite endpoints, seriously affecting the overall performance of the implemented estimators. The lack of consistency is a consequence of the so called “boundary effects,” where the connection between the estimation methods and boundary effects is reflected in the performances of the proposed estimators for each method. This makes their performances at boundary points usually to differ from the performances at interior points. Theoretically, the convergence rates of the estimators at boundary points are slower than the convergence rates at interior points of the support of r . Strictly speaking, the bias of the estimators is of order $O(b_n)$ instead of $O(b_n^2)$ at boundary points, where b_n is the smoothing parameter or bandwidth ($b_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$). This imposes the need to carry out a study to detect whether the boundary effects are present or not in the estimator of any function, since it is not obvious that the behavior of the estimator is the same at both the boundary and the interior points. To remove those boundary effects in kernel regression estimation, a variety of methods have been developed in the literature. An excellent summary of some well-known methods is given in [24]. Finally, it is important to remark here that the above phenomenon, called “boundary effects” in the estimation theory, also affects the fuzzy set regression estimator introduced in [9].

In this paper, a criterion to remove the boundary effects, without boundary modifications, in the nonparametric fuzzy set regression estimator is proposed, obtaining a natural extension of the approach introduced in [8] to the regression case. For this, at each point near 0 in a b_n spread neighborhood, the proposed boundary estimator is defined as a particular class of fuzzy set regression estimators, where the bias, variance and optimal mean squared error (MSE) are given. Moreover, the function that minimizes the MSE is obtained. Simultaneously, extensive simulations are carried out to compare the local MSE of the proposed boundary estimator with the local MSE of the general boundary estimator given in [24] at points near 0 in a b_n spread neighborhood, observing that the local MSE of the proposed boundary estimator is the smallest for the two regression models and the two density functions considered. This reduction shows that the boundary fuzzy set regression estimator has better performance than the estimator studied

in [24]. Besides, it is appropriate to note that the above results extend the properties of the fuzzy set regression estimation method, providing new properties related to the nonparametric regression estimation problems not based on kernels.

The particular choice above was based mainly on the results of the simulations obtained in [24], for the two regression models and the two density functions considered in this work, which showed that the general boundary kernel regression estimator defined in the above paper performed quite well when it was compared with both local linear and classical kernel regression estimators. Among other reasons that supported the above particular choice, the theoretical properties that are shared by the boundary estimator defined in [24] and the proposed boundary estimator are highlighted: non-negativity, “natural boundary continuation” and they improve the bias but holding on to the low variances. Moreover, it is worth pointing out that the paper [24] extends the approach introduced in [17] to the regression case, by defining the popular Nadaraya-Watson estimator, [20, 27], in terms of the boundary kernel density estimator given in [17]. It is worth noting that the results of the simulations presented in [17] for the four shapes of densities considered showed that the boundary kernel density estimator introduced in the above work performed quite well when it was compared with the estimators boarded in [16, 29] and its simple modification which allows obtaining the local linear fitting estimator [13, 30]. Nonetheless, the results of the simulations obtained in [8], for the four shapes of densities considered in [17], showed that the boundary fuzzy set density estimator performed quite well when it was compared with the boundary kernel estimator defined in [17]. Now, combining this last result with the idea established in [24], it is reasonable to define an estimator of the Nadaraya-Watson type regression function in terms of the boundary fuzzy set density estimator, in order to achieve the objectives emphasized in this paper and to solve the problem proposed in [8]. On the other hand, a literature review on the proposed topic revealed that there is not evidence of publications with respect to the comparison of the performance between other methods and the method introduced in [24]. Besides, the author guarantees a conclusion analogous to the previous one for the fuzzy set regression estimator case. Finally, it is necessary to point out that in the recent works [1–4, 15, 18, 19, 25] the problems of nonparametric regression estimation are studied under specific conditions and new regression estimators are introduced through the approach of each previous work. It should be noted that the method introduced in [15] combines the smoothing spline and kernel functions. Nonetheless, in the papers [1, 3, 4, 18] and [2, 19, 25] both Nadaraya-Watson and local linear estimators are the main actors, respectively. This last point suggests the combination of the approaches in the works [2, 19, 25] and [7] to future research, since in [7] was shown that the fuzzy set regression estimator has better performance than the local linear regression smoothers.

This paper is organized as follows. In Section 2, the boundary effects in the fuzzy set regression estimator are studied and the criterion to remove such effects is presented. Moreover, the boundary fuzzy set regression estimator is defined and its asymptotic properties are introduced. Besides, the function that minimizes the MSE of the proposed boundary estimator is calculated. The simulation studies and data analysis are introduced in Sections 3 and 4, respectively. Final comments are given in Section 5.

2 Fuzzy set regression estimator and boundary effects

A study to detect the presence or not of the boundary effects in the estimator of any function is necessary since it is not obvious that the behavior of the estimator can be the same at the

boundary points as in the interior points. Consequently, this section analyzes the possible boundary effects, if any, of the fuzzy set regression estimator given in [9], and introduces a criterion to remove it, without boundary modifications. Moreover, the definition of the boundary fuzzy set regression estimator and its asymptotic properties are given. Also, the function that minimizes the *MSE* of the proposed boundary estimator is obtained.

2.1 Fuzzy set estimator of the regression function

It is important to emphasize that the fuzzy set regression estimation method introduced in [9] is based on defining an estimator of the Nadaraya-Watson type for independent pairs of data in terms of the fuzzy set density estimator given in [10]. In order to familiarize the reader with the above method, a general summary of the details that allowed to define the estimator introduced in [10] will be presented.

For independent copies X_1, \dots, X_n of a random variable X in \mathbb{R} , whose distribution $\mathcal{L}(X)$ has a Lebesgue density f_X near some fixed point $x_0 \in \mathbb{R}$, a fuzzy set estimator of f_X , at the point $x_0 \in \mathbb{R}$, is defined in [11], by means of thinned point processes N_n^{φ} , a process framed inside the theory of the point processes, as follows

$$\hat{\theta}_n(x_0) = \frac{N_n^{\varphi(t)}(\mathbb{R})}{n a_n} = \frac{1}{n a_n} \sum_{i=1}^n U_i, \quad t \in \mathbb{R},$$

where

$$N_n^{\varphi} = \frac{1}{n a_n} \sum_{i=1}^n U_i \varepsilon_{X_i},$$

$\varphi_n(t) = \mathbb{P}(U_i = 1 | X_i = t)$, ε_x is the random Dirac measure, $a_n > 0$ is a smoothing parameter or bandwidth such that $a_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, and the random variables U_i , $1 \leq i \leq n$, are independent with values in $\{0, 1\}$, which determines whether X_i belongs to the neighborhood of x_0 or not. See e.g. [21], for more details on the theory of the point processes and thinned point processes. In [11], only the asymptotic efficiency within the class of all estimators that are based on randomly selected points from the sample X_1, \dots, X_n was proved. Efficiency was established using LeCam's LAN theory. Although the almost sure and uniform convergence properties over a compact subset on \mathbb{R} are not studied, the pointwise convergence in law whose distribution limit has an asymptotic variance that depends only of $f_X(x_0)$ is proposed. On the other hand, it is opportune to point out that the random variables that define the estimator $\hat{\theta}_n$ do not possess, for example, precise functional characteristics in regards to the point of estimation. This absence of functional characteristics complicates the evaluation of the estimator using a sample. Thus, the simulations to estimate the density function will be more complicated. However, to overcome the difficulties presented by the estimator introduced in [11], a particular case of the above estimator was defined in [10].

Let X be a real random variable whose distribution $\mathcal{L}(X)$ has a Lebesgue density f_X near some fixed point $x_0 \in \mathbb{R}$. For each measurable Borel function $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ and each random variable V , uniformly distributed on $[0, 1]$ and independent of X , the random variable $\mathbb{I}_{[0, \varphi(X)]}(V)$ satisfies $\varphi(t) = \mathbb{P}(\mathbb{I}_{[0, \varphi(X)]}(V) = 1 | X = t)$. This simple observation allows us to construct a fuzzy set estimator of f_X to estimate $f_X(x_0)$, which satisfies the conditions required in [11]. Moreover, as the local behavior of the distribution of X will be evaluated, it is obvious that only observations X_i in a neighborhood of x_0 can reasonably contribute to the estimation of $f_X(x_0)$.

Let X_1, \dots, X_n be an independent random sample of X . Let V_1, \dots, V_n be independent random variables uniformly distributed on $[0, 1]$ and independent of X_1, \dots, X_n . Let $\mathbb{I}_{[0, \varphi(\frac{x_i - x_0}{b_n})]}(V_i)$ be random variables where $b_n > 0$ is a smoothing parameter or bandwidth such that $b_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. For each $t \in \mathbb{R}$, one obtains that

$$\varphi\left(\frac{t - x_0}{b_n}\right) = \mathbb{P}\left(\mathbb{I}_{[0, \varphi(\frac{x_i - x_0}{b_n})]}(V_i) = 1 \mid X_i = t\right),$$

where $\varphi_n(t) = \varphi\left(\frac{t - x_0}{b_n}\right)$ is a Markov kernel (see [21], Section 1.4). Thus, for independent copies (X_i, V_i) , $1 \leq i \leq n$, of (X, V) , the thinned point process is defined as follows

$$N_n^{\varphi_n}(\cdot) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{[0, \varphi(\frac{x_i - x_0}{b_n})]}(V_i) \varepsilon_{X_i}(\cdot),$$

with underlying point process $N_n(\cdot) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{X_i}(\cdot)$ and a thinning function φ_n (see [21], Section 2.4), where ε_x is the random Dirac measure.

On the other hand, observe that the set of observations or the events $\{X_i = t\}$, $t \in \mathbb{R}$, in a neighborhood of x_0 can now be described by the thinned point process $N_n^{\varphi_n}$, where $\mathbb{I}_{[0, \varphi(\frac{x_i - x_0}{b_n})]}(V_i)$ decides, whether X_i belongs to the neighborhood of x_0 or not. Precisely, $\varphi_n(t)$ is the probability that the observation $X_i = t$ belongs to the neighborhood of x_0 . Note that this neighborhood is not explicitly defined, but it is actually a fuzzy set in the sense of the paper [28], given its membership function φ_n . The thinned process $N_n^{\varphi_n}$ is therefore a fuzzy set representation of the data (see [11], Section 2).

Next, the fuzzy set density estimator introduced in [10] is presented, which is a particular case of the estimator proposed in [11].

Definition 1. Let X_1, \dots, X_n be an independent random sample of X . Let V_1, \dots, V_n be independent random variables uniformly distributed on $[0, 1]$ and independent of X_1, \dots, X_n . Let φ be such that $a_n = b_n \int \varphi(u) du$ and $0 < \int \varphi(u) du < \infty$. Then, the fuzzy set estimator of the density function f_x at the point $x_0 \in \mathbb{R}$ is defined as

$$\hat{\vartheta}_n(x_0) = \frac{1}{na_n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{[0, \varphi(\frac{x_i - x_0}{b_n})]}(V_i) = \frac{1}{na_n} \tau_n(x_0). \quad (1)$$

Observe that estimator (1) can be written in terms of a fuzzy set representation of the data, since $\hat{\vartheta}_n(x_0) = (na_n)^{-1} N_n^{\varphi_n}(\mathbb{R})$. This equality justifies the fuzzy set term of estimator (1), where the thinning function φ_n can be used to select points of the sample with different probabilities, in contrast to the kernel estimator, which assigns equal weight to all points of the sample. Moreover, it is important to highlight that (1) is of easy practical implementation and the random variable $\tau_n(x_0)$ is binomial $\mathcal{B}(n, \alpha_n(x_0))$ distributed with

$$\alpha_n(x_0) = \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{[0, \varphi(\frac{x - x_0}{b_n})]}(V)\right] = \mathbb{P}\left(\mathbb{I}_{[0, \varphi(\frac{x - x_0}{b_n})]}(V) = 1\right) = \mathbb{E}\left[\varphi\left(\frac{X - x_0}{b_n}\right)\right]. \quad (2)$$

In what follows, it will be assumed that $\alpha_n(x_0) \in (0, 1)$. Besides, throughout this article φ is the thinning function that characterizes to estimator (1), and the abbreviation “w.t.f.” will be used

to the phrase “with thinning function.” See [6] and [10], for more details on the asymptotic and convergence properties of estimator (1).

Next, the regression estimator of the Nadaraya-Watson type introduced in [9], for independent pairs of data, is presented, which it is defined in terms of estimator (1).

Definition 2. Let $((X_1, Y_1), V_1), \dots, ((X_n, Y_n), V_n)$ be independent copies of a random vector $((X, Y), V)$, where V_1, \dots, V_n are independent random variables uniformly distributed on $[0, 1]$, and independent of $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$. Let φ be such that $a_n = b_n \int \varphi(u) du$ and $0 < \int \varphi(u) du < \infty$. Then, the fuzzy set estimator of the regression function r at the point $x_0 \in \mathbb{R}$ is defined as

$$\hat{r}_n(x_0) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n Y_i \mathbb{I}_{[0, \varphi(\frac{X_i - x_0}{b_n})]}(V_i)}{\tau_n(x_0)} & \text{if } \tau_n(x_0) \neq 0 \\ 0 & \text{if } \tau_n(x_0) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

where τ_n is given in (1).

As in the case of estimator (1), the function φ characterizes estimator (3). See [5] and [9], for more details on the asymptotic and convergence properties of estimator (3).

2.2 The boundary problem of the fuzzy set regression estimator and its boundary estimator

In order to provide new results related to the nonparametric regression estimation problems not based on kernels, and to ensure the natural extension of the approach to the boundary fuzzy set density estimation case, this section studies the behavior of estimator (3), at the particular points 0 and $x \in (0, b_n]$, under the following conditions:

- C1** Functions f_x and r are at least twice continuously differentiable in a neighborhood of $z \in [0, \infty)$.
- C2** $f_x(z) > 0$.
- C3** Sequence b_n satisfies: $b_n \rightarrow 0$, $nb_n \rightarrow \infty$, as $n \rightarrow \infty$.
- C4** Function φ is symmetrical regarding zero, has compact support on $[-B, B]$, $B > 0$, and it is continuous at 0 with $\varphi(0) > 0$.
- C5** There exists $M > 0$ such that $|Y| < M$ a.s.
- C6** Function $\phi(z) = \mathbb{E}[Y^2|X = z]$ is at least twice continuously differentiable in a neighborhood of $z \in [0, \infty)$.

Next, the results associated with the behavior of the estimator

$$\hat{g}_n(z) = \frac{1}{na_n} \sum_{i=1}^n Y_i \mathbb{I}_{[0, \varphi(\frac{X_i - z}{b_n})]}(V_i), \quad z \in [0, \infty), \quad (4)$$

at the particular points 0 and $x \in (0, b_n]$, are presented. Here, $g(z) = r(z)f_X(z)$, $a_n = b_n \int \varphi(u) du$ and $0 < \int \varphi(u) du < \infty$. Moreover, the function ψ will be defined as $\psi(u) = \frac{\varphi(u)}{\int \varphi(u) du} \mathbb{I}_{[-B, B]}(u)$, and as each $x \in (0, b_n]$ has the form $x = cb_n$, $0 < c \leq 1$, in that which follows, to simplify the notation, x will be written instead of cb_n .

Theorem 1. *Under the conditions (C1) – (C4), we have*

$$\mathbb{E}[\hat{g}_n(0)] = g(0) + \frac{b_n^2}{2} g''(0) \int u^2 \psi(u) du + o(b_n^2).$$

Proof. Replacing z with 0 into (4), given that V and (X, Y) are independent, and taking the conditional expectation with respect to $X = 0$ and $V = v$, we obtain

$$\mathbb{E}[\hat{g}_n(0)] = a_n^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{u}{b_n}\right) g(u) du.$$

Combining (C1) and (C4), we can write the above equality as

$$\mathbb{E}[\hat{g}_n(0)] = \int_{-\frac{B}{b_n}}^B \psi(u) g(ub_n) du.$$

As (C1) allows us to make a the Taylor expansion of function g in the neighborhood of 0, we can rewrite the above equality as

$$\mathbb{E}[\hat{g}_n(0)] = \int_{-\frac{B}{b_n}}^B \left[g(0) + b_n g'(0)u + \frac{b_n^2}{2} u^2 g''(\lambda ub_n) \right] \psi(u) du. \quad (5)$$

Moreover, (C3) allows us to suppose, without loss of generality, that $b_n < 1$. Now, we can guarantee that for $B > 0$

$$\frac{B}{b_n} > B. \quad (6)$$

Combining (C3), (5) and (6), we have

$$\mathbb{E}[\hat{g}_n(0)] = g(0) + \frac{b_n^2}{2} \int u^2 \left[g''(0) + \left(g''(\lambda ub_n) - g''(0) \right) \right] \psi(u) du. \quad (7)$$

Now combining (C1), (C3) and (C4), we obtain

$$\int u^2 \left[g''(\lambda ub_n) - g''(0) \right] \psi(u) du = o(1). \quad (8)$$

The result now follows by combining (7) and (8). \square

Corollary 1. *Under the conditions (C1) – (C4), we have*

$$\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(0)] = f_X(0) + \frac{b_n^2}{2} f_X''(0) \int u^2 \psi(u) du + o(b_n^2).$$

Proof. Setting $Y = 1$, we have $g(0) = f_X(0)$ and $\mathbb{E}[\hat{g}_n(0)] = \mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(0)]$. From Theorem 1, we obtain the result. \square

Theorem 2. *Under the conditions (C1) – (C4), we have*

$$\mathbb{E}[\hat{g}_n(x)] = \int_{-c}^B \left[g(0) + b_n g'(0)u + \frac{b_n^2}{2} g''(0)u^2 \right] \psi(u) du + o(b_n^2).$$

Proof. Replacing z with x into (4), using that V and (X, Y) are independent, and taking the conditional expectation with respect to $X = x$ and $V = v$, we obtain

$$\mathbb{E}[\hat{g}_n(x)] = a_n^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{u-x}{b_n}\right) g(u) du.$$

Combining (C1) and (C4), we can write the above equality as

$$\mathbb{E}[\hat{g}_n(x)] = \int_{-\frac{x}{b_n}}^B \psi(u) g(x + ub_n) du.$$

As (C1) allows us to make a Taylor expansion of function g in the neighborhood of x , we can rewrite the above equality as

$$\mathbb{E}[\hat{g}_n(x)] = \int_{-c}^B \left[g(x) + b_n g'(x)u + \frac{b_n^2}{2} u^2 g''(x + \lambda ub_n) \right] \psi(u) du. \quad (9)$$

Now combining (C1) with (C3), and (C3) with (C4), we obtain

$$h(x) = h(0) + o(1), \text{ for } h = g, g', \quad (10)$$

and

$$\int_{-c}^B u^2 [g''(x + \lambda ub_n) - g''(0)] \psi(u) du = o(1). \quad (11)$$

The result now follows by combining (9), (10) and (11). \square

Corollary 2. *Under the conditions (C1) – (C4), we have*

$$\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(x)] = \int_{-c}^B \left[f_X(0) + b_n f'_X(0)u + \frac{b_n^2}{2} f''_X(0)u^2 \right] \psi(u) du + o(b_n^2).$$

Proof. Setting $Y = 1$, we have $g(x) = f_X(x)$ and $\mathbb{E}[\hat{g}_n(x)] = \mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(x)]$. From Theorem 2, we obtain the result. \square

The above results allow us to guarantee that both (1) and (4) estimators do not present the boundary effects at 0, and they will present the boundary effects at x when $h'(0) \int_{-c}^B u \psi(u) du \neq 0$, for $h = f_X, g$ and for each $c \in (0, 1]$. Moreover, it is important to remark here that Corollaries 1 and 2 are Theorems 1 and 2 in [8].

On the other hand, it is probable enough that estimator (3) presents the above behavior at the particular points 0 and $x \in (0, b_n]$: estimator (3) does not present the boundary effects at 0 and it will present the boundary effects at x when $r'(0) \int_{-c}^B u \psi(u) du \neq 0$, for each $c \in (0, 1]$. The following two theorems allow to confirm the above suspicion.

Theorem 3. *Under the conditions (C1) – (C5), we have*

$$\mathbb{E}[\hat{r}_n(0)] = r(0) + \frac{b_n^2}{2} \left[r''(0) + 2 \frac{r'(0)f'_x(0)}{f_x(0)} \right] \int u^2 \psi(u) du + o(b_n^2).$$

Proof. Let us consider the following decomposition (see, e.g., [12])

$$\hat{r}_n(t) = \frac{\hat{g}_n(t)}{\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(t)]} \left(1 - \frac{\hat{\vartheta}_n(t) - \mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(t)]}{\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(t)]} \right) + \frac{[\hat{\vartheta}_n(t) - \mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(t)]]^2}{[\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(t)]]^2 [\hat{r}_n(t)]^{-1}}. \quad (12)$$

Replacing z with 0 into (12) and taking the expectation, we obtain

$$\mathbb{E}[\hat{r}_n(0)] = \frac{\mathbb{E}[\hat{g}_n(0)]}{\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(0)]} - \frac{A_1}{[\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(0)]]^2} + \frac{A_2}{[\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(0)]]^2},$$

where

$$A_1 = \mathbb{E} \left[\left(\hat{\vartheta}_n(0) - \mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(0)] \right) \hat{g}_n(0) \right] \quad \text{and} \quad A_2 = \mathbb{E} \left[\left(\hat{\vartheta}_n(0) - \mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(0)] \right)^2 \hat{r}_n(0) \right].$$

Combining (C3), (7) and (8), we have

$$\mathbb{E}[\hat{g}_n(0)] = g(0) + o(1). \quad (13)$$

Now setting $Y = 1$, we can write (4) as

$$\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(0)] = f_x(0) + o(1). \quad (14)$$

As the random vectors $((X_i, Y_i), V_i)$, $1 \leq i \leq n$, are identically distributed, we have

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{Cov}[\hat{g}_n(0), \hat{\vartheta}_n(0)] = \frac{1}{(na_n)^2} \sum_{i=1}^n \text{Cov}[Y_i U_i, U_i] = \frac{1}{na_n} \mathbb{E} \left[\frac{YU}{a_n} \right] - \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[\frac{YU}{a_n} \right] \mathbb{E} \left[\frac{U}{a_n} \right] \\ &= \frac{1}{na_n} \mathbb{E}[\hat{g}_n(0)] - \frac{1}{n} \mathbb{E}[\hat{g}_n(0)] \mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(0)], \end{aligned}$$

where $U = \mathbb{1}_{[0, \varphi(\frac{x}{b_n})]}(V) = U^2$. Combining (C3), (13) and (14), we obtain

$$A_1 = \frac{1}{na_n} [g(0) + o(1)] - \frac{1}{n} [g(0) + o(1)] [f_x(0) + o(1)] = \frac{1}{na_n} g(0) + o\left(\frac{1}{nb_n}\right).$$

On the other hand, by (C5) there exists $C > 0$ such that $|\hat{r}_n(0)| \leq C$. Thus, we can write

$$|A_2| \leq C \mathbb{E} \left[\left[\hat{\vartheta}_n(0) - \mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(0)] \right]^2 \right] = \frac{C}{na_n^2} \left(\mathbb{E}[U^2] - (\mathbb{E}[U])^2 \right) = \frac{C}{na_n} \mathbb{E} \left[\frac{U}{a_n} \right] (1 - \mathbb{E}[U]).$$

Now setting $Y = 1$ and combining with (7), we can write

$$\mathbb{E} \left[\frac{U}{a_n} \right] = \mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(0)] = f_x(0) + \frac{b_n^2}{2} \int u^2 \left[f_x''(0) (f_x''(\lambda u b_n) - f_x''(0)) \right] \psi(u) du.$$

Moreover, (C1) implies that f_x'' is bounded in the neighborhood of 0, and (C3) allows us to suppose that $b_n < 1$. Then we can bound $\mathbb{E}[\frac{U}{a_n}]$. Besides, by (2) we can bound $(1 - \mathbb{E}[U])$. Therefore, $A_2 = O(\frac{1}{nb_n})$. Now, we can write

$$\frac{A_1}{\left(\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(0)]\right)^2} = \left(\frac{1}{(f_x(0))^2} + o(1)\right) \left(\frac{1}{nb_n}\right) g(0) + o\left(\frac{1}{nb_n}\right) = o(1), \text{ by (C3),}$$

and

$$\frac{A_2}{\left(\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(0)]\right)^2} = \left(\frac{1}{(f_x(0))^2} + o(1)\right) O\left(\frac{1}{nb_n}\right) = O\left(\frac{1}{nb_n}\right).$$

The last two equalities, imply that

$$\mathbb{E}[\hat{r}_n(0)] = \frac{\mathbb{E}[\hat{g}_n(0)]}{\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(0)]} + O\left(\frac{1}{nb_n}\right).$$

Now combining (C1), (C3) and (C4), we obtain

$$\frac{b_n^2}{2} \int u^2 [g''(\lambda u b_n) - g''(0)] \psi(u) du = o(1). \quad (15)$$

Moreover, combining (7) and (15) we can write

$$\mathbb{E}[\hat{g}_n(0)] = g(0) + \frac{b_n^2}{2} g''(0) \int u^2 \psi(u) du,$$

whence

$$\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(0)] = f_x(0) + \frac{b_n^2}{2} f_x''(0) \int u^2 \psi(u) du.$$

Then

$$\mathbb{E}[\hat{r}_n(0)] = \frac{g(0) + \frac{b_n^2}{2} g''(0) \int u^2 \psi(u) du}{f_x(0) + \frac{b_n^2}{2} f_x''(0) \int u^2 \psi(u) du} + O\left(\frac{1}{nb_n}\right) = H_n(0) + O\left(\frac{1}{nb_n}\right).$$

Next, we will obtain an equivalent expression for $H_n(0)$. Taking the conjugate, we have

$$H_n(0) = \left[g(0) f_x(0) + \frac{b_n^2}{2} \int u^2 \psi(u) du \left(g''(0) f_x(0) - f_x''(0) g(0) \right) - \left(\frac{b_n^2}{2} \right)^2 f_x''(0) g''(0) \right. \\ \left. \left(\int u^2 \psi(u) du \right)^2 \right] [D_n(0)]^{-1},$$

where $D_n(0) = (f_x(0))^2 - \left(\frac{b_n^2 f_x''(0) \int u^2 \psi(u) du}{2}\right)^2$. From (C2) and (C3), we obtain $[D_n(0)]^{-1} = (f_x(0))^{-2} + o(1)$. Thus,

$$\begin{aligned} H_n(0) &= \left[g(0)f_x(0) + \frac{b_n^2}{2} [g''(0)f_x(0) - f_x''(0)g(0)] \int u^2 \psi(u) du \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{b_n^2}{2}\right)^2 f_x''(0)g''(0) \left(\int u^2 \psi(u) du\right)^2 \right] [(f_x(0))^{-2} + o(1)] \\ &= r(0) + \frac{b_n^2}{2} \left[\frac{g''(0)f_x(0) - f_x''(0)g(0)}{(f_x(0))^2} \right] \int u^2 \psi(u) du + o(b_n^2). \end{aligned}$$

Then

$$\mathbb{E}[\hat{r}_n(0)] = r(0) + \frac{b_n^2}{2} \left[r''(0) + 2 \frac{f_x'(0)r'(0)}{f_x(0)} \right] \int u^2 \psi(u) du + o(b_n^2) + O\left(\frac{1}{nb_n}\right).$$

By (C3), we have $(nb_n)^{-1} = o(1)$. The result now follows combining the last two equalities. \square

Theorem 4. *Under the conditions (C1) – (C5), we have*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{r}_n(x)] &= r(0) + r'(0)b_n \int_{-c}^B u \psi(u) du + \frac{b_n^2}{2} \left[r''(0) + 2 \frac{r'(0)f_x'(0)}{f_x(0)} \right] \int_{-c}^B u^2 \psi(u) du \\ &\quad - \frac{g'(0)f_x'(0)b_n^2}{[f_x(0)]^2} \left[\int_{-c}^B u \psi(u) du \right]^2 + o(b_n^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Proof. Replacing z with x into (12) and taking the expectation, we obtain

$$\mathbb{E}[\hat{r}_n(x)] = \frac{\mathbb{E}[\hat{g}_n(x)]}{\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(x)]} - \frac{\dot{A}_1}{[\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(x)]]^2} + \frac{\dot{A}_2}{[\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(x)]]^2},$$

where

$$\dot{A}_1 = \mathbb{E} \left[\left(\hat{\vartheta}_n(x) - \mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(x)] \right) \hat{g}_n(x) \right] \quad \text{and} \quad \dot{A}_2 = \mathbb{E} \left[\left(\hat{\vartheta}_n(x) - \mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(x)] \right)^2 \hat{r}_n(x) \right].$$

Combining (9) and (10), both hold true under the hypotheses of Theorem 4, we can write

$$\mathbb{E}[\hat{g}_n(x)] = \int_{-c}^B \left[g(0) + b_n g'(0)u + \frac{(b_n u)^2}{2} (g''(0) + [g''(x + \lambda u b_n) - g''(0)]) \right] \psi(u) du. \quad (17)$$

Remember that, (C3) allows us to suppose that $b_n < 1$. Now, combining (C1), (C3), (C4) with (17), we have that $\mathbb{E}[\hat{g}_n(x)] = g(0) \int_{-c}^B \psi(u) du + o(1)$, whence $\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(x)] = f_x(0) \int_{-c}^B \psi(u) du +$

$o(1)$. Moreover, combining the fact that $((X_i, Y_i), V_i)$, $1 \leq i \leq n$, are identically distributed, with the previous equalities and (C3), we have

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \frac{1}{(na_n)^2} \sum_{i=1}^n Cov[Y_i U_i, U_i] = \frac{1}{na_n} \mathbb{E}[\hat{g}_n(x)] - \frac{1}{n} \mathbb{E}[\hat{g}_n(x)] \mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(x)] \\ &= \frac{1}{na_n} g(0) \int_{-c}^B \psi(u) du + o\left(\frac{1}{nb_n}\right), \end{aligned}$$

where in this case $U = \mathbb{1}_{[0, \varphi(\frac{x-x}{b_n})]}(V) = U^2$. On the other hand, by (C5) there exists $C > 0$ such that $|\hat{r}_n(0)| \leq C$. Thus, we can write

$$|\dot{A}_2| \leq C \mathbb{E} \left[\left[\hat{\vartheta}_n(x) - \mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(x)] \right]^2 \right] = \frac{C}{na_n^2} \left(\mathbb{E}[U^2] - (\mathbb{E}[U])^2 \right) = \frac{C}{na_n} \mathbb{E} \left[\frac{U}{a_n} \right] (1 - \mathbb{E}[U]).$$

Now setting $Y = 1$ and combining with (17), we can write

$$\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(x)] = \int_{-c}^B \left[f_x(0) + b_n f'_x(0)u + \frac{b_n^2}{2} u^2 f''_x(x + \lambda u b_n) \right] \psi(u) du.$$

Moreover, (C1) implies that f''_x is bounded in the neighborhood of x , and (C3) allows us to suppose that $b_n < 1$. Thus, we can bound $\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(x)]$. Besides, by (2) we can bound $(1 - \mathbb{E}[U])$. Then $\dot{A}_2 = O(\frac{1}{nb_n})$. Therefore $\frac{\dot{A}_1}{(\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(x)])^2} = o(1)$ and $\frac{\dot{A}_2}{(\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(x)])^2} = O(\frac{1}{nb_n})$. In consequence,

$$\mathbb{E}[\hat{r}_n(x)] = \frac{\mathbb{E}[\hat{g}_n(x)]}{\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(x)]} + O\left(\frac{1}{na_n}\right).$$

Now combining (C1), (C3) and (C4), we obtain

$$\frac{b_n^2}{2} \int_{-c}^B u^2 [g''(x + \lambda u b_n) - g''(0)] \psi(u) du = o(1).$$

The previous equality allows us to rewrite (17) as

$$\mathbb{E}[\hat{g}_n(x)] = \int_{-c}^B [g(0) + b_n g'(0)u + \frac{b_n^2}{2} g''(0)u^2] \psi(u) du,$$

whence

$$\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_n(x)] = \int_{-c}^B [f_x(0) + b_n f'_x(0)u + \frac{b_n^2}{2} f''_x(0)u^2] \psi(u) du.$$

Then

$$\mathbb{E}[\hat{r}_n(x)] = \frac{g(0)C_c + C_{n,g}(0)}{f_x(0)C_c + C_{n,f_x}(0)} + O\left(\frac{1}{nb_n}\right) = \dot{H}_n(0) + O\left(\frac{1}{nb_n}\right), \quad (18)$$

where

$$C_c = \int_{-c}^B \psi(u) du$$

and

$$C_{n,q}(0) = b_n q'(0) \int_{-c}^B u \psi(u) du + \frac{b_n^2}{2} q''(0) \int_{-c}^B u^2 \psi(u) du, \text{ for } q = g, f_x.$$

Next, an equivalent expression for $\dot{H}_n(0)$ will be obtained. Taking the conjugate and combining the following equalities

- (i) $C_{n,f_x}(0) = o(1)$, by (C3),
- (ii) $\frac{1}{(f_x(0)C_c)^2 - (C_{n,f_x}(0))^2} = \frac{1}{(f_x(0)C_c)^2} + o(1)$, by (i),
- (iii) $C_{n,g}(0)C_{n,f_x}(0) = b_n^2 g'(0)f'_x(0) \left[\int_{-c}^B u \psi(u) du \right]^2 + o(b_n^2)$, by (C3),
- (iv) $g(0)f_x(0) = r(0)[f_x(0)]^2$, since $g(x) = r(x)f_x(x)$,
- (v) $f_x(0)g'(0) - g(0)f'_x(0) = r'(0)[f_x(0)]^2$, given that $r(x) = \frac{g(x)}{f_x(x)}$,
- (vi) $g''(0)f_x(0) - f''_x(0)g(0) = r''(0)[f_x(0)]^2 + 2f_x(0)r'(0)f'_x(0)$,

we can write

$$\begin{aligned} \dot{H}_n(0) &= r(0) + r'(0)b_n \int_{-c}^B u \psi(u) du + b_n^2 \left[r''(0) + 2 \frac{r'(0)f'_x(0)}{f_x(0)} \right] \int_{-c}^B u^2 \psi(u) du \\ &+ \frac{g'(0)f'_x(0)b_n^2}{[f_x(0)]^2} \left[\int_{-c}^B u \psi(u) du \right]^2 + o(b_n^2). \end{aligned}$$

By (C3), we have that $(nb_n)^{-1} = o(1)$. The result now follows combining (18) and the last two equalities. \square

Next, the results that will allow us to eliminate the boundary effects in estimator (3) are presented, which were used in [8], Theorems 3 and 4, to eliminate the boundary effects in estimator (1). The following theorem in particular will allow us to control suitably the constants that define the bias of estimator (3) and it justifies a condition in the criterion introduced to eliminate the terms with coefficients b_n in all the expressions above.

Theorem 5. *Under condition (C4), we have that for $M > 0$ there exists $B' > 0$ such that*

$$v = \int_{-B'}^{B'} u^2 \psi(u) du \leq M.$$

Proof. Similar to the proof of Theorem 3 in [8]. \square

Observe that combining (C4) and Theorem 5 we obtain

$$v = \int_{-B'}^{B'} u^2 \psi(u) du = \int u^2 \psi(u) du \leq M,$$

for $B' > B$. Now, we can redefine ψ as

$$\psi(u) = \frac{\varphi(u)}{\int \varphi(u) du} \mathbb{I}_{[-B', B']}(u), \quad B' \leq B. \quad (19)$$

To give a simple and effective solution to the boundary problem, without boundary corrections, a criterion will be implemented which will allow us to eliminate the terms with coefficients b_n in all above expressions, making $\int_{-c}^B u \psi(u) du = 0$ for each $c \in (0, b_n]$. Such criterion is based on deriving a thinning function φ as the solution to the following variational problem:

$$\begin{aligned} \text{Maximizing : } & \int \varphi(u) du. \\ \text{Subject to : } & \int \varphi^2(u) du = k, \\ & \int u \varphi(u) du = 0, \\ & \int (u^2 - v) \varphi(u) du = 0, \end{aligned} \quad (\text{VP})$$

$$k > 0, \varphi(u) = 0 \text{ for } u \in (-B, B)^c, \varphi(0) > 0, \varphi(u) \in [0, 1], v \in (0, M].$$

Theorem 6. *The solution of (VP) is given by*

$$\varphi_k(u) = \left[1 - \left(\frac{16}{15k} \right)^2 u^2 \right] \mathbb{I}_{[-\frac{15}{16}k, \frac{15}{16}k]}(u), \quad k > 0. \quad (20)$$

In particular, for each $c \in (0, b_n]$ we have

$$\varphi_c(u) = \left[1 - \left(\frac{16}{15c} \right)^2 u^2 \right] \mathbb{I}_{[-\frac{15}{16}c, \frac{15}{16}c]}(u). \quad (21)$$

Proof. Similar to the proof of Theorem 4 in [8]. □

From (16) w.t.f. φ_c we obtain

$$\mathbb{E}[\hat{r}_n(x)] = r(0) + \frac{b_n^2}{2} \left[r''(0) + 2 \frac{r'(0)f'_x(0)}{f_x(0)} \right] \int_{-B'}^{B'} u^2 \psi_c(u) du + o(b_n^2), \quad (22)$$

where $0 < c \leq 1$, $0 < B' \leq \frac{15}{16}c$, ψ_c is given by (19) w.t.f. φ_c , and φ_c is given by (21). Thus, estimator (3) does not present the boundary effects at x when the thinning function is φ_c . Moreover, combining Theorem 3 with Theorem 3.1 in [5], we obtain

$$\mathbb{E}[\hat{r}_n(z)] = r(z) + \frac{b_n^2}{2} \left[r''(z) + 2 \frac{r'(z)f'_x(z)}{f_x(z)} \right] \int_{-B'}^{B'} u^2 \psi_k(u) du + o(b_n^2),$$

for each $k > 1$ and $z \in \{0\} \cup (b_n, \infty)$, where $B' \leq \frac{15}{16}k$, ψ_k is given by (19) w.t.f. φ_k , and φ_k is given by (20). Thus, estimator (3) does not present the boundary effects at $z \in \{0\} \cup (b_n, \infty)$ when the thinning function is φ_k , for each $k > 1$.

On the other hand, denoting the Epanechnikov kernel by K_E , and replacing k with $\frac{5}{3}$ and M with $M_E = \int u^2 K_E(u) du$ into (VP), we have that estimator (3) w.t.f. $\varphi_{\frac{5}{3}}$, is the estimator studied in [5]. That is, the estimator introduced in [5] is a particular case of the class of estimators defined by (3) w.t.f. φ_k , for each $k > 1$. Moreover, the results obtained in [5] allow to guarantee that φ_k minimize $MSE[\hat{r}_n(z)]$, for each $k > 1$ and $z \in \{0\} \cup (b_n, \infty)$. Particularly in [5], it was shown that $MSE[\hat{r}_n(t)] \leq MSE[\hat{r}_{NW_n}(t)]$ for each $t \in \mathbb{R}$, where \hat{r}_n is given by (3) w.t.f. $\varphi_{\frac{5}{3}}$ and \hat{r}_{NW_n} is the classical kernel regression estimator.

Next, the boundary estimator introduced in [8] and the main result of the above article are presented. The inclusion of the above results is based on the following two reasons. First, because the boundary regression estimator will be defined in terms of the estimator proposed in [8]. Second, to highlight two asymptotic properties of the boundary estimator defined in [8].

Definition 3. Let X_1, \dots, X_n be an independent random sample of X . Let V_1, \dots, V_n be independent random variables uniformly distributed on $[0, 1]$ and independent of X_1, \dots, X_n . Then, the boundary fuzzy set estimator of the density function f_X at the point $x \in (0, b_n]$ is defined as

$$\tilde{\vartheta}_n(x) = \frac{1}{n a_n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{[0, \varphi_c(\frac{x_i-x}{b_n})]}(V_i) = \frac{1}{n a_n} \tau_n^{(c)}(x), \tag{23}$$

where $0 < c \leq 1$, $a_n = b_n \int \varphi_c(u) du$, and φ_c is given by (21).

Theorem 7. Under conditions (C1)-(C3), we have

$$\mathbb{E} \left[\tilde{\vartheta}_n(x) - f_X(0) \right] = \frac{b_n^2}{2} f_X''(0) \int_{-B'}^{B'} u^2 \psi_c(u) du + o(b_n^2),$$

and

$$Var \left[\tilde{\vartheta}_n(x) \right] = \frac{1}{n b_n \int \varphi_c(u) du} f_X(0) + o\left(\frac{1}{n b_n}\right),$$

where $0 < c \leq 1$, $0 < B' \leq \frac{15}{16}c$, ψ_c is given by (19) w.t.f. φ_c , and φ_c is given by (21).

Next, the boundary fuzzy set estimator of r and the main result of this paper are presented.

Definition 4. Let $((X_1, Y_1), V_1), \dots, ((X_n, Y_n), V_n)$ be independent copies of a random vector $((X, Y), V)$, where V_1, \dots, V_n are independent random variables uniformly distributed on $[0, 1]$, and independent of $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$. Then, the boundary fuzzy set estimator of the regression function r at the point $x \in (0, b_n]$ is defined as

$$\tilde{r}_n(x) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n Y_i \mathbb{I}_{[0, \varphi_c(\frac{x_i-x}{b_n})]}(V_i)}{\tau_n^{(c)}(x)} & \text{if } \tau_n^{(c)}(x) \neq 0 \\ 0 & \text{if } \tau_n^{(c)}(x) = 0, \end{cases} \tag{24}$$

where $0 < c \leq 1$, $0 < B' \leq \frac{15}{16}c$, $\tau_n^{(c)}$ is given in (23), and φ_c is given by (21).

Lemma 1. *Under the conditions (C1) – (C6), we have*

$$\mathbb{E} [\tilde{r}_n(x) - r(0)] = \frac{b_n^2}{2} \left[r''(0) + 2 \frac{f'_x(0) r'(0)}{f_x(0)} \right] \int_{-B'}^{B'} u^2 \psi_c(u) du + o(b_n^2)$$

and

$$\text{Var} [\tilde{r}_n(x)] = \frac{1}{n b_n \int \varphi_c(u) du} \left[\frac{\phi(0) - r^2(0)}{f_x(0)} \right] + o\left(\frac{1}{n b_n}\right),$$

where $0 < c \leq 1$, $0 < B' \leq \frac{15}{16}c$, ψ_c is given by (19) w.t.f. φ_c , and φ_c is given by (21).

Proof. From (3) w.t.f. φ_c , we have $\tilde{r}_n(x) = \hat{r}_n(x)$. Now, combining the above equality with (22), we obtain the expression for $\mathbb{E} [\tilde{r}_n(x) - r(0)]$. For the proof of $\text{Var} [\tilde{r}_n(x)]$, follow [5] considering φ_c as thinning function, keeping in mind that $q(x) = q(0) + o(1)$, for $q = f_x, r, \phi$. \square

For $z \geq b_n$, $\tilde{r}_n(z)$ reduces to the fuzzy set regression estimator $\hat{r}_n(z)$ given by (3) w.t.f. φ_1 . Thus, $\tilde{r}_n(z)$ is a natural boundary continuation of estimator (3) w.t.f. φ_1 . Moreover, the results obtained in [5] allow us to guarantee that the thinning function φ_c locally minimizes $MSE[\tilde{r}_n(x)]$, for each $c \in (0, 1]$.

Next, asymptotic formulae for the optimal smoothing parameter and optimal mean square error of (24), b_n^* and MSE^* , are presented, which are an immediate consequence of Lemma 1, and they guarantee that estimator (24) is locally optimal in terms of rates of convergence (see [26]).

Corollary 3. *Under the conditions (C1) – (C6), we have*

$$b_n^* = n^{-1/5} \left[\frac{\left(\int \varphi_c(u) du \right)^{-1} \left(\frac{\phi(0) - r^2(0)}{f_x(0)} \right)}{\left(r''(0) + 2 \frac{f'_x(0) r'(0)}{f_x(0)} \right)^2 \left(\int_{-B'}^{B'} u^2 \psi_c(u) du \right)^2} \right]^{1/5}$$

and

$$MSE^* [\tilde{r}_n(\dot{x})] = \frac{5}{4} n^{-4/5} \left[\frac{\left(\frac{\phi(0) - r^2(0)}{f_x(0)} \right)^4 \left(r''(0) + 2 \frac{f'_x(0) r'(0)}{f_x(0)} \right)^2}{\left(\int_{-B'}^{B'} u^2 \psi_c(u) du \right)^{-2} \left(\int \varphi_c(u) du \right)^4} \right]^{1/5},$$

where $0 < c \leq 1$, $\dot{x} = c b_n^*$, $0 < B' \leq \frac{15}{16}c$, ψ_c is given by (19) w.t.f. φ_c , and φ_c is given by (21).

3 Simulations results

In this section some simulation results are presented, which are only designed to illustrate the performance of (24) at points near 0 in a b_n spread neighborhood. For purposes of comparison, the estimator introduced in [24] was also considered. It is important to remark here that, the particular choice above was based mainly on the results of the simulations obtained in [24], for the two regression models and two densities considered in this section, which showed that the boundary kernel regression estimator performed quite well when it was compared with the local linear and \hat{r}_{NW_n} estimators. Among other reasons that sustained the above particular choice,

the theoretical properties that are shared by the boundary kernel regression estimator defined in [24] and the proposed boundary fuzzy set regression estimator are highlighted: non-negativity, “natural boundary continuation” and they improve the bias but holding on to the low variances. Properties not justified will be verified in this section. The author considers that the previous comments and discussion motivated by the literature review results, justify considering only the estimator given by [24] to develop the simulations.

The general boundary kernel estimator introduced in [24] is defined as

$$\tilde{r}_{K_n}(l) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i \left\{ K\left(\frac{l+w_1(X_i)}{h_n}\right) + K\left(\frac{l-w_1(X_i)}{h_n}\right) \right\}}{\sum_{i=1}^n \left\{ K\left(\frac{l+w_2(X_i)}{h_n}\right) + K\left(\frac{l-w_2(X_i)}{h_n}\right) \right\}}, \quad (25)$$

where $l = s h_n$, $0 \leq s \leq 1$, h_n is the smoothing parameter and K is a kernel function of order 2. Moreover, w_k is a transformation defined as

$$w_k(y) = y + \frac{1}{2}d_k y^2 + \lambda_0 (d_k)^2 y^3, \quad k = 1, 2,$$

where

$$d_1 = w_1''(0) = \frac{g'(0)}{g(0)} D_{K,s}, \quad d_2 = w_2''(0) = \frac{f'_X(0)}{f_X(0)} D_{K,s},$$

and λ_0 is a constant such that $12\lambda_0 > 1$, with

$$D_{K,s} = \frac{2 \int_s^1 (u-s)K(u) du}{2 \int_s^1 (u-s)K(u) du + s}.$$

To assess the effect of the boundary estimators at points near 0 in a b_n spread neighborhood, the following models are studied:

$$\text{Model 1 : } r_1(z) = 2z + 1 \quad \text{and} \quad \text{Model 2 : } r_2(z) = 2z^2 + 3z + 1,$$

where $z \in [0, \infty)$ and errors ε_j , are assumed to be standard normally distributed independent random variables. Likewise, consider two cases of density f_X with support $[0, \infty)$:

$$\text{Density 1 : } f_{1X}(z) = \exp(-z) \quad \text{and} \quad \text{Density 2 : } f_{2X}(z) = \frac{2}{\pi(1+z^2)}.$$

It is important to emphasize that, for $z \geq h_n$ the estimator (25) reduces to the classical kernel estimator \hat{r}_{NW_n} . Thus, (25) is a natural boundary continuation of \hat{r}_{NW_n} (see [24], Section 2).

On the other hand, the following optimal global smoothing parameters were implemented as the smoothing parameters of both (24) and (25) estimators (see Theorems 3.1 and 2.4.1 in [5] and [12], respectively):

$$b_n = \left[\frac{C}{n} \frac{\left(\int \varphi_{\frac{5}{3}}(u) du \right)^{-1}}{\left(\int u^2 \psi_{\frac{5}{3}}(u) du \right)^2} \right]^{1/5} \quad (26)$$

and

$$h_n = \left[\frac{C}{n} \frac{\int K_E^2(u) du}{\left(\int u^2 K_E(u) du \right)^2} \right]^{1/5}, \quad (27)$$

where

$$C = \frac{\int \left(\frac{\phi(u) - r^2(u)}{f_X(u)} \right) du}{\int \left(r''(u) + 2 \frac{f_X'(u) r'(u)}{f_X(u)} \right)^2 du}, \quad (28)$$

$\varphi_{\frac{5}{3}}$ is given by (20), $\psi_{\frac{5}{3}}$ is given by (19) w.t.f. $\varphi_{\frac{5}{3}}$, and $v = \int u^2 \psi_{\frac{5}{3}}(u) du \leq \int u^2 K_E(u) du = M_E$ (see [5], Section 3).

It is important to emphasize that the estimator (3) w.t.f. $\varphi_{\frac{5}{3}}$ has better performance than the estimator \hat{r}_{NW_n} (see [5]). Moreover, the reason for using an optimal global smoothing parameter as the smoothing parameter is that the comparisons based on the optimal smoothing parameter are more convincing than comparisons based on approximated smoothing parameters, which—because of the quality or otherwise of the smoothing parameter selection method—might be misleading. Also, a global rather than local smoothing parameter choice is made, because this is much more likely to be used in applications.

The following formulas and values are used in all simulations, $K_E(u) = \frac{3}{4}(1-x^2)\mathbb{1}_{[-1,1]}(u)$, $\lambda_0 = 0.0933$, $v = M_E/4$, $s = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ and $c = (h_n/b_n)s$, where the smoothing parameters b_n and h_n are given by (26) and (27), respectively. Moreover, the simulated sample sizes are $n = 50$ and $n = 500$, and all results are calculated by averaging over 1000 trials. Simultaneously, for each regression model and each density, the absolute bias (absolute value of the estimated value minus the true value) and the MSE of both estimators are calculated, at the points $x = c b_n$ and $l = s h_n$ of the following boundary regions $(0, b_n)$ and $(0, h_n)$. Nonetheless, the comparison of both (24) and (25) estimators through the mean integrated squared error is not convenient, since to the two regression models and two densities considered the boundary regions satisfy the following property $(0, h_n] \subset (0, b_n]$. The results are shown in Tables 3 and 3. Furthermore, a close examination of Tables 3 and 3 allows us to see that for the two regression models and two densities considered the proposed boundary estimator is the best in terms of MSE at points near 0 in a b_n spread neighborhood, since it has low bias and extremely low variance, guaranteeing that $MSE[\tilde{r}_n(x)] \leq MSE[\tilde{r}_{K_n}(x)]$ at the points x near 0 in a b_n spread neighborhood. Additionally, these properties are apparently preserved over the rest of the boundary regions. Thus, the proposed boundary estimator outperforms the estimator introduced in [24].

Table 1: Bias and *MSE* of the indicated regression estimators at boundary, case of density 1.

\tilde{r}_n		Model 1					\tilde{r}_{κ_n}			
$b_n = 3.5045$		$n = 50$					$h_n = 2.1047$			
c		—					s			
0.0601	0.1201	0.1802	0.2402	0.3003	—	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
Bias		—					Bias			
0.0011	0.0560	0.1332	0.2454	0.3812	—	0.1726	0.4102	0.5823	0.7552	0.9440
MSE		—					MSE			
0.0000	0.0031	0.0177	0.0602	0.1453	—	0.0298	0.1682	0.3391	0.5703	0.8911
$b_n = 2.2112$		$n = 500$					$h_n = 1.3280$			
c		—					s			
0.0601	0.1201	0.1802	0.2402	0.3003	—	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
Bias		—					Bias			
0.0101	0.0240	0.0528	0.0963	0.1515	—	0.2347	0.2842	0.3228	0.3807	0.4496
MSE		—					MSE			
0.0001	0.0006	0.0028	0.0093	0.0230	—	0.0551	0.0807	0.1042	0.1449	0.2022
\tilde{r}_n		Model 2					\tilde{r}_{κ_n}			
$b_n = 1.2978$		$n = 50$					$h_n = 0.7794$			
c		—					s			
0.0601	0.1201	0.1802	0.2402	0.3003	—	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
Bias		—					Bias			
0.0383	0.0200	0.0225	0.0408	0.0579	—	0.1667	0.2058	0.2433	0.2762	0.3045
MSE		—					MSE			
0.0015	0.0004	0.0005	0.0017	0.0034	—	0.0278	0.0423	0.0592	0.0763	0.0927
$b_n = 0.8189$		$n = 500$					$h_n = 0.4918$			
c		—					s			
0.0601	0.1201	0.1802	0.2402	0.3003	—	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
Bias		—					Bias			
0.0036	0.0012	0.0062	0.0111	0.0230	—	0.0727	0.0907	0.1047	0.1133	0.1162
MSE		—					MSE			
0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	—	0.0053	0.0082	0.0110	0.0128	0.0135

Table 2: Bias and *MSE* of the indicated regression estimators at boundary, case of density 2.

\hat{r}_n		Model 1					\hat{r}_{K_n}			
$b_n = 2.1614$		$n = 50$					$h_n = 1.2980$			
c		—					s			
0.0601	0.1201	0.1802	0.2402	0.3003	—	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
Bias		—					Bias			
0.0201	0.0148	0.0359	0.0734	0.1233	—	0.0996	0.2173	0.3078	0.3800	0.4398
MSE		—					MSE			
0.0004	0.0002	0.0013	0.0054	0.0152	—	0.0099	0.0472	0.0947	0.1444	0.1934
\hat{r}_n		Model 2					\hat{r}_{K_n}			
$b_n = 1.3637$		$n = 500$					$h_n = 0.8190$			
c		—					s			
0.0601	0.1201	0.1802	0.2402	0.3003	—	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
Bias		—					Bias			
0.0050	0.0017	0.0042	0.0179	0.0378	—	0.0652	0.1161	0.1502	0.1702	0.1801
MSE		—					MSE			
0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0014	—	0.0042	0.0135	0.0226	0.0290	0.0324
\hat{r}_n		Model 2					\hat{r}_{K_n}			
$b_n = 1.0466$		$n = 50$					$h_n = 0.6285$			
c		—					s			
0.0601	0.1201	0.1802	0.2402	0.3003	—	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
Bias		—					Bias			
0.0710	0.0309	0.0284	0.0088	0.0132	—	0.0720	0.1305	0.1670	0.1806	0.1708
MSE		—					MSE			
0.0050	0.0010	0.0008	0.0001	0.0002	—	0.0052	0.0170	0.0279	0.0326	0.0292
\hat{r}_n		Model 2					\hat{r}_{K_n}			
$b_n = 0.6603$		$n = 500$					$h_n = 0.3966$			
c		—					s			
0.0601	0.1201	0.1802	0.2402	0.3003	—	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
Bias		—					Bias			
0.0064	0.0040	0.0013	0.0028	0.0088	—	0.0333	0.0579	0.0697	0.0678	0.0544
MSE		—					MSE			
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	—	0.0011	0.0033	0.0049	0.0046	0.0030

4 Data analysis

The proposed estimator was tested over one well-known real dataset to demonstrate its usefulness in practical applications. For purposes of comparison, the particular classical kernel regression estimator introduced in [22] was considered. With respect to this last point, a brief discussion will be developed at the end of this section. The real dataset is the Motorcycle data found in Appendix 2-Table 1 of [14], where the experiment, a simulated motorcycle crash, is described in detail in [23]. It has $n = 133$ observations of X , where the X -values denote time (in milliseconds) after a simulated impact with motorcycles and the response variable Y is the head acceleration (in g) of a post mortem human test object. To facilitate the comparison of the effectiveness of estimators (24), \hat{r}_{NW_n} , (3) w.t.f. $\varphi_{\frac{5}{3}}$, and (3) w.t.f. φ_1 , the performance of each estimator will be graphed over the dataset through an average of 1000 trials. Moreover, for the fixed random sample, X_1, \dots, X_n , a sample of independent random variables $V_1^{(d)}, \dots, V_n^{(d)}$ will be used, where $V_i^{(d)}$ is uniformly distributed on $[0, 1]$ for each $i, d, 1 \leq i \leq n$ and $1 \leq d \leq 1000$.

In order to simulate the performance of the estimator \hat{r}_{NW_n} , the idea in [22] will be adopted with smoothing parameter $h_n = 2.40$, and quartic kernel $K_Q(u) = (16/25)(1 - u^2)^2 \mathbb{I}_{[-1,1]}(u)$ instead of K_E . Simultaneously, for the fuzzy set estimation the smoothing parameter (26) will be implemented, with $v = M_Q/2$, where the approximate value of constant (28) was calculated through (27) using $h_n = 2.40$ and K_Q instead of K_E . Here $M_Q = \int u^2 K_Q(u) du$. Figures 4 and 4

show the simulation results together with the data points on $[0, 57.60]$ and $[0, 6.50]$, respectively. From Figures 4 and 4, the estimator (3) w.t.f. $\varphi_{\frac{5}{3}}$ does not appear to offer an appropriate approximation on large part of the region $[2.92, 57.60]$, when compared with the similar results produced by both (3) w.t.f. φ_1 and \hat{r}_{NW_n} estimators. At the same time, Figure 4 shows that the presence of the boundary problem in (3) w.t.f. $\varphi_{\frac{5}{3}}$ was removed by (24), where both (24) and \hat{r}_{NW_n} estimators fail miserably over their respective boundary regions, and only the estimator (24) follows the data very closely on the left side of the picture, by making the curve be constant, equal zero, over the region $[0, 1.305]$.

Finally, it is necessary to point out that [24] does not present a study of simulations with real data, and within the context of the above paper an appropriate criterion for the estimation of the parameters d_1 and d_2 was not proposed. The previously exposed explains the absence, in this section, of a study related to the graphical comparison of estimators (25) and (24). Remember that, within the proposed objectives in this paper only the estimation of the parameters associated with the fuzzy set estimation method will be considered. Consequently, the subjective choice of the values of the parameters d_1 and d_2 would be incorrect, since it could benefit the behavior of (24) and impair the behavior of (25), which would produce unreliable results.

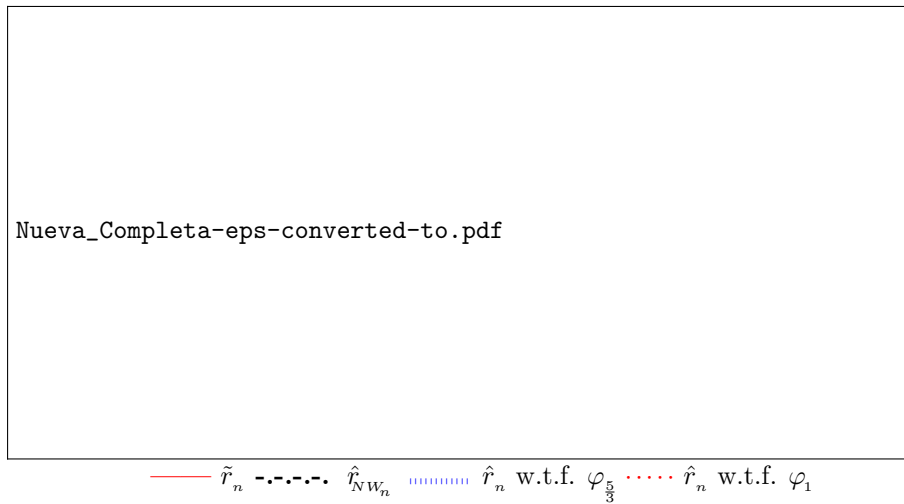


Figure 1: Regression estimates to the motorcycle data at the points inside the region $[0, 57.60]$ using smoothing parameters $h_n = 2.40$ and $b_n = 2.92$, where $v = \frac{M_Q}{2}$. The circles indicate the raw data.

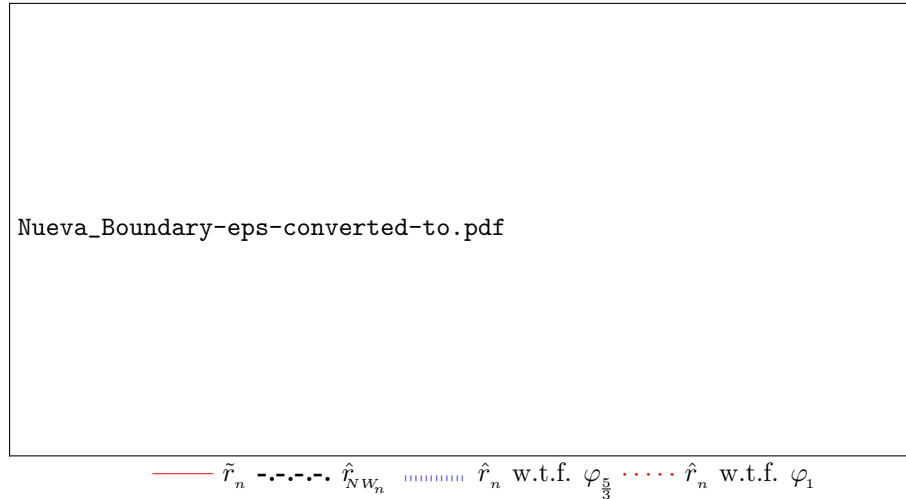


Figure 2: Regression estimates to the motorcycle data at the points inside the region $[0, 6.5]$ using smoothing parameters $h_n = 2.40$ and $b_n = 2.92$, where $v = \frac{M_Q}{2}$. The circles indicate the raw data.

5 Final remarks

In this paper, a new contribution in the area of regression estimation not based on kernels is presented, obtaining a natural extension of the results introduced in [8]. In particular, the boundary effects in the fuzzy set regression estimator are studied and removed, where it does not require boundary modifications to eliminate such effects, unlike most well-known kernel regression estimators. Moreover, among the desirable properties of the boundary fuzzy set estimator the non-negativity of the estimator is highlighted, as well as its performance which is generally very robust with respect to various shapes of regression and density functions, since it allows important reductions of the bias, while maintaining low variance. It is clear that no single existing estimator in the literature dominates all the others for all shapes of regression and density functions. Each estimator has certain advantages and works well at certain times. However, for the two regression models and the two density functions considered, the boundary fuzzy set regression estimator has better performance than the boundary regression estimator introduced in [24] at points near zero in a spread neighborhood of the smoothing parameter.

On the other hand, it is appropriate to highlight the important role that the thinning function plays in the results obtained, since its adequate construction allowed to eliminate the boundary effects in the fuzzy set regression estimator, giving each boundary point the least approximation between the boundary fuzzy set estimator and regression function. Finally, it is necessary to point out that through the thinning point process that describes the fuzzy set density estimation method, the set of observations considered can be characterized in a neighborhood of the estimation point, where the indicator functions that define the fuzzy set density estimator decide whether observation belongs on the neighborhood of the estimation point or not, and the thinning functions that define each indicator function are used to select the sample points with different

probabilities, in contrast to the kernel estimators which assign equal weight to all points of the sample.

6 Acknowledgements

This research has been supported by a grant from the Academia de Ciencias de América Latina-ACAL.

References

- [1] T. H. Ali, H. A. A.-M. Hayawi and D. S. I. Botani (2021). *Estimation of the bandwidth parameter in Nadaraya-Watson kernel non-parametric regression based on universal threshold level*, Commun. Stat. - Simul. Comput., 1–34. DOI: 10.1080/03610918.2021.1884719
- [2] L. R. Cheruiyot (2020). *Local Linear Regression Estimator on the Boundary Correction in Nonparametric Regression Estimation*, JSTA, **19** (3), 460–471. DOI: 10.2991/jsta.d.201016.001
- [3] L. R. Cheruiyot, O. R. Otieno and G. O. Orwa (2019). *A Boundary Corrected Non-Parametric Regression Estimator for Finite Population Total*, Int. J. Probab. Stat., **8** (3), 1–83. DOI: 10.5539/ijsp.v8n3p83
- [4] F. Comte, and N. Marie (2021). *On a Nadaraya-Watson estimator with two bandwidths*, Electron. J. Statist, **15** (1), 2566–2607. DOI: 10.1214/21-EJS1849
- [5] J. Fajardo (2012). *A Criterion for the Fuzzy Set Estimation of the Regression Function*, J. Prob. Stat., **2012**. DOI: 10.1155/2012/593036
- [6] J. Fajardo (2014). *A criterion for the fuzzy set estimation of the density function*, Braz. J. Prob. Stat., **28** (3), 301–312. DOI: 10.1214/12-BJPS208
- [7] J. Fajardo (2018). *Comparison of the Mean Square Errors of the Fuzzy Set Regression Estimator and Local Linear Regression Smoothers*, Int. J. Math. Stat., **19** (1), 74–89. <http://www.ceser.in/ceserp/index.php/ijms/article/view/5355>
- [8] J. Fajardo and P. Harmath (2021). *Boundary estimation with the fuzzy set density estimator*, METRON, **79**, 285–302. DOI: 10.1007/s40300-021-00210-z
- [9] J. Fajardo R. Ríos and L. Rodríguez (2010). *Properties of convergence of a fuzzy set estimator of the regression function*, J. Stat., Adv. Theory Appl., **3** (2), 79–112. Zbl 05800441
- [10] J. Fajardo, R. Ríos and L. Rodríguez (2012). *Properties of convergence of a fuzzy set estimator of the density function*, Braz. J. Prob. Stat., **26** (2), 208–217. DOI: 10.1214/10-BJPS130
- [11] M. Falk and F. Liese (1998). *Lan of thinned empirical processes with an application to fuzzy set density estimation*, Extremes, **1** (3), 323–349. DOI: 10.1023/A:1009981817526
- [12] F. Ferraty, V. Núñez-Antón, and P. Vieu (2001). *Regresión No Paramétrica: Desde la Dimensión uno Hasta la Dimensión Infinita*, Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, Bilbao.

- [13] P. Hall and B. U. Park (2002). *New methods for bias correction at endpoints and boundaries*, Ann. Statist., **30** (5), 1460–1479. DOI: 10.1214/aos/1035844983
- [14] W. Härdle (1990). *Applied nonparametric regression*, Cambridge University Press.
- [15] R. Hidayat, I. N. Budiantara, B. W. Otok and V. Ratnasari (2021). *The regression curve estimation by using mixed smoothing spline and kernel (MsS-K) model*, Commun. Stat. Theory Methods, **50** (17), 3942–3953. DOI: 10.1080/03610926.2019.1710201
- [16] M. C. Jones and P. J. Foster (1996). *A simple nonnegative boundary correction method for kernel density estimation*, Stat. Sinica, **6** (4), 1005–1013. <http://www3.stat.sinica.edu.tw/statistica/j6n4/j6n414/j6n414.htm>
- [17] R. J. Karunamuni and T. Alberts (2005). *On boundary correction in kernel density estimation*, Stat. Methodol., **2** (3), 191–212. DOI: 10.1016/j.stamet.2005.04.001
- [18] B. C. Kouassi, O. Hili and E. Katchekpele (2021). *Nadaraya-Watson estimation of a non-parametric autoregressive mode*, MJM, **9** (4), 251–258. DOI: 10.26637/mjm904/009
- [19] Y. Linke, I. Borisov, P. Ruzankin, V. Kutsenko, E. Yarovaya and S. Shalnova (2022). *Universal Local Linear Kernel Estimators in Nonparametric Regression*, Mathematics, **10** (15), 2693. DOI: 10.3390/math10152693
- [20] E. A. Nadaraya (1964). *On estimating regression*, Theory Probab. Appl., **9**, 141–142. DOI: 10.1137/1109020
- [21] R. D. Reiss (1993). *A Course on Point Processes*, Springer Series in Statistics, New York.
- [22] I. Salgado-Ugarte, M. Shimizu and T. Taniuchi (1996). *Nonparametric regression: Kernel, WARP, and k-NN estimators*, S.T.B., **5**. <https://EconPapers.repec.org/RePEc:tsj:stbull:y:1996:v:5:i:30:snp10>
- [23] G. Schmidt, R. Mattern and F. Schüller (1981). *Biomechanical investigation to determine physical and traumatological differentiation criteria for the maximum load capacity of head and vertebral column with and without protective helmet under effects of impact. EEC Research Program on Biomechanics of Impact*, Final Report Phase III, Project 65, Institut für Rechtsmedizin, Universität Heidelberg.
- [24] K. Souraya, A. Sayah and Y. Djabrane (2015). *General method of boundary correction in kernel regression estimation*, Afr. Stat., **10**, 739–750. DOI: 10.16929/as/2015.729.66
- [25] I. Sriliana, I. N. Budiantara and V. Ratnasari (2022). *A Truncated Spline and Local Linear Mixed Estimator in Nonparametric Regression for Longitudinal Data and Its Application*, Symmetry, **14** (12), 2687. DOI: 10.3390/sym14122687
- [26] C. J. Stone (1980). *Optimal rates of convergence for nonparametric estimators*, Ann. Statist., **8**, 1348–1360. DOI: 10.1214/aos/1176345206
- [27] G. S. Watson (1964). *Smooth regression analysis*, Sankhyā, Ser. A, **26**, 359–372. <https://www.jstor.org/stable/25049340>
- [28] L. A. Zadeh (1965). *Fuzzy sets*, Inform. Control, **8**, 338–353.

-
- [29] S. Zhang and R. J. Karunamuni (1998). *On kernel density estimation near endpoints*, J. Stat. Plan. Infer., **70** (2), 301–316. DOI: 10.1016/S0378-3758(97)00187-0
- [30] S. Zhang, R. J. Karunamuni and M. C. Jones (1999). *An Improved Estimator of the Density Function at the Boundary*, J. Am. Stat. Assoc. **94** (448), 1231–1240. DOI: 10.1080/01621459.1999.10473876

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: Tobías Rosas Soto (tjrosas@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8085-5011>

Departamento de Matemática, Facultad Experimental de Ciencias,
Universidad del Zulia, Maracaibo,
República Bolivariana de Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor por correo electrónico, en español o inglés, a la dirección arriba indicada (preferiblemente como un archivo fuente en \LaTeX). Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editor, in Spanish or English, to the address given above (preferably as a \LaTeX source file). Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

1 Problemas propuestos

Los dos problemas propuestos a continuación se plantearon en la XXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2023.

153. Sea $0 < C < 1$ y $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$. Demuestre que si $f(x + f(x)) \leq Cf(x)$ para todo $x > 0$, entonces no existe $a > 0$ tal que f sea continua en el intervalo $[a, \infty)$.
154. Dado un número real $t > 1$, sea C_t el cuadrado de lado 2 con centro (t, t^2) y lados paralelos a los ejes. Sea A_t el área de la región $C_t \cap \Gamma$, donde $\Gamma = \{(x, y) : y \geq x^2\}$. Calcule el límite de A_t cuando $t \rightarrow +\infty$.

2 Soluciones

Recordamos que no se han recibido soluciones a los problemas 24–25, 28, 44, 54, 79, 84–91, 94–100, 108–113, 116, 118–123, 126, 128–129, 133–143 y 145–152. Invitamos a los lectores a enviarnos sus soluciones para esos problemas.

27. [8(2) (2000) p. 179.]

- a) Sea $ABCD$ un rectángulo tal que $AB = 1\text{ cm}$ y $BC = 2\text{ cm}$. Sean K el punto medio de AD , L el punto de intersección de AC con BK y M y N los puntos medios de BK y AC respectivamente. Encontrar el área del triángulo LMN .
- b) Sea $ABCD$ un rectángulo tal que $AB = 1\text{ cm}$ y $BC = n\text{ cm}$. Sean C_0 y D_0 puntos sobre los segmentos BC y AD respectivamente, de modo que ABC_0D_0 es un cuadrado y E un punto del segmento BC tal que $EC = 1\text{ cm}$. Sean L y M los puntos de intersección de BD_0 con AC y AE respectivamente y N el punto de intersección de C_0D_0 y AC . Encontrar el área del triángulo LMN .

Solución por Diego Andres Bellido González (diegobellido54@gmail.com), estudiantes de la Licenciatura Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia, Maracaibo, República Bolivariana de Venezuela.

Parte a)

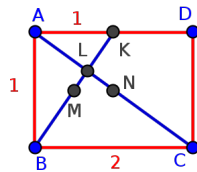


Figura 1: Primer rectángulo

En la Figura 1, tenemos que $ABCD$ es un rectángulo y los siguientes datos $AB = 1\text{ cm}$, $BC = 2\text{ cm}$, $AK = KD$, $BM = MK$, y $AN = NC$. Por Pitágoras en $\triangle ABC$ y $\triangle ABK$: $BK = \sqrt{2}$ y $AC = \sqrt{5}$.

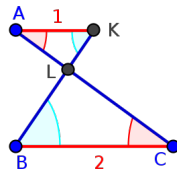


Figura 2: Triángulos opuestos por un vértice

De la Figura 2 se concluye que el triángulo $\triangle LAK$ es semejante al triángulo $\triangle LCB$. Luego:

$$\frac{AK}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{LA}{LC} = \frac{LK}{LB} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2LA = LC \text{ y } 2LK = LB$$

Tomando en cuenta este resultado, obtenemos lo siguiente:

$$CL + LA = AC \Rightarrow LC + LA = AC \Rightarrow 2LA + LA = \sqrt{5} \Rightarrow LA = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Además,

$$LB + LK = BK \Rightarrow 2LK + LK = \sqrt{2} \Rightarrow LK = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Como M es punto medio de BK , por hipótesis, se tiene que:

$$MK = \frac{BK}{2} \Rightarrow ML + LK = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow ML = \frac{\sqrt{2}}{2} - LK \Rightarrow ML = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow ML = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

Como N es punto medio de AC , por hipótesis, obtenemos que:

$$NA = \frac{AC}{2} \Rightarrow AL + LN = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow LN = \frac{\sqrt{5}}{2} - LA \Rightarrow LN = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

Ahora, calculamos el $\angle MLN$:

$$\angle MLN = 180^\circ - \angle AKL - \angle KAL$$

Como $\angle AKL = \angle AKB$, y sabemos que $\triangle ABK$ es rectángulo e isósceles, se tiene que $\angle AKL = 45^\circ$.

Para obtener el valor de $\angle MLN = \angle ACB$ usamos razones trigonométricas, teniendo que:

$$tg(\angle ACB) = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle ACB = 26,6^\circ$$

Luego,

$$\angle MLN = 180^\circ - 45^\circ - 26,6^\circ = 108,4^\circ$$

Por último, calculamos el área:

$$A = \frac{LM \cdot LN}{2} \cdot \text{sen}(\angle MLN) = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{\sqrt{5}}{12} \cdot \text{sen}(108,4^\circ) = \frac{\sqrt{10}}{144} \cdot \text{sen}(108,4^\circ)$$

Parte b)

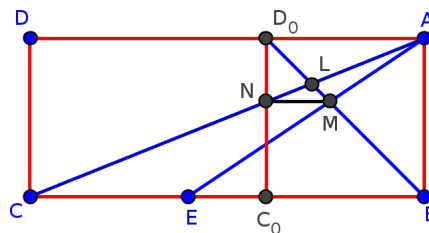


Figura 3: Triángulos opuestos por un vértice

Respecto a la Figura 3, tenemos que $\square ABCD$ es un rectángulo, $\square ABC_0D_0$ es un cuadrado, $AB = 1 \text{ cm}$, $BC = n \text{ cm}$ y $EC = 1 \text{ cm}$.

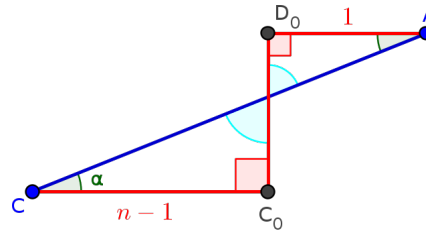


Figura 4: Triángulos opuestos por un vértice

Por el criterio ángulo-ángulo, el triángulo $\triangle CNC_0$ es semejante al triángulo $\triangle AND_0$. Luego, tenemos que:

$$\frac{CC_0}{AD_0} = \frac{CN}{AN} \Rightarrow \frac{BC - BC_0}{1} = \frac{AC - AN}{AN}$$

Por Teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo $\triangle ABC$, se tiene que $AC = \sqrt{1+n^2}$, luego

$$AN(n-1) = \sqrt{1+n^2} - AN \Rightarrow AN \cdot n - AN + AN = \sqrt{1+n^2} \Rightarrow AN = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n}$$

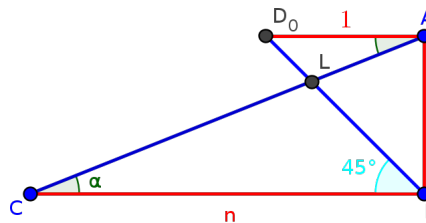


Figura 5: Triángulos opuestos por un vértice

Por criterio ángulo-ángulo, el triángulo $\triangle LD_0A$ es semejante al triángulo $\triangle LBC$. Luego, tenemos que:

$$\frac{AD_0}{BC} = \frac{AL}{CL} \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{AL}{AC - AL} \Rightarrow AC - AL = AL \cdot n \Rightarrow AL(n+1) = AC$$

$$AL = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n+1}$$

$$LN = AN - AL = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n} - \frac{\sqrt{1+n^2}}{n+1} \Rightarrow LN = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n(n+1)}$$

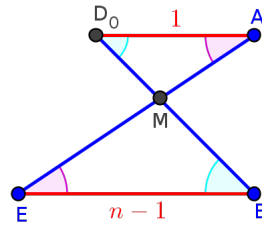


Figura 6: Triángulos opuestos por un vértice

Por criterio ángulo-ángulo, tenemos que el triángulo $\triangle MAD_0$ es semejante al triángulo $\triangle MEB$, luego

$$\frac{D_0M}{BM} = \frac{AD_0}{BE} \Rightarrow \frac{D_0M}{BD_0 - D_0M} = \frac{1}{n-1}$$

Además, por el teorema de Pitágoras, $BD_0 = \sqrt{2}$.

$$D_0M(n-1) = \sqrt{2} - D_0M \Rightarrow D_0M \cdot n = \sqrt{2} \Rightarrow D_0M = \frac{\sqrt{2}}{n}$$

Tomando en cuenta la Figura 5, tenemos:

$$\frac{D_0L}{BL} = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{D_0L}{BD_0 - D_0L} = \frac{1}{n} \Rightarrow D_0L \cdot n = BD_0 - D_0L \Rightarrow D_0L(n+1) = BD_0$$

$$D_0L = \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

Luego,

$$LM = D_0M - D_0L \Rightarrow LM = \frac{\sqrt{2}}{n} - \frac{\sqrt{2}}{n+1} \Rightarrow LM = \frac{\sqrt{2}}{n(n+1)}$$

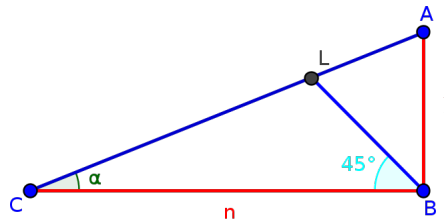


Figura 7: Triángulos opuestos por un vértice

ABC_0D_0 es un cuadrado, por lo que $\angle LBC = 45^\circ$. Por razones trigonométricas:

$$tg(\alpha) = \frac{1}{n} \Rightarrow \alpha = tg^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \angle NLM = \angle CLB = 180^\circ - tg^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) - 45^\circ$$

$$\angle NLM = 135^\circ - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

De esta manera, se puede calcular el área del $\triangle LMN$ sustituyendo los valores obtenidos en la siguiente fórmula:

$$A = \frac{1}{2} \cdot LM \cdot LN \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$$
$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+n^2}}{n(n+1)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{n(n+1)} \cdot \operatorname{sen}\left(135^\circ - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+n^2}}{n^2(n+1)^2} \cdot \operatorname{sen}\left(135^\circ - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Guía para los Autores

Divulgaciones Matemáticas es una revista arbitrada que considera para su publicación trabajos inéditos de investigación, en todas las áreas de la Matemática y sus aplicaciones, historia o enseñanza. Contribuciones adecuadas trabajos de investigación, de divulgación e históricos y de enseñanza matemática. Se presta especial atención a los temas tratados en la reunión anual e itinerante de las **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** celebradas en Venezuela. Además, contempla una sección de problemas y soluciones, la cual presenta problemas que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado, sin conocimientos especializados.

El primer requisito para que un artículo sea publicable es su corrección matemática. En segundo lugar, el estilo expositivo debe ser atractivo y lo más fluido y organizado que sea posible. En los trabajos de investigación se tomarán en cuenta la relevancia y originalidad de los resultados obtenidos. El tercer requisito para que el cuerpo editorial de la revista acepte un artículo, para someterlo a evaluación y posible publicación, es que el mismo debe estar elaborado en LaTeX, utilizando una plantilla predefinida por la revista, se le pide a los autores respetar las instrucciones internas indicadas en la plantilla mencionada. El archivo fuente (.tex) y una versión en formato .dvi, .pdf o .ps (imprimible) debe enviarse por correo electrónico a divulgaciones@demat-fecluz.org. Si el artículo contiene figuras, éstas deben adjuntarse como archivos separados en formatos .png o .jpg.

Los lenguajes aceptados por la revista son español e inglés. Al someter un artículo, el autor debe remitir una carta en la que se haga constar que el artículo que se está sometiendo no ha sido publicado o sometido a otra revista de forma total o parcial. Dicha carta debe contener los siguientes datos: Nombre completo del autor o autores, título del artículo, firma del autor que somete el artículo (autor de correspondencia), y declaración expresa de conformidad de los demás autores (cuando exista más de un autor).

El autor, o autores, en el mensaje de sometimiento del manuscrito deben indicar la sección de la revista en la que sugiera debe ser incluido su trabajo, a saber: artículo de investigación, artículo de divulgación e histórico, artículo de enseñanza matemática. Además, el autor debe suministrar los datos (nombre, correo, institución donde laboran) de tres especialistas en el área del trabajo sometido. Los artículos deben organizarse en las siguientes secciones: Identificación, Resumen, Abstract, Introducción, Desarrollo, Agradecimiento (opcional), y Referencias bibliográficas (usar el estilo ejemplificado en la plantilla).

Identificación. Esta debe incluir: Título completo del trabajo en castellano e inglés; Título corto para el trabajo; Nombre completo y dirección completa del autor o autores; Afiliación institucional; Dirección electrónica; Dos clasificaciones, una primaria y otra secundaria, de cinco caracteres de la AMS (MSC 2010).

Resumen: Texto de no más de doscientas palabras que simplifique en esencia lo que se presenta a lo largo del trabajo. Debe tomar en cuenta aspectos como: Objetivos del trabajo; Metodología utilizada; Resultado. A continuación del resumen se deben incluir de tres a seis palabras o frases claves.

Abstract: Una traducción al idioma inglés de todo lo expuesto en el resumen.

Para mayor información se puede dirigir a la página web de la revista:

produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones

Cabe resaltar que **LA REVISTA SOLO PROCESARÁ LOS ARTÍCULOS QUE CUMPLAN CON TODOS LOS REQUISITOS ANTES EXPUESTOS.**

Guide for Authors

Divulgaciones Matemáticas is a refereed journal, which considers for publication, unpublished research papers in all branches of mathematics and its applications, history or teaching. Suitable contributions can be research papers, historical and/or teaching papers and bibliographical reviews. Special attention is paid to those topics covered by the annual itinerant meeting **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** held in Venezuela. In addition, the journal contemplates a section of problems and solutions, which contains problems that can be addressed by undergraduate students of mathematics without expertise.

Mathematical correctness is the first requirement for an article to be published. In second place, the exposition style should be attractive and most fluid and organized as possible. For research works the relevance and originality of the results will be taken into account. The third requirement to agree on the evaluation and possible publication of an article is its preparation in LaTeX using a predefined template by the journal. We ask the authors to respect the internal instructions given in the provided template. The source file (.tex) and a version .dvi, .pdf or .ps (printable) should be sent by email to divulgaciones@demat-fecluz.org. If the article contains figures, these should be attached as separate files in .jpg or .png formats.

The languages accepted by the journal are Spanish and English. When submitting an article, the author must include a separate letter stating that the article has not been published or submitted to another journal in total or partial way. The letter should contain the following information: Full name of author or authors, article title, signature of the author who submits the article (corresponding author), and a declaration of conformity of the other authors.

When submitting a manuscript, the author or authors, should suggest the section of the journal in which the work should be included, namely research papers, expository and historical papers, mathematics teaching papers. In addition, the author must provide the data (name, email, institution where they work) of three specialists in the area of the submitted work. Articles should be organized into the following sections: Identification, Abstract, Resumen, Introduction, Development, Acknowledgment (optional), and References (use the style exemplified in the template).

Identification. This should include: Full title in Spanish and English; short title for the article; Full name and full address of author or authors; Institutional affiliation; Electronic address; Two classifications, one primary and one secondary, of five characters of the AMS (MSC 2010).

Abstract: Text of not more than two hundred words simplify essentially what is presented throughout the work. You should take into account aspects such as work objectives; Methodology used; Result. Following the abstract should include three to six key words or phrases.

Resumen: A Spanish language translation of the above in the abstract.

For more information you can go to the Journal's website:

produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones

It should be noted that **THE MAGAZINE WILL ONLY PROCESS ARTICLES THAT MEET ALL THE REQUIREMENTS STATED ABOVE.**

DIVULGACIONES MATEMÁTICAS, Vol. 23-24, No. 1-2
Se terminó de editar en Junio del 2024
en el Departamento de Matemática (DEMAT)
Maracaibo - Venezuela.

La Universidad del Zulia

AUTORIDADES

Judith Aular de Durán

Rectora

Clotilde Navarro

Rector (E)

Vicerrectora Académica (E)

Vice Administrativo

Marlene Primera Galué

Vicerrectora Administrativa (E)

Secretaria de LUZ

Ixora Gómez

Secretaria de LUZ (E)

Facultad Experimental de Ciencias

José Ortega

Decano

Tobías Rosas Soto

Director del Departamento de Matemática



Universidad
del Zulia

Divulgaciones Matemáticas

Vol. 23-24, No. 1-2, 2022-2023

Contenido (Contents):



Facultad
Experimental
de Ciencias

Artículos de Investigación (Research papers)

- Super quasi-topological and paratopological vector spaces versus topological vector spaces.**
Super casi-topológicos y paratopológicos espacios vectoriales versus espacios vectoriales topológicos.
Madhu Ram, Bijan Davvaz 1-11
- Los números Ramsey para tres grafos y tres colores.**
The Ramsey numbers for three graphs and three colors.
José Figueroa, Tobías Rosas, Henry Ramírez, Armando Anselmi 12-28
- Estudio cualitativo del metabolismo de una droga ingerida.**
Qualitative study of the metabolism of an ingested drug.
Berónica Aguilar - Adolfo Fernández - Sandy Sánchez - Antonio Ruiz 29-43
- Top(X) y Spec(τ) como espacios primales.**
Top(X) and Spec(τ) as primal spaces.
Viviana Benavides - Jorge Vielma 44-53
- Grafo divisor de cero de $Z_2 \times \mathbb{Z}_q$.**
Zero divisor graph of $Z_2 \times \mathbb{Z}_q$.
Juan Otero - Daniel Brito - Tobías Rosas 54-63
- Un método nuevo para eliminar la indeterminación en los problemas singularmente perturbados con resonancia de Ackerberg y O'Malley.**
A new method for eliminating the indeterminacy in the singularly perturbed problems with Ackerberg-O'Malley resonance.
Jacques Laforgue 64-81
- Boundary Estimation with the Fuzzy Set Regression Estimator.**
Estimación Frontera con el Estimador de Regresión con Conjunto Difuso.
Jesús Fajardo 82-106

Problemas y Soluciones (Problems and Solutions)

Tobías Rosas Soto. (Editor)

107-112