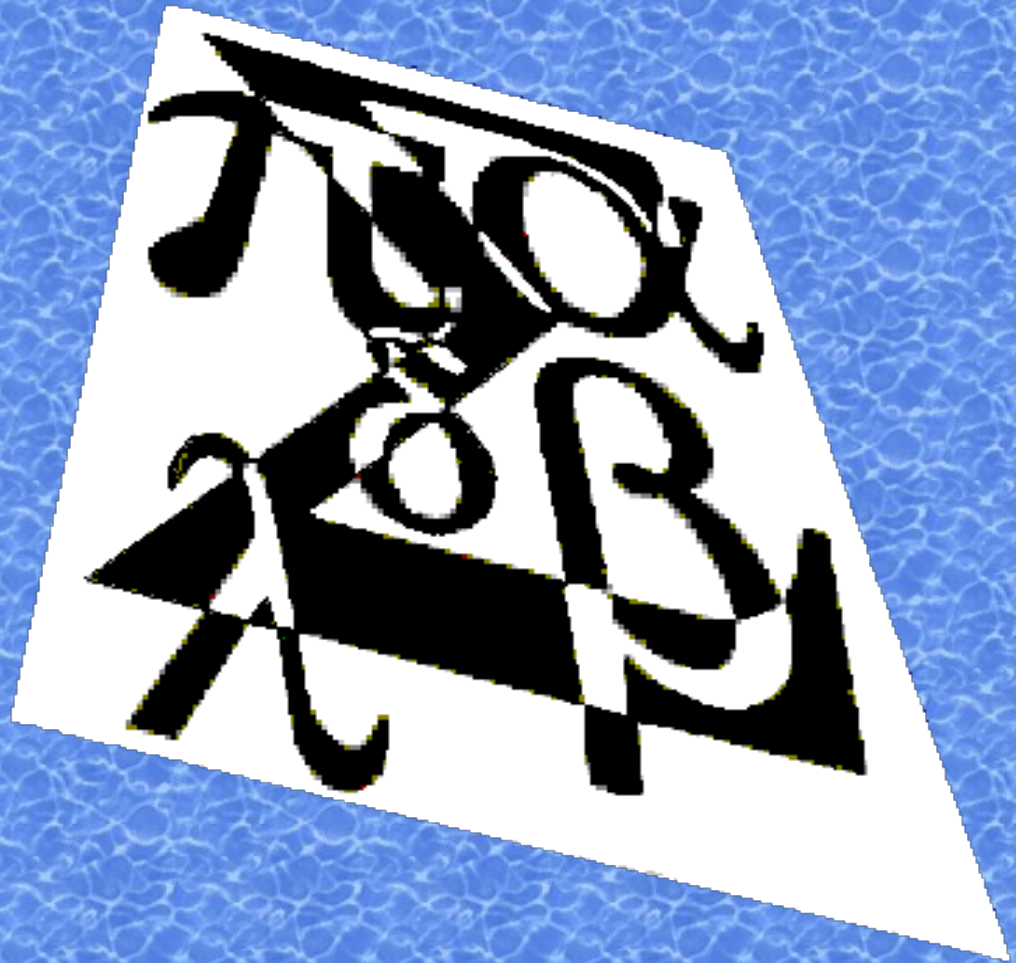




**Universidad
del Zulia**

Divulgaciones Matemáticas



Departamento de Matemática

Depósito legal: pp 199302ZU392

ISSN 1315-2068

Maracaibo - Venezuela

**Facultad
Experimental
de Ciencias**



Vol. 20 - No. 1 - 2019

Divulgaciones Matemáticas

Revista Matemática de la Universidad del Zulia
Facultad Experimental de Ciencias
Departamento de Matemática

Revista arbitrada, publicada de forma digital, de libre acceso, indizada en Mathematical Reviews, MathSci online/CD-ROM, Zentralblatt für Mathematik y Revencyt. Se publica un volumen anual compuesto por dos números, que aparecen en junio y diciembre.

Comité Eitorial

Dr. Vinicio Ríos (LUZ)

Dr. Wilson Pacheco (LUZ)

Dr. Deivi Luzardo (LUZ)

Editor Jefe: Dr. Tobías Rosas Soto (trosas@demat-fecluz.org)

Editores Asociados: Dr. Vinicio Ríos, Dr. Wilson Pacheco

Editores Eméritos: Dr. Alirio J. Peña P., MSc. Ángel V. Oneto R., Dr. José H. Nieto S., Dr. Genaro González, Dr. Daniel Núñez.

Editore Fundadores: Dr. Alirio J. Peña P., MSc. Ángel V. Oneto R.

Portada diseñada por Tobías Rosas Soto, basada en un diseño de Javier Adolfo Ortiz.

Dirección Postal:

Revista Divulgaciones Matemáticas
Departamento de Matemática
Facultad Experimental de Ciencias
La Universidad del Zulia - Apartado Postal 526
Maracaibo, Estado Zulia
Venezuela

Correo electrónico: divulgaciones@demat-fecluz.org

URL: divmat.demat-fecluz.org

Depósito Legal pp 199302ZU392

Compuesta con L^AT_EX y $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -L^AT_EX en el Departamento de Matemática de la Facultad Experimental de ciencias, Universidad del Zulia.

©1993 La Universidad del Zulia.

Universidad del Zulia
Maracaibo, Venezuela



DIVULGACIONES
MATEMÁTICAS

Vol. 20

2019

No. 1

Presentación

El Comité Editorial de *Divulgaciones Matemáticas* se complace en presentar el **Vol. 20, No. 1, 2019**. Los artículos contenidos en el presente número son: algunos recibidos en el segundo semestre del año **2018**, pero procesados en el primer semestre del año **2019**; los recibidos en el primer semestre del año **2019**; y algunos recibidos en el segundo semestre del **2019**, que fueron evaluados y aceptados para su publicación, antes de la edición del presente número.

Es importante resaltar que el presente número de la revista muestra artículos en las siguientes secciones que presenta *Divulgaciones Matemáticas*, a saber: seis (6) Artículos de Investigación, un (1) Artículo de Divulgación e Histórico, y un manuscrito con la solución de seis (6) problemas presentados en la sección de Problemas y Soluciones, y presentando un nuevo problema para resolver.

El trabajo editorial relacionado con este número es el resultado de mucho esfuerzo de algunos miembros del Departamento de Matemática de la Facultad Experimental de Ciencias. Los Editores queremos expresar nuestro agradecimiento a todos aquellos que hicieron posible este número: a los autores de los trabajos que se presentan, que dieron su voto de confianza a la revista; a los árbitros que evaluaron los artículos, cuya labor desinteresada permitió satisfacer los estándares de calidad de la revista y mejorar sensiblemente la forma de los trabajos; al equipo editorial de *Divulgaciones Matemáticas*; y en especial al Prof. José Heber Nieto por su aporte para la sección de *Problemas y Soluciones*. A todos, mil gracias.

Por último, el Comité Editorial de *Divulgaciones Matemáticas* pide disculpas a los autores de los artículos aquí publicados por los inconvenientes causados por la tardanza en la edición de este número, les agradecemos su espera. Además, invitamos a la comunidad matemática venezolana e internacional a seguir dándonos su voto de confianza sometiendo sus trabajos en la revista para evaluación y posible publicación.

¹ Dr. Tobías Rosas Soto.

¹Editor en Jefe de *Divulgaciones Matemáticas* y editor del presente número

Presentation

The Editorial Board of *Divulgaciones Matemáticas* is pleased to present the **Vol. 20, No. 1, 2019**. The articles contained in this issue are: some received during the second semester of the year **2018**, but processed during the first semester of the year **2019**; those received during the first semester of the year **2019**; and some received during the second semester, with ones were evaluated and accepted for publication, before the edition of this issue.

It is important to stand out that the present issue of the journal shows articles on each of the section that *Divulgaciones Matemáticas* present, i.e.: six (6) Research Papers, one (1) Expository and historical Papers, and one manuscripts with the solution of five (5) problems presented in the section of Problems and Solutions and presenting a new problem to solve.

The editorial work related to this issue is the result of the efforts of some members of the Department of Mathematics of the Experimental Faculty of Sciences. The Editors want to express their gratitude to all of those who made this issue possible: to the authors of the presented works, who gave their vote of confidence to the journal; to the referees, who evaluated the articles with selfless work, guaranteeing the quality standards of the journal and significantly improving the way of working; to the editorial team of *Divulgaciones Matemáticas*; and especially to Professor José Heber Nieto, for his contribution to the *Problems and Solutions* section. To all of them, thanks a lot.

Finally, the Editorial Board of *Divulgaciones Matemáticas* ask for apologize to the authors of the articles published here for the inconvenient the delay of the edition of this issues made, we thanks your wait. Furthermore, we invite the Venezuelan and international mathematical community to continue giving their support by submitting their articles to our journal for evaluation and possible publication.

² Dr. Tobías Rosas Soto.

²Chief Editor of *Divulgaciones Matemáticas* and editor of the present issue

DIVULGACIONES MATEMÁTICAS

Vol. 20, No. 1, 2019

Contenido (Contents):

Artículos de Investigación

(Research papers)

Mimetic methods to Helmholtz equation: numerical dispersion

Métodos miméticos para la ecuación de Helmholtz: dispersión numérica

Carlos E. Cadenas R., Livia J. Quiñonez T.

1–15

Condición de suma de grados y ciclo que contiene cada vértice de un subconjunto balanceado dado en grafos bipartitos balanceados.

Degree sum conditions and cycle that contains every vertex of a balanced subset given in balanced bipartite graphs.

Daniel Brito, Lope Mata Marín, Henry Ramírez

16–38

Insertion of a contra-Baire-1 (Baire-.5) function.

Inserción de una función Contra-Baire-1 (Baire-.5).

Majid Mirmiran, Binesh Naderi

39–48

Perturbations and zero points for equations with accretive mappings in fuzzy normed spaces.

Perturbación y puntos cero para ecuaciones con mapeo acumulativo en espacios normados difusos.

M. H. M. Rashid, Faisal Al-kasasbeh

49–66

Algoritmo para la solución numérica de la ecuación de Poisson usando diferencias finitas.

Algorithm for the numerical solution of the Poisson's equation using the finite difference.

Yohan Díaz Ferrer, Miguel Cruz Ramírez

67–77

Los números de Ramsey con componentes H -buena y secuencias simétricas.

The Ramsey numbers with components H -good and simultaneous sequences.

José Figueroa, Felicia Villarroel, Henry Ramírez, Juan Otero

78–90

Artículos de Divulgación e Históricos

(Expository and historical papers)

An application of an inequality of J. M. Aldaz.

Una aplicación de una desigualdad de J. M. Aldaz.

Mohamed Akkouchi

91–94

Problemas y Soluciones

(Problems and Solutions)

José H. Nieto S. (Editor)

95–99

Mimetic methods to Helmholtz equation: numerical dispersion

Métodos miméticos para la ecuación de Helmholtz: dispersión numérica

Carlos E. Cadenas R. (ccadenas@uc.edu.ve; ccadenas45@gmail.com)

Livia J. Quiñonez T. (liviaq33@hotmail.com)

Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias y Tecnología,
Universidad de Carabobo. Venezuela.

Abstract

This is the first in a series of papers in where mimetic finite difference methods (MFDM) to acoustic scattering are applying. A simple one-dimensional problem has been chosen to illustrate an implementation of MFDM. This problem consists of an incident flat pressure wave that disperses from an infinite rigid wall. An absorbent boundary condition is also applied. A study of the order of convergence and numerical dispersion of these methods has been carried out.

Key words and phrases: numerical dispersion, mimetic methods, acoustic scattering, Helmholtz equation.

Resumen

Este es el primero en una serie de artículos en donde los métodos de diferencias finitas miméticos (MFDM) son aplicados a la dispersión acústica. Se seleccionó un problema unidimensional simple para ilustrar una implementación de MFDM. Este problema consiste en una onda de presión plana incidente que se dispersa desde una pared rígida infinita. También es aplicada una condición de frontera absorbente. Se ha llevado a cabo un estudio del orden de convergencia y de la dispersión numérica de estos métodos.

Palabras y frases clave: dispersión numérica, métodos miméticos, dispersión acústica, ecuación de Helmholtz.

1 Introduction

The mimetic discretization methods are finite difference discretizations in which there are a set of discrete operators which maintain some important properties of the equivalent continuous operators. About a couple of decades ago, the support operators method was developed by Samarskii et al. [33, 34]. These discrete operators are build using a primal operator such that the second one is calculated using a Green's theorem discrete equivalent. Castillo and Grone [14]

Recibido 18/10/2018. Revisado 15/12/2018. Aceptado 10/03/2019.

MSC (2010): Primary 65L00; Secondary 65L12, 65L20.

Autor de correspondencia: Carlos E. Cadenas R.

develop a matrix method in order to build mimetic discretizations such that they have high order approximations at all points in the grid for the divergence operator as well as the gradient operator on one dimensional staggered uniform grids. In the work presented by Montilla, Cadenas and Castillo [30], using the ideas of [10] this methodology to nonuniform staggered grids is extended, producing low order mimetic operators for the divergence and the gradient. Among other works related to the generation of mimetic operators can be mentioned [16, 19, 22, 35, 36, 37]. The mimetic methods have been applied both in the resolution of ordinary differential equations (boundary values problems) and in partial differential equations. Among them can be mentioned the following works [5, 6, 17, 20, 21, 26, 27, 28, 31, 38]. To have a more general idea about the mimetic methods and some other applications it can be observed [15, 29].

Among the works related to the numerical resolution of the Helmholtz equation by mimetic methods, we have [12, 18]. On the study of the numerical dispersion of the numerical solution of various methods applied to wave problems can be mentioned [1, 2, 3, 4, 23, 24].

In this paper, it is show how to use the difference equations obtained from the mimetic operators for solving the Helmholtz equation in 1D, subject to the boundary conditions of rigid wall and irradiation at infinity. Section 2 is divided into three subsections which present the basics for developing this work. Subsection 2.1 describes the model problem, which will be analyzed along this work while subsections 2.2 and 2.3 will describe the notation used to designate the staggered grids, grid functions and discrete operators. Section 3 presents the mimetic finite difference equations obtained from the discretization process of the Helmholtz equation. Section 4 presents the order of convergence for different values of the wavenumber k using the support operator mimetic methods 1-2-1 and 2-2-2 for both, uniform and nonuniform grids. Section 5 presents a numerical and analytic study of the numerical pollution due to the dispersion of the scattered wave. Finally, section 6 presents some concluding remarks about the results obtained in this work.

2 Preliminars

In this section, it will be presented the governing equations of the one-dimensional acoustic wave scattering problem as well as an introduction to the generation of nonuniform staggered grids and grid functions. Additionally, the mimetic operators of divergence and gradient for staggered grids are here presented.

2.1 Model Problem

The one-dimensional acoustic scattering problem is modeled by the Helmholtz equation given by $p'' + k^2 p = 0$ which is subject to the rigid wall boundary condition $p'(0) = Ik$ and the irradiation condition $p'(1) - Ikp(1) = 0$ at infinity, where $I = \sqrt{-1}$. This elementary problem has been used by the author on several occasions in order to study the behavior of different methods, see for example [7, 8, 9, 11]. Applying the following variable change

$$z = p' \tag{1}$$

produces a first order system of differential equations of the form

$$z - p' = 0 \tag{2}$$

$$z' + k^2 p = 0 \tag{3}$$

with boundary conditions

$$z(0) = Ik \quad (4)$$

$$z(1) - Ikp(1) = 0 \quad (5)$$

The equation (2) comes from the variable change (1) that would represent the gradient $z = \nabla p$, likewise z' would represent the divergence $\nabla \cdot z$ in the equation (3).

2.2 Staggered Grid and Grid Functions

A uniform staggered grid was used in this work. Such a grid consists of N cells and $N + 1$ nodes on the considered onedimensional domain. Any cell is define by the set of points between two consecutive nodes. It is usual to identify one cell by any of its interior points. In this case, every cell will be identified by its middle points. Therefore there will be N nodes x_i for $i = 1, 2, \dots, N$ and $N - 1$ cells $x_{i+\frac{1}{2}}$ for $i = 1, 2, \dots, N$ where $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i+x_{i+1}}{2}$. Three types of grid functions will be used; these are: nodal functions, cell-valued functions and extended functions. Nodal functions are defined as $f : HC \rightarrow HN$, cell-valued functions as $g : HN \rightarrow HC$ and, finally, the extended functions are defined as $g : HN \rightarrow HC^*$, where HC is the space of cell-valued functions, HN is the space of nodal functions and the symbol $*$ designates an extension to the space of cell-valued functions including the boundary nodes. For more detail on these definitions you can see [15].

2.3 Discrete Operators

Castillo and Yasuda [13] use the mimetic operators of divergence and gradient for the 1-2-1 and 2-2-2 methods. This operators have the form

$$\mathbf{D} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{G}_{1-2-1} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

and

$$\mathbf{G}_{2-2-2} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & 3 & -\frac{1}{3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{3} & -3 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Divergence mimetic operator (6) is used in the 1-2-1 method as well as the 2-2-2 method because this operator has order two on the interior nodes and on the boundary ones as well. Gradient operator (7) is only used in the 1-2-1 method because it has order two on the interior nodes and order one at the boundary. The other gradient operator (8) has order two on the interior nodes as well as on the boundary nodes. This is the main difference between both methods.

3 Mimetic Finite Difference Equations

Let's denote $h_i = x_i - x_{i-1}$ and the approximations

$$z'_{i+\frac{1}{2}} = \frac{z_{i+1} - z_i}{h_{i+1}} \quad (9)$$

$$p'_i = \frac{p_{i+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}}{\frac{h_i + h_{i+1}}{2}} \quad (10)$$

which are all known [32] for the divergence as well as the gradient. Making a nonuniform discretization, given by $x_i = (a + \frac{b-a}{N}(i-1))^2$ as shown in [37], and substituting the approximations (9) and (10), the following difference equations are obtained

$$z_{i+1} - z_i + h_{i+1}k^2 p_{i+\frac{1}{2}} = 0 \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (11)$$

$$\frac{h_i + h_{i+1}}{2} z_i - p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}} = 0 \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (12)$$

In order to include the boundary condition (4), (11) will be used with $i = 0$, knowing that $z_0 = Ik$, yielding the equation

$$z_1 + h_1 k^2 p_{\frac{1}{2}} = Ik \quad (13)$$

Similarly, in order to use the boundary condition (5) involved, the approximation $z_N = \frac{p_N - p_{N-\frac{1}{2}}}{\frac{h_N}{2}}$ is going to be used such that, solving for p_N and substituting it in (5) and knowing that $p_N = p(1)$, the following equation is also obtained

$$\left(\frac{h_N}{2} - \frac{1}{Ik} \right) z_N + p_{N-\frac{1}{2}} = 0 \quad (14)$$

In this way an algebraic system of $2N$ linear equations and $2N$ unknowns is given by (11-14). In order to illustrate the nature of this linear system of equations let us considerate the case for

$N = 4$

$$\begin{bmatrix} h_1 k^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{h_1+h_2}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & h_2 k^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{h_2+h_3}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & h_3 k^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{h_3+h_4}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & h_4 k^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{h_4}{2} - \frac{1}{Ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{\frac{1}{2}} \\ z_1 \\ p_{\frac{3}{2}} \\ z_2 \\ p_{\frac{5}{2}} \\ z_3 \\ p_{\frac{7}{2}} \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ik \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

When one uses the mimetic finite difference method 2-2-2 scheme, the coefficient matrix of the algebraic linear system of equations (15) given above is modified, such that only the last row of the system changes. In order to obtain this last equation, all the necessary calculations are shown below, using a uniform mesh.

First consider the gradient approximation at the right boundary $x = 1$ given by

$$z_N = \frac{\frac{3}{4}p_N - \frac{3}{2}p_{N-\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}p_{N-\frac{3}{2}}}{\frac{h}{2}}$$

Now solving p_N for this equation and substituting it in (5) yields

$$\left(1 - \frac{3Ihk}{8}\right) z_N + \frac{Ik}{8} p_{N-\frac{3}{2}} - \frac{9Ik}{8} p_{N-\frac{1}{2}} = 0$$

In order to have an equivalent equation where only variables $p_{N-\frac{1}{2}}$ and z_N are involved, it is necessary to eliminate the variable $p_{N-\frac{3}{2}}$, which can be done by an algebraic summation of this equation with the equations (11) and (12), thus yielding

$$p_{N-\frac{1}{2}} - \frac{1 - Ihk/2}{Ik(h^2k^2 + 1)} z_N = 0 \quad (16)$$

Using the latter equation in a matrix structure like (15) and changing its last row for this equation, it can be clearly observed that the resulting matrix for 2-2-2 scheme is also symmetric (considerate the case for $N = 4$).

$$\begin{bmatrix} h_1 k^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{h_1+h_2}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & h_2 k^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{h_2+h_3}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & h_3 k^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{h_3+h_4}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & h_4 k^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{Ihk-2}{2Ik(h^2k^2+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{\frac{1}{2}} \\ z_1 \\ p_{\frac{3}{2}} \\ z_2 \\ p_{\frac{5}{2}} \\ z_3 \\ p_{\frac{7}{2}} \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ik \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4 Order of Convergence

Having programmed these methods with MATLAB, various numerical tests were carried out, throwing an order of convergence of two for both, the pressure primary variable p and the

velocity secondary variable z . These results are illustrated in Figures 1 and 2 for the 1-2-1 and 2-2-2 schemes respectively, using a uniform discretization. Surprisingly, the order of convergence

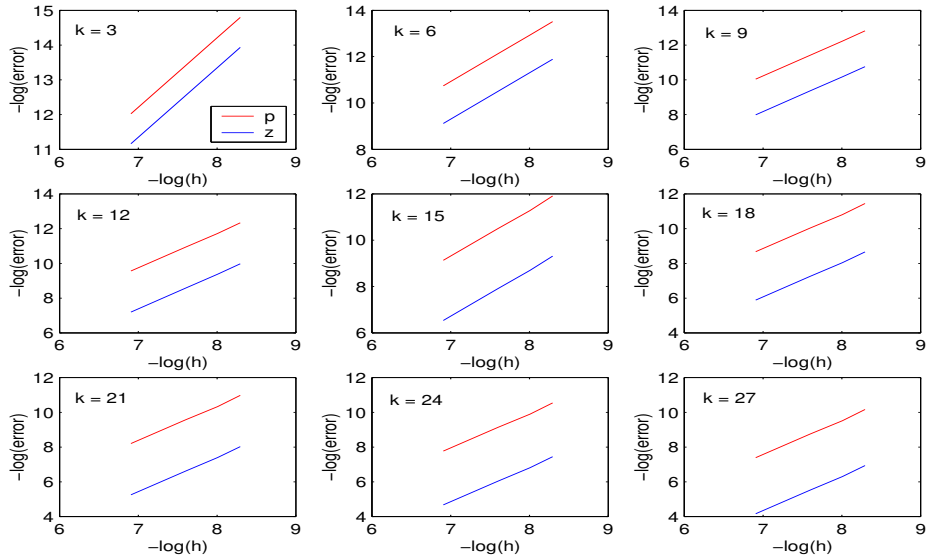


Figure 1: Order of convergence for the 1-2-1 scheme using a uniform discretization.

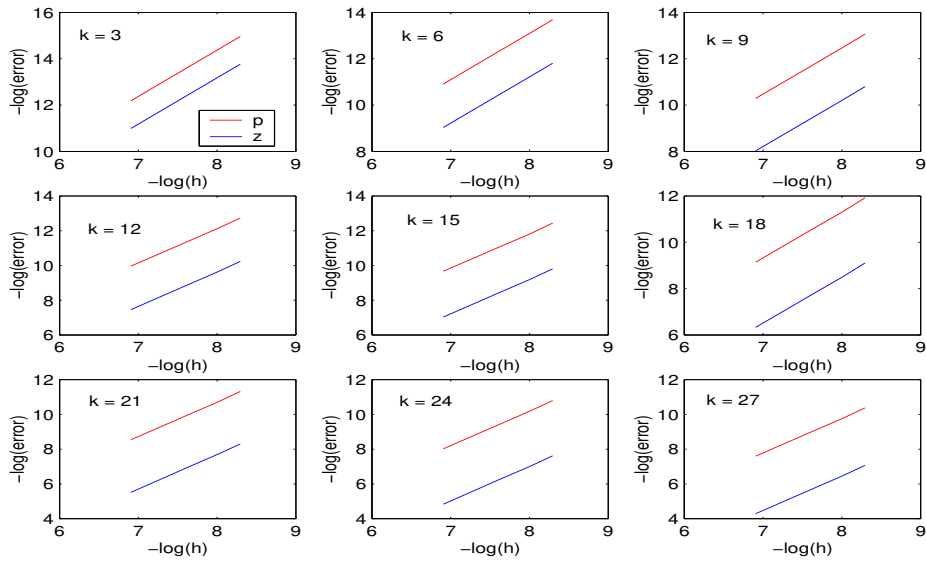


Figure 2: Order of convergence for the 2-2-2 scheme using a uniform discretization.

remains constant when a nonuniform discretization is used, differing from the results presented in [32], possibly because the differential equation herein considered is homogeneous.

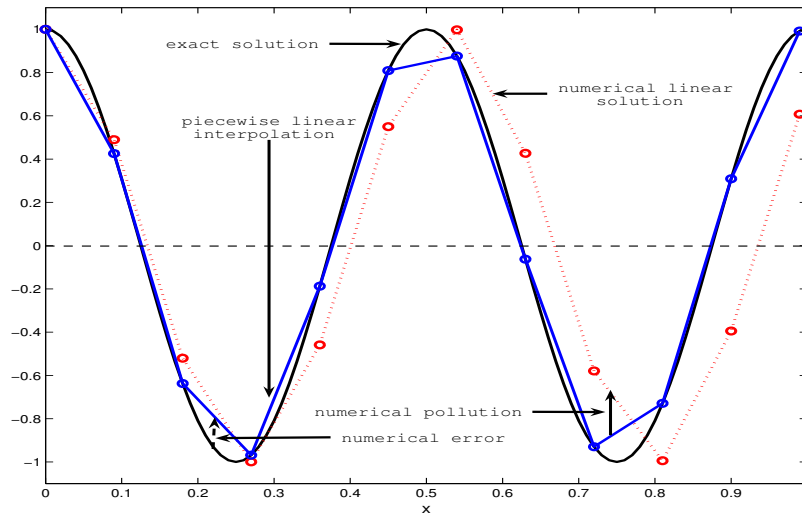


Figure 3: Effect of numerical dispersion in solving the Helmholtz equation.

5 Numerical Dispersion

An analysis of the difference between the analytical solution of the wavenumber and its numerical approximation will be done in this section. This difference is commonly referred to as the pollution error due to the dispersion. The total error is defined as the sum of the interpolating error plus the pollution error. This might be observed in Figure 3.

In order to calculate the wavenumber of the numerical solution for the numerical methods used in this research, a set of difference equations previously obtained (considering a uniform discretization) will be used. First the study will be done for the interior nodes, then for the nodes involved in the left border and later for the right border (both for the 1-2-1 method and for the 2-2-2 method).

5.1 Numerical Dispersion to the inner nodes

By using z_i from the equation (12) and replacing the result in (11) we get

$$p_{i+\frac{3}{2}} + (h^2 k^2 - 2)p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}} = 0 \quad (17)$$

which is solved using the basic procedures for solving a linear difference equation. For further details about these procedures, see [25].

In order to solve the ordinary linear difference equation with constant coefficients (17) of order two it is necessary to substitute

$$p_i = \lambda^i$$

such that one obtains a polynomial equation in λ of degree two, given by

$$\lambda^2 + (h^2 k^2 - 2)\lambda + 1 = 0$$

Solving such an equation it is possible to obtain its two zeros:

$$\lambda_{1,2} = 1 - \frac{1}{2}(kh)^2 \pm \frac{kh}{2}\sqrt{(kh)^2 - 4} \quad (18)$$

Note that the values of λ are complex numbers for $0 < kh < 2$, being the cutoff frequency equal to two, which is not more than the value from which λ is real. It is also known that λ can be expressed as

$$\lambda = |\lambda| \left(\cos(\tilde{k}h) \pm I \sin(\tilde{k}h) \right) \quad (19)$$

where \tilde{k} is the wave number of the numerical solution. As can be seen from the equations (18) and (19) $\tilde{k} \neq k$.

An estimate of the relative error, due to the effect of dispersion of the numerical solution, for the calculation of the numerical wavenumber is now presented. In order to do so, we consider the real part of the equations (18) and (19) and expanding arc cos $\left[\frac{Re(\lambda_1)}{|\lambda_1|} \right]$ into its Taylor series with $Re(\lambda_1) = 1 - \frac{1}{2}(kh)^2$ for $0 < kh \leq 2$ yields

$$\tilde{k}h = kh + \frac{1}{24}(kh)^3 + \frac{3}{640}(kh)^5 + O((kh)^7) \quad (20)$$

from where it is obtained that the relative error in the calculation of k is given by

$$E_{r,k} = \frac{\tilde{k}h - kh}{kh} = \frac{1}{24}(kh)^2 + \frac{3}{640}(kh)^4 + O((kh)^6) \quad (21)$$

Another fact when characterizing the wavenumber is the cutoff frequency, which is nothing else but the normalized frequency ($K = kh$), in which case the absolute value of λ abruptly changes, either expanding or contracting itself. In this case the cutoff frequency is two.

Figure 4 show the graphics of the real and imaginary part of λ as well as its absolute value. In both cases it can be seen that the absolute value of λ is one ($|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$) for $kh \leq 2$. If $kh > 2$ we have to $|\lambda_1|$ and $|\lambda_2| > 1$. We also have to $Re(\lambda_1) \approx \cos(kh)$ and $Im(\lambda_1) \approx \sin(kh)$ when $kh \leq 1$. The same happens for λ_2 .

Figures 5 and 6 show a set of curves which relate \tilde{k} to k for different values of h , and the percentage error for the approximation of k respectively. A single legend is used for all the graphics involved in these Figures.

5.2 Numerical Dispersion for the left boundary

In a similar way to how the calculations were made for the inner nodes, we proceed with the left boundary, for both the method 1-2-1 and for the method 2-2-2, because in both cases the equations involved are the same. Using the equations (12) and (13) with $i = 1$, we have

$$p_{\frac{3}{2}} + ((kh)^2 - 1)p_{\frac{1}{2}} = Ikh$$

from where we get

$$\lambda^{\frac{3}{2}} + ((kh)^2 - 1)\lambda^{\frac{1}{2}} = Ikh$$

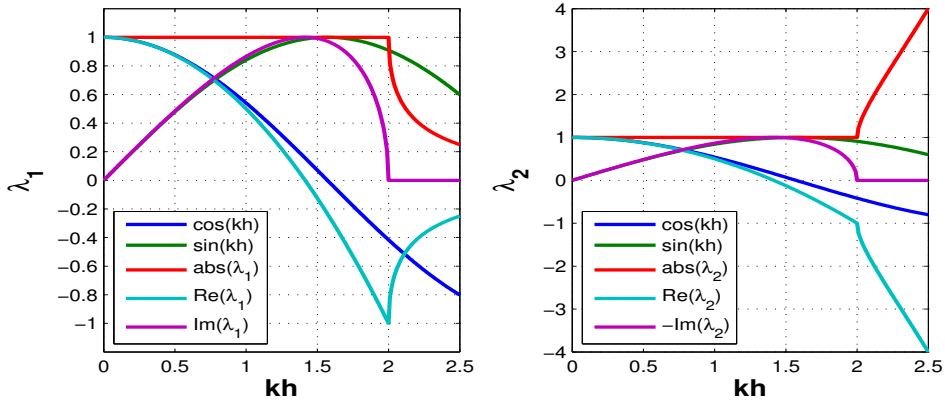


Figure 4: Real part, imaginary part and absolute value of λ .

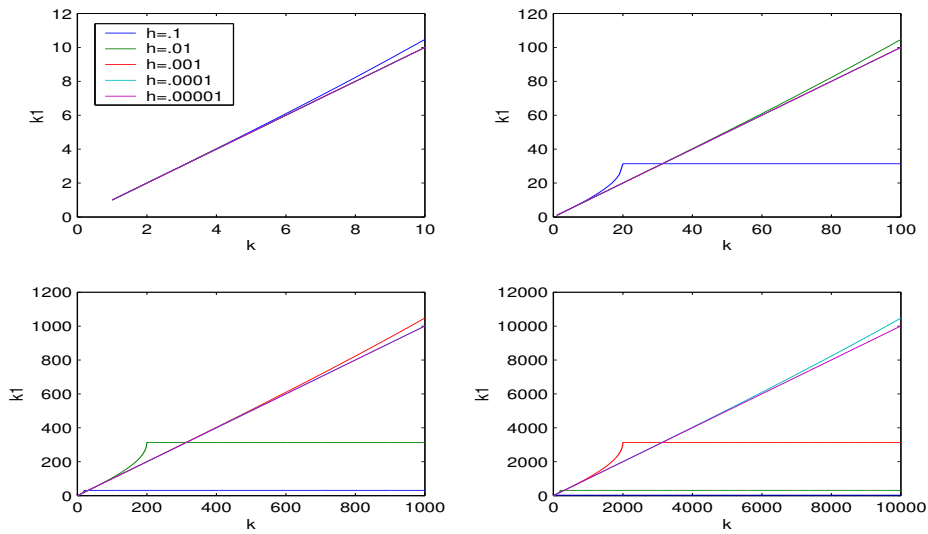


Figure 5: \tilde{k} vs k for different values of h .

Whose roots are $\lambda_1^{\frac{1}{2}} = -Ikh$ and $\lambda_{2,3}^{\frac{1}{2}} = \frac{I}{2} \left(kh \pm \sqrt{(kh)^2 - 4} \right)$, thus

$$\lambda_1 = -(kh)^2 \quad \text{and} \quad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{4} \left(kh \pm \sqrt{(kh)^2 - 4} \right)^2$$

λ_1 does not make physical sense and when simplifying $\lambda_{2,3}$, the same values are obtained as in the equation (18) and therefore the values of \tilde{kh} and the relative error in the calculation of k are given by (20) and (21).

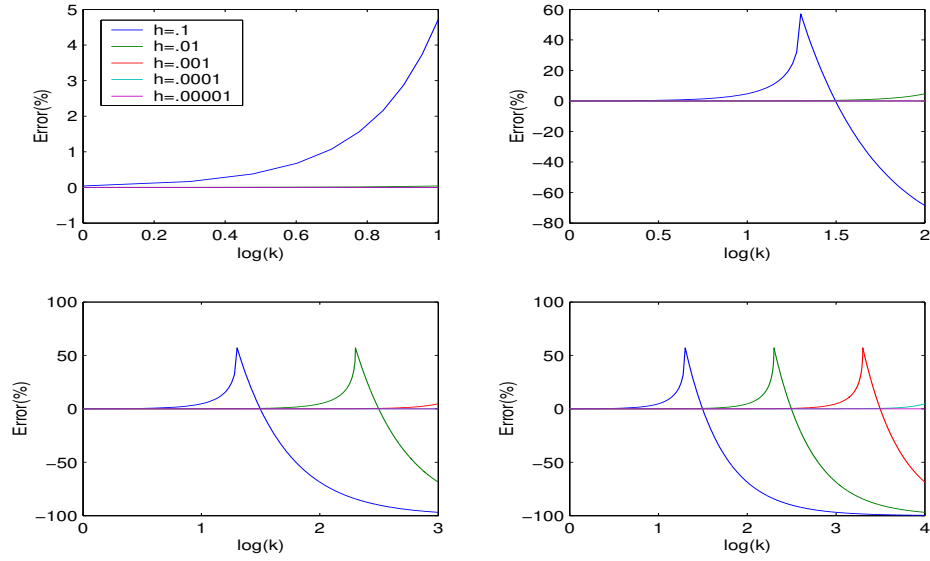


Figure 6: Relative error to the approximation of k .

5.3 Numerical Dispersion for the right boundary

In a similar way to how the calculations were made for the interior nodes, we proceed to the right boundary, both for method 1-2-1 and for method 2-2-2. Obtaining the following results

5.3.1 Method 1-2-1

From the equation (14) we have to

$$z_N = \frac{2Ik}{2 - Ikh} p_{N-\frac{1}{2}}$$

that when used in combination with the equations (11) and (12) with $i = N - 1$ we get

$$p_{N-\frac{3}{2}} + \left((kh)^2 - \frac{3kh + 2I}{kh + 2I} \right) p_{N-\frac{1}{2}} = 0$$

from where we get

$$\lambda = \frac{kh + 2I}{(kh + I)(2 - Ikh - (kh)^2)} = \frac{4 - (kh)^2 - (kh)^4 + I4kh}{(kh)^6 - 2(kh)^4 + (kh)^2 + 4} \quad (22)$$

Again considering the real part of the equations (22) and (19) and expanding $\arccos \left[\frac{Re(\lambda)}{|\lambda|} \right]$ into its Taylor series with $Re(\lambda) = \frac{4 - (kh)^2 - (kh)^4}{(kh)^6 - 2(kh)^4 + (kh)^2 + 4}$ yields

$$\tilde{k}h = kh - \frac{1}{3}(kh)^3 + \frac{77}{160}(kh)^5 + O((kh)^7)$$

from where it is obtained that the relative error in the calculation of k is given by

$$E_{r,k} = -\frac{1}{3}(kh)^2 + \frac{77}{160}(kh)^4 + O((kh)^6)$$

Graph on the left of Figure 7 show the related curves for the values of λ . It is emphasized that the Cutoff phenomenon does not appear. However $|\lambda| \approx 1$ only if $kh \ll 1$. Initially $|\lambda|$ grows and then decreases, observing areas where $|\lambda| > 1$ and where $|\lambda| < 1$. It also has $Re(\lambda) \approx \cos(kh)$ and $Im(\lambda) \approx \sin(kh)$ if $kh < 1$.

5.3.2 Method 2-2-2

From the equation (16) we have to

$$z_N = \frac{2Ik}{2 - Ikh} p_{N-\frac{1}{2}}$$

that when used in combination with the equations (11) and (12) with $i = N - 1$ we get

$$p_{N-\frac{3}{2}} + \left((kh)^2 - 1 + \frac{I2kh((kh)^2 + 1)}{2 - Ikh} \right) p_{N-\frac{1}{2}} = 0$$

from where we get

$$\lambda = \frac{kh + 2I}{(kh)^3 - 2i(kh)^2 + 3kh + 2I} = \frac{(kh)^4 - (kh)^2 + 4 + I4kh((kh)^2 + 1)}{(kh)^6 + 10(kh)^4 + (kh)^2 + 4} \quad (23)$$

Again considering the real part of the equations (23) and (19) and expanding $\arccos \left[\frac{Re(\lambda)}{|\lambda|} \right]$ into its Taylor series with $Re(\lambda) = \frac{(kh)^4 - (kh)^2 + 4}{(kh)^6 + 10(kh)^4 + (kh)^2 + 4}$ yields

$$\tilde{kh} = kh + \frac{13}{6}(kh)^3 - \frac{563}{163}(kh)^5 + O((kh)^7)$$

from where it is obtained that the relative error in the calculation of k is given by

$$E_{r,k} = \frac{13}{6}(kh)^2 - \frac{563}{163}(kh)^4 + O((kh)^6)$$

In the graph on the right of Figure 7 the related curves are shown for the values of λ . It is emphasized that the Cutoff phenomenon does not appear. It has $|\lambda| \approx 1$ only if $kh \ll 1$. $|\lambda|$ decreases monotonously, so $|\lambda| < 1$ for $kh > 0$. It also has $Re(\lambda_1) \approx \cos(kh)$ and $Im(\lambda_1) \approx \sin(kh)$ only if $kh \ll 1$.

6 Concluding Remarks

- A significative difference between the orders of convergence for the 1-2-1 and 2-2-2 mimetic finite difference methods, using uniform grids, is not observed.
- Both methods presented and kept order of convergence equals to two for the cases herein studied.

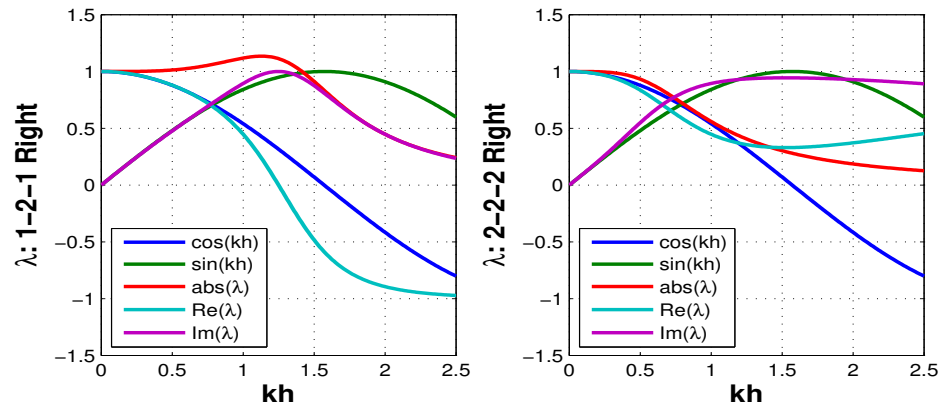


Figura 7: Real part, imaginary part and absolute value of λ .

- The cutoff frequency has a value of two for both the internal points and the left boundary for 1-2-1 and 2-2-2 methods.
- Cutoff frequency was not observed at the right boundary for none of the two methods studied.
- Relative error in the calculation of k both in the inner nodes and in the boundaries is $O((kh)^2)$.

Referencias

- [1] M. Ainsworth. *Discrete dispersion relation for hp-version finite element approximation at high wave number*. SIAM Journal on Numerical Analysis. 42 (2004) 553-575.
- [2] M. Ainsworth and H. A. Wajid. *Dispersive and dissipative behavior of the spectral element method*. SIAM Journal on Numerical Analysis. 47 (2009) 3910-3937.
- [3] I. M. Babuška and S. A. Sauter. *Is the pollution effect of the fem avoidable for the helmholtz equation considering high wave numbers?*. SIAM Journal on numerical analysis. 34 (1997) 2392-2423.
- [4] M. Bartoň, V. Calo, Q. Deng, and V. Puzyrev. *Generalization of the Pythagorean Eigenvalue Error Theorem and its Application to Isogeometric Analysis*. In Di Pietro D., Ern A., Formaggia L. (eds) Numerical Methods for PDEs. SEMA SIMAI Springer Series, vol 15. Springer, Cham. (2018) 147-170.
- [5] L. Beirão da Veiga, V. Gyrya, K. Lipnikov and G. Manzini. *Mimetic finite difference method for the Stokes problem on polygonal meshes*. Journal of Computational Physics. 228 (2009) 7215-7232.

-
- [6] J. Blanco, O. Rojas, C. Chacón, J. M. Guevara-Jordan and J. Castillo. *Tensor formulation of 3-D mimetic finite differences and applications to elliptic problems*. Electronic Transactions on Numerical Analysis. 45 (2016) 457-475.
- [7] C. E. Cadenas R. *Formulación y Aplicación del Método de Elementos Finitos Mínimos Cuadrados a un Problema de Dispersión de Ondas y Comparación con otros Métodos Numéricos*. Trabajo de Ascenso, Universidad de Carabobo. (2003). pp. 115.
- [8] C. E. Cadenas R. and V. Villamizar *Application of Least Squares Finite Element Method to Acoustic Scattering and Comparison with Other Numerical Techniques*. NACoM-2003, Cambridge. Extended Abstracts. (2003) 32-35.
- [9] C. E. Cadenas R. and V. Villamizar. *Comparison of Least Squares FEM, Mixed Galerkin FEM and an Implicit FDM Applied to Acoustic Scattering*. Appl. Num. Anal. Comp. Math. 1 (1) (2004) 128-139.
- [10] C. E. Cadenas R. and O. Montilla M. *Matriz de Vandermonde generalizada para la construcción de los operadores de divergencia discreta mimética*. Revista Ingeniería UC. 11 (2) (2004) 48-52.
- [11] C. E. Cadenas, J. J. Rojas and V. Villamizar. *A least squares finite element method with high degree element shape functions for one-dimensional Helmholtz equation*. Mathematics and Computers in Simulation. 73 (2006) 76-86
- [12] C. E. Cadenas, y L. J. Quiñonez. *Resolviendo la ecuación de Helmholtz 1D por métodos miméticos*. 1er Congreso Venezolano de Ciencia Tecnología e Innovación, LOCTI-PEIH. Caracas, 23 - 26 de septiembre de 2012, Caracas, Venezuela.
- [13] J. E. Castillo and M. Yasuda. *Comparison of two matrix operator formulations for mimetic divergence and gradient discretizations*. International Conference on Parallel and Distributed Processing Techniques and Applications. Volume: III. (2003)
- [14] J. E. Castillo and R. D. Grone. *A Matrix Analysis Approach to Higher-Order Approximations for Divergence and Gradients Satisfying a Global Conservation Law*, SIAM J MATRIX ANAL, 25 (1) (2003) 128-142 .
- [15] J. E. Castillo and G. Miranda. *Mimetic discretization methods*. CRC Press, Taylor and Francis Group (2013), pp 230.
- [16] J. E. Castillo and R. D. Grone. *Using Kronecker products to construct mimetic gradients*. Linear and Multilinear Algebra. 65 (10) (2017) 2031-2045.
- [17] J. E. Castillo and G. Miranda. *High Order Compact Mimetic Differences and Discrete Energy Decay in 2D Wave Motions*. In: Bittencourt M., Dumont N., Hesthaven J. (eds) Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations ICOSAHOM 2016. Lecture Notes in Computational Science and Engineering, vol 119. (2017). Springer, Cham.
- [18] M, Colmenares. *Métodos Miméticos Aplicados a la Ecuación de Helmholtz 1D Sobre Mallados No-Uniformes*, Trabajo Especial de Grado para optar al Título de Licenciada en Matemática. Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología de la Universidad de Carabobo. Valencia, 2008.

- [19] J. Corbino and J. Castillo. *MOLE: Mimetic Operators Library Enhanced The Open-Source Library for Solving Partial Differential Equations using Mimetic Methods*. Computational Science and Engineering Faculty and Students Research Articles. Technical Report. (2017).
- [20] M. Fagúndez, J. Medina, C. Cadenas and G. Larrazabal. *Discretizaciones Miméticas para dinámica de fluidos computacional: Caso Unidimensional*. Revista Ingeniería UC. 11 (3) (2004) 52-57.
- [21] V. Gyrya and K. Lipnikov. *High-order mimetic finite difference method for diffusion problems on polygonal meshes*. Journal of Computational Physics. 227 (2008) 8841-8854.
- [22] V. Gyrya and K. Lipnikov. *The arbitrary order mimetic finite difference method for a diffusion equation with a non-symmetric diffusion tensor*. Journal of Computational Physics. 348 (1) (2017) 549-566.
- [23] I. Harari. *Reducing spurious dispersion, anisotropy and reflection in finite element analysis of time-harmonic acoustics*. Computer methods in applied mechanics and engineering. 140 (1997) 39-58.
- [24] F. Ihlenburg and I. Babuška. *Dispersion analysis and error of Galerkin finite element methods for the Helmholtz equation*. International journal for numerical methods in engineering. 38 (1995). 3745-3774.
- [25] H. Levy and F. Lessman. *Finite Difference Equations*. Dover. New York, pp. 278. (1992).
- [26] K. Lipnikov, G. Manzini and D. Svyatskiy. *Analysis of the monotonicity conditions in the mimetic finite difference method for elliptic problems*. Journal of Computational Physics. 230 (2011) 2620-2642.
- [27] K. Lipnikov, G. Manzini, F. Brezzi and A. Buffa. *The mimetic finite difference method for the 3D magnetostatic field problems on polyhedral meshes*. Journal of Computational Physics. 230 (2011) 305-328.
- [28] K. Lipnikov and G. Manzini. *A high-order mimetic method on unstructured polyhedral meshes for the diffusion equation*. Journal of Computational Physics. 272 (2014) 360-385.
- [29] K. Lipnikov, G. Manzini and M. Shashkov. *Mimetic finite difference method*. Journal of Computational Physics. 257 (2014) 1163-1227.
- [30] O. Montilla, C. Cadenas and J. Castillo. *Matrix Approach to Mimetic Discretizations for Differential Operators on Non-uniform Grids*. Mathematics and Computers in Simulation. 73 (2006) 215-225.
- [31] G. T. Oud, D. R. van der Heul, C. Vuik and R.A.W.M. Henkes. *A fully conservative mimetic discretization of the NavierStokes equations in cylindrical coordinates with associated singularity treatment*. Journal of Computational Physics. 325 (15) (2016) 314-337.
- [32] S. Rojas. *Mimetic Finite Difference Method for the Steady Diffusion Equation with Rough Coefficients*. 2003 SIAM Conference on Computational Science and Engineering, Mimetic Computations, San Diego, CA, USA. (2003).

-
- [33] A. A. Samarskii, V. F. Tishkin, A. P. Favorskii and M. Shashkov. *Operational Finite-Difference Schemes*, Diff. Eqns., 17 No. 7, 854-862, (1981).
- [34] A. A. Samarskii, V. F. Tishkin, A. P. Favorskii, and M. Shashkov. *Employment of the Reference-Operator Method in the Construction of Finite Difference Analogs of Tensor Operations*, Diff. Eqns., 18, No. 7, 881-885, (1982).
- [35] E. Sanchez, C. Paolini, P. Blomgren and J. Castillo. *Algorithms for Higher-Order Mimetic Operators*. In: Kirby R., Berzins M., Hesthaven J. (eds) Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations ICOSAHOM 2014. Lecture Notes in Computational Science and Engineering, vol 106. (2015). Springer, Cham.
- [36] E. J. Sanchez, G. F. Miranda, J. M. Cela, and J. E. Castillo. *Supercritical-Order Mimetic Operators on Higher-Dimensional Staggered Grids*. In: Bittencourt M., Dumont N., Hesthaven J. (eds) Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations ICOSAHOM 2016. Lecture Notes in Computational Science and Engineering, vol 119. (2017). Springer, Cham.
- [37] M. Shashkov. *Conservative Finite-Difference Methods on General Grids*. CRC Press. Florida, USA (1996).
- [38] G. Sosa, J. Arteaga and O. Jiménez. *A study of mimetic and finite difference methods for the static diffusion equation*. Computers and Mathematics with Applications. 76 (3) (2018) 633-648.

Condición de suma de grados y ciclo que contiene cada vértice de un subconjunto balanceado dado en grafos bipartitos balanceados

Degree sum conditions and cycle that contains every vertex of a balanced subset given in balanced bipartite graphs

Daniel Brito (danieljosb@gmail.com)

Lope Mata Marín (lmata73@gmail.com)

Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente, Núcleo de Sucre.
Cumaná, Venezuela.

Henry Ramírez (hramirez6@hotmail.com)

Departamento de Higiene y Seguridad Laboral
Universidad Politécnica Clodosbaldo Russián.
Cumaná, Venezuela.

Resumen

Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$ y U un subconjunto de $V(G)$, con $|U \cap A| = |U \cap B|$. En este artículo se demuestra que si $\Delta_{1,1}(S) = \max\{d(a) + d(b) : a \in S \cap A \text{ y } b \in S \cap B\} \geq n + 1$, para cada conjunto independiente S de orden $\frac{k(U)}{2} + 1$ en $G[U]$ tal que $S \cap A \neq \emptyset$ y $S \cap B \neq \emptyset$, entonces G contiene un ciclo que incluye todos los vértices de U , donde $k(U)$ denota la mínima cardinalidad de un conjunto de vértices de G que separan dos vértices de U en G .

Palabras y frases clave: grafo bipartito balanceado, condición de suma de grados, conjunto independiente, ciclo.

Abstract

Let $G = (A \cup B, E)$ be a connected balanced bipartite graph of order $2n$ and U a subset of $V(G)$, with $|U \cap A| = |U \cap B|$. In this paper we prove that if $\Delta_{1,1}(S) = \max\{d(a) + d(b) : a \in S \cap A \text{ y } b \in S \cap B\} \geq n + 1$, for every independent set S of order $\frac{k(U)}{2} + 1$ in $G[U]$ such that $S \cap A \neq \emptyset$ and $S \cap B \neq \emptyset$, then G contains a cycle that includes every vertex of U , where $k(U)$ denote the minimum cardinality of a set of vertices of G separating two vertices of U in G .

Key words and phrases: balanced bipartite graph, degree sum conditions, independent set, cycle.

Recibido 11/11/2018. Revisado 15/01/2019. Aceptado 25/03/2019.

MSC (2010): 05C07; Secondary 05C38.

Autor de correspondencia: Lope Mata Marín

1 Introducción

Se considera en este artículo únicamente grafos bipartitos balanceados $G = (A \cup B, E)$ simples y finitos, y para la terminología estandar de teoría de grafos no explicada en este artículo, referimos al lector a [1] y [2]. Sea $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo (para cualquier par de vértices existe un camino que los una). Para un vértice u en G , $N_G(u)$ denota el conjunto de vecinos de u en G y $d_G(u) = |N_G(u)|$ el grado de u en G .

Para un conjunto independiente S de G (todos sus vértices son mutuamente no adyacentes en G), se define $\Delta_{1,1}(S) = \max\{d_G(a) + d_G(b) : a \in S \cap A \text{ y } b \in S \cap B\}$.

Para un subconjunto R de $V(G)$, $G[R]$ denota el subgrafo de G inducido por R y $k(R)$ la mínima cardinalidad de un conjunto de vértices de G que separan dos vértices de R en G . Para un subgrafo T de G , $N_T(u) = N_G(u) \cap V(T)$ y $d_T(u) = |N_T(u)|$, para cualquier vértice $u \in V(G) \setminus V(T)$. Un camino P que conecta a u y v es denotado por uPv y dos caminos P y Q son vértices disjuntos si no tienen vértices en común e internamente vértices disjuntos si el conjunto de sus vértices internos son disjuntos. Sea C un ciclo con la orientación dada por \vec{C} . Para $u, v \in V(C)$, $u\vec{C}v$ denota el camino de u hasta v en \vec{C} , $u\overleftarrow{C}v$ la secuencia reversa de $u\vec{C}v$, u^+ el sucesor de u , u^- el predecesor de u , de acuerdo a la orientación de C , $C[u, v]$ ($C(u, v)$), $C(u, v]$, $C(u, v)$) el subgrafo que va desde u hasta v en \vec{C} (desde u hasta v^- , desde u^+ hasta v , desde u^+ hasta v^- , respectivamente, en \vec{C}).

Yamashita, en [2], demostró que para todo grafo 2-conexo G , de orden n , y todo subconjunto U de $V(G)$, si $\Delta_2(S) = \max\{d(a) + d(b) : a \in S \text{ y } b \in S\} \geq n$, para todo conjunto independiente S de orden $(k(U) + 1)$ en $G[U]$, entonces G contiene un ciclo que incluye todo vértice de U . En este artículo, damos un resultado análogo al anterior en grafos bipartitos balanceados: Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$ y U un subconjunto balanceado de $V(G)$, $|U \cap A| = |U \cap B|$. Si $\Delta_{1,1}(S) \geq n+1$, para todo conjunto independiente S , con $S \cap A \neq \emptyset$ y $S \cap B \neq \emptyset$, de orden $(\frac{k(U)}{2} + 1)$ en $G[U]$; entonces G contiene un ciclo que incluye todos los vértices de U .

2 Lemas preliminares

Lema 2.1. Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$, U un subconjunto balanceado de $V(G)$ y k un entero par tal que $k \geq 6$. Sea C un ciclo que contiene el máximo número, como sea posible, de vértices de U tal que $V(G) - V(C)$ es un conjunto de dos vértices independientes u en $U \cap A$ y v en $U \cap B$.

Sean y_i el último vértice perteneciente a U en $C(v_i, v_{i+1})$, con $i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2} - 1$, y z_j el primer vértice perteneciente a U en $C(u_j, u_{j+1})$, con $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \dots, k - 1$, tal que $v_i \in N_C(v)$, para toda $i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2}$, $u_j \in N_C(u)$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \dots, k$, y $u_k^+ = v_1$. Entonces existe un subconjunto independiente Σ de U tal que $|V(\Sigma) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma) \cap B| \geq 1$.

Demostración. Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$, U un subconjunto balanceado de $V(G)$ y k un entero par tal que $k \geq 6$.

Sea C un ciclo que contiene el máximo número, como sea posible, de vértices de U tal que $V(G) - V(C)$ es un conjunto de dos vértices independientes u en $U \cap A$ y v en $U \cap B$.

Supongamos que y_i es el último vértice perteneciente a U en $C(v_i, v_{i+1})$, con $1 \leq i \leq \frac{k}{2} - 1$, y z_j es el primer vértice perteneciente a U en $C(u_j, u_{j+1})$, con $\frac{k}{2} + 1 \leq j \leq k - 1$, tal que $v_i \in N_C(v)$, para toda $i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2}$, $u_j \in N_C(u)$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \dots, k$, y $u_k^+ = v_1$.

Definamos los conjuntos

$$\Gamma = \{y_i \in U \cap V(C(v_i, v_{i+1})) : i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2} - 1\}$$

y

$$\Omega = \{z_j \in U \cap V(C(u_j, u_{j+1})) : j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \dots, k - 1\}.$$

Demostremos que $\Sigma = \Gamma \cup \Omega \cup \{u, v\}$ es un subconjunto independiente de U tal que $|V(\Sigma) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma) \cap B| \geq 1$.

Afirmación I: $y_\varepsilon y_\delta \notin E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

En efecto: Sea $y_\varepsilon y_\delta \in E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$, $y_\delta \in \Gamma \cap B$ y, sin pérdida de generalidad, $\varepsilon < \delta$ en \vec{C} . Entonces existe el ciclo $C_1 = y_\varepsilon \overleftarrow{C} v_{\delta+1} v v_{\varepsilon+1} \overrightarrow{C} y_\delta y_\varepsilon$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$. Ver Figura 1.

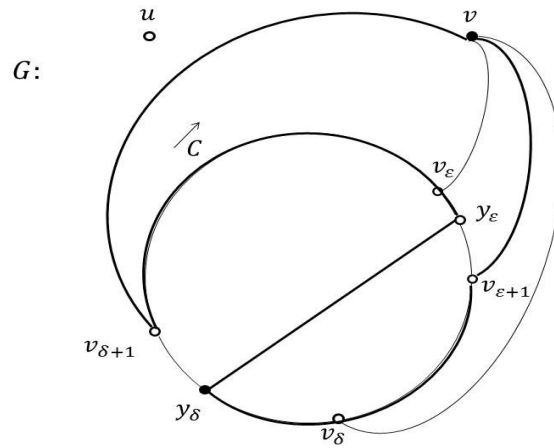


Figura 1: Representa la formación del ciclo C_1 tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$

Lo cual es una contradicción; en consecuencia, $y_\varepsilon y_\delta \notin E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

Afirmación II: $v y_\varepsilon \notin E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$.

En efecto: Sea $v y_\varepsilon \in E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$. Entonces existe el ciclo $C_1 = v v_{\varepsilon+1} \overrightarrow{C} y_\varepsilon v$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $v y_\varepsilon \notin E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$.

Afirmación III: $u y_\delta \notin E(G)$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

En efecto: Sea $u y_\delta \in E(G)$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$. Entonces existe el ciclo $C_1 = y_\delta \overleftarrow{C} v_1 v v_{\delta+1} \overrightarrow{C} u_k u y_\delta$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $u y_\delta \notin E(G)$,

con $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

Afirmación IV: $y_\varepsilon z_\rho \notin E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $z_\rho \in \Omega \cap B$.

En efecto: Sea $y_\varepsilon z_\rho \in E(G)$, con, sin pérdida de generalidad, $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $z_\rho \in \Omega \cap B$. Entonces existe el ciclo $C_2 = z_\rho \vec{C} u_k u u_\rho \overset{\leftarrow}{C} v_{\varepsilon+1} v v_1 \vec{C} y_\varepsilon z_\rho$ tal que $|V(C_2) \cap U| > |V(C) \cap U|$. Ver Figura 2.

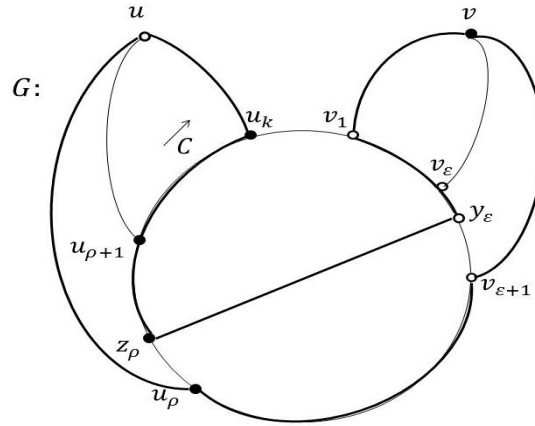


Figura 2: Representa la formación del ciclo C_2 tal que $|V(C_2) \cap U| > |V(C) \cap U|$

Lo cual es una contradicción; en consecuencia, $y_\varepsilon z_\rho \notin E(G)$, con, sin pérdida de generalidad, $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $z_\rho \in \Omega \cap B$.

Afirmación V: $z_\lambda z_\rho \notin E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$ y $z_\rho \in \Omega \cap B$.

En efecto: Sea $z_\lambda z_\rho \in E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$, $z_\rho \in \Omega \cap B$ y, sin pérdida de generalidad, $\lambda < \rho$ en \vec{C} . Entonces existe el ciclo $C_1 = z_\rho \vec{C} u_\lambda u u_\rho \overset{\leftarrow}{C} z_\lambda z_\rho$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $z_\lambda z_\rho \notin E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$ y $z_\rho \in \Omega \cap B$.

Afirmación VI: $u z_\rho \notin E(G)$, con $z_\rho \in \Omega \cap B$.

En efecto: Sea $u z_\rho \in E(G)$, con $z_\rho \in \Omega \cap B$. Entonces existe el ciclo $C_1 = u u_\rho \overset{\leftarrow}{C} z_\rho u$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $u z_\rho \notin E(G)$, con $z_\rho \in \Omega \cap B$.

Afirmación VII: $v z_\lambda \notin E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$.

En efecto: Sea $v z_\lambda \in E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$. Entonces existe el ciclo $C_1 = z_\lambda \vec{C} u_k u u_\lambda \overset{\leftarrow}{C} v_1 v z_\lambda$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $v z_\lambda \notin E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$.

Así, de las afirmaciones anteriores, $\Sigma = \Gamma \cup \Omega \cup \{u, v\}$ es un subconjunto independiente de U tal que $|V(\Sigma) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma) \cap B| \geq 1$. \square

Lema 2.2. Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$, U un subconjunto balanceado de $V(G)$ y k un entero par tal que $k \geq 6$. Sea C un ciclo que contiene el máximo número, como sea posible, de vértices de U tal que $V(G) - V(C)$ es un conjunto de dos vértices independientes u en $U \cap A$ y v en $U \cap B$.

Sean y_i el último vértice perteneciente a U en $C(v_i, v_{i+1})$, con $i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2} - 1$, y z_j el primer vértice perteneciente a U en $C(u_j, u_{j+1})$, con $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \dots, k - 1$, tal que $v_i \in N_C(v)$, para toda $i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2}$, $u_j \in N_C(u)$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \dots, k$, y $u_k^+ = v_1$.

Sea Σ un subconjunto independiente de U tal que $|V(\Sigma) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma) \cap B| \geq 1$. Entonces $d_G(a) + d_G(b) \leq n$, para todo vértice a en $\Sigma \cap A$ y todo vértice b en $\Sigma \cap B$.

Demostración. Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$, U un subconjunto balanceado de $V(G)$ y k un entero par tal que $k \geq 6$. Sea C un ciclo que contiene el máximo número, como sea posible, de vértices de U tal que $V(G) - V(C)$ tiene dos vértices independientes $u \in U \cap A$ y $v \in U \cap B$.

Sean y_i el último vértice perteneciente a U en $C(v_i, v_{i+1})$, con $1 \leq i \leq \frac{k}{2} - 1$, y z_j el primer vértice perteneciente a U en $C(u_j, u_{j+1})$, con $\frac{k}{2} + 1 \leq j \leq k - 1$, tal que $v_i \in N_C(v)$, para toda $i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2}$, $u_j \in N_C(u)$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \dots, k$, y $u_k^+ = v_1$.

Definamos los conjuntos

$$\Gamma = \{y_i \in U \cap V(C(v_i, v_{i+1})) : i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2} - 1\}$$

y

$$\Omega = \{z_j \in U \cap V(C(u_j, u_{j+1})) : j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \dots, k - 1\}.$$

Entonces, por el Lema 2.1, $\Sigma = \Gamma \cup \Omega \cup \{u, v\}$ es un subconjunto independiente de U tal que $|V(\Sigma) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma) \cap B| \geq 1$. Demostraremos que $d_G(a) + d_G(b) \leq n$, para todo par de vértices $a \in \Sigma \cap A$ y $b \in \Sigma \cap B$.

Afirmación I: $d_G(y_\varepsilon) + d_G(y_\delta) < n + 1$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

En efecto: Sean $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $y_\delta \in \Gamma \cap B$ tal que, sin pérdida de generalidad, $\varepsilon < \delta$. Consideremos los siguientes subgrafos de C . Ver Figura 3.

$$\text{.- } Z_1 = C(y_\varepsilon, v_{\varepsilon+1})$$

Tenemos que $y_\delta t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_1)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon \overleftarrow{C} v_{\delta+1} v v_{\varepsilon+1} \overrightarrow{C} y_\delta t \overleftarrow{C} y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_1}(y_\delta) = 0$. Así,

$$d_{Z_1}(y_\delta) + d_{Z_1}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_1)| + 1}{2}. \quad (1)$$

$$\text{.- } Z_2 = C[v_{\varepsilon+1}, y_\delta]$$

Si $y_\delta t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_2)$, $y_\epsilon t^+ \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\epsilon \overleftarrow{C} v_{\delta+1} v v_{\epsilon+1} \overrightarrow{C} t y_\delta \overleftarrow{C} t^+ y_\epsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_2}(y_\epsilon) \leq \frac{|V(Z_2)|-1}{2} - (d_{Z_2}(y_\delta) - 1)$. Así,

$$d_{Z_2}(y_\delta) + d_{Z_2}(y_\epsilon) \leq \frac{|V(Z_2)| - 1}{2} + 1. \tag{2}$$

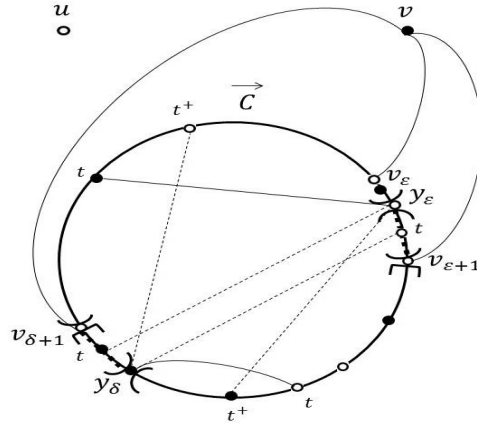


Figura 3: Representa la partición del ciclo C en Z_1, Z_2, Z_3 y Z_4

.- $Z_3 = C(y_\delta, v_{\delta+1}]$

Tenemos que $y_\epsilon t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_3)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\delta \overleftarrow{C} v_{\epsilon+1} v v_{\delta+1} \overrightarrow{C} y_\epsilon t \overleftarrow{C} y_\delta$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_3}(y_\epsilon) = 0$. Así,

$$d_{Z_3}(y_\delta) + d_{Z_3}(y_\epsilon) \leq \frac{|V(Z_3)| + 1}{2}. \tag{3}$$

.- $Z_4 = C(v_{\delta+1}, y_\epsilon)$

Si $y_\epsilon t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_4)$, $y_\delta t^+ \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\epsilon t \overleftarrow{C} v_{\delta+1} v v_{\epsilon+1} \overrightarrow{C} y_\delta t^+ \overrightarrow{C} y_\epsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_4}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_4)|-1}{2} - (d_{Z_4}(y_\epsilon) - 1)$. Así,

$$d_{Z_4}(y_\delta) + d_{Z_4}(y_\epsilon) \leq \frac{|V(Z_4)| - 1}{2} + 1. \tag{4}$$

Luego, de (1), (2), (3), (4) y del Lema 2.1, tenemos que:

$$d_G(y_\delta) + d_G(y_\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{|V(Z_{2i-1})| + 1}{2} \right) + \left(\frac{|V(Z_{2i})| - 1}{2} + 1 \right) \right] = \frac{|C| - 2}{2} + 2 < n + 1$$

Afirmación II: $d_G(y_\varepsilon) + d_G(v) < n + 1$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$.

En efecto: Sea $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y consideremos los siguientes subgrafos de C :

$$\text{.- } Z_1 = C(y_\varepsilon, v_{\varepsilon+1})$$

Tenemos que $vt \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_1)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon \overleftarrow{C} v_{\varepsilon+1} vt \overleftarrow{C} y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_1}(v) = 0$. Así,

$$d_{Z_1}(y_\varepsilon) + d_{Z_1}(v) \leq \frac{|V(Z_1)| + 1}{2}. (I) \quad (5)$$

$$\text{.- } Z_2 = C[v_{\varepsilon+1}, y_\varepsilon]$$

Si $vt \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_2)$, $y_\varepsilon t^- \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = vt \overrightarrow{C} y_\varepsilon t^- \overleftarrow{C} v_{\varepsilon+1} v$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_2}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_2)|}{2} - (d_{Z_2}(v) - 1)$. Así,

$$d_{Z_2}(y_\varepsilon) + d_{Z_2}(v) \leq \frac{|V(Z_2)|}{2} + 1. \quad (6)$$

Luego, de (5), (6) y Lema 2.1, tenemos que:

$$d_G(y_\varepsilon) + d_G(v) \leq \left(\frac{|V(Z_1)| + 1}{2} \right) + \left(\frac{|V(Z_2)|}{2} + 1 \right) = \frac{|C|}{2} + 1 < n + 1$$

Afirmación III: $d_G(y_\delta) + d_G(u) < n + 1$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

En efecto: Sea $y_\delta \in \Gamma \cap B$ y consideremos los siguientes subgrafos de C :

$$\text{.- } Z_1 = C[v_1, y_\delta]$$

Si $ut \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_1)$, $y_\delta t^- \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\delta t^- \overleftarrow{C} v_1 v v_{\delta+1} \overrightarrow{C} u_k ut \overrightarrow{C} y_\delta$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_1}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_1)|+1}{2} - d_{Z_1}(u)$. Así,

$$d_{Z_1}(y_\delta) + d_{Z_1}(u) \leq \frac{|V(Z_1)|+1}{2}. \quad (7)$$

.- $Z_2 = C(y_\delta, v_{\delta+1})$

Tenemos que $ut \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_2)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\delta \overleftarrow{C} v_1 v v_{\delta+1} \overrightarrow{C} u_k u t \overleftarrow{C} y_\delta$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_2}(u) = 0$. Así,

$$d_{Z_2}(y_\delta) + d_{Z_2}(u) \leq \frac{|V(Z_2)|}{2}. \quad (8)$$

.- $Z_3 = C[v_{\delta+1}, v_1]$

Si $ut \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_3)$, $y_\delta t^+ \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\delta t^+ \overrightarrow{C} u_k u t \overleftarrow{C} v_{\delta+1} v v_1 \overrightarrow{C} y_\delta$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_3}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_3)|}{2} - (d_{Z_3}(u) - 1)$. Así,

$$d_{Z_3}(y_\delta) + d_{Z_3}(u) \leq \frac{|V(Z_3)|}{2} + 1. \quad (9)$$

Luego, de (7), (8), (9) y del Lema 2.1, tenemos que:

$$d_G(y_\delta) + d_G(u) \leq \left(\frac{|V(Z_1)|+1}{2}\right) + \left(\frac{|V(Z_2)|}{2}\right) + \left(\frac{|V(Z_3)|}{2} + 1\right) = \frac{|C|}{2} + 1 < n + 1$$

Afirmación IV: $d_G(y_\varepsilon) + d_G(z_\rho) < n + 1$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $z_\rho \in \Omega \cap B$.

En efecto: Sean, sin pérdida de generalidad, $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $z_\rho \in \Omega \cap B$. Consideremos los siguientes subgrafos de C . Ver Figura 4.

.- $Z_1 = C(v_1, y_\varepsilon)$

Si $y_\varepsilon t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_1)$, $z_\rho t^+ \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon t \overleftarrow{C} v_1 v v_{\varepsilon+1} \overrightarrow{C} u_\rho u u_k \overleftarrow{C} z_\rho t^+ \overrightarrow{C} y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_1}(z_\rho) \leq \frac{|V(Z_1)|-1}{2} - (d_{Z_1}(y_\varepsilon) - 1)$. Así,

$$d_{Z_1}(z_\rho) + d_{Z_1}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_1)|-1}{2} + 1. \quad (10)$$

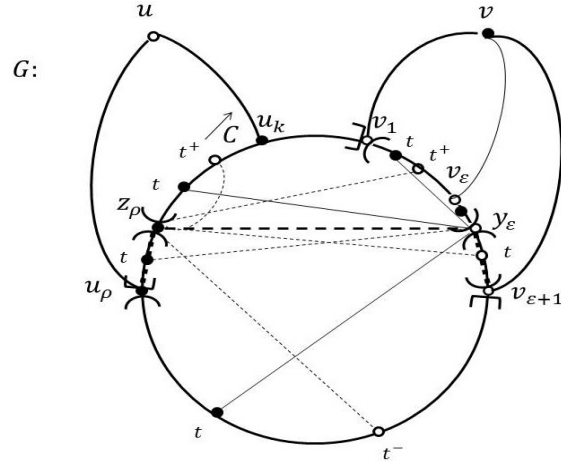


Figura 4: Representa la partición del ciclo C en Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 y Z_5

$$\text{.- } Z_2 = C(y_\varepsilon, v_{\varepsilon+1})$$

Tenemos que $z_\rho t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_2)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon \overleftarrow{C} v_1 v v_{\varepsilon+1} \overrightarrow{C} u_\rho u u_k \overleftarrow{C} z_\rho t \overleftarrow{C} y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_2}(z_\rho) = 0$. Así,

$$d_{Z_2}(z_\rho) + d_{Z_2}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_2)| + 1}{2}. \quad (11)$$

$$\text{.- } Z_3 = C[v_{\varepsilon+1}, u_\rho]$$

Si $y_\varepsilon t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_3)$, $z_\rho t^- \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon t \overrightarrow{C} u_\rho u u_k \overleftarrow{C} z_\rho t^- \overleftarrow{C} v_{\varepsilon+1} v v_1 \overrightarrow{C} y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_3}(z_\rho) \leq \frac{|V(Z_3)| + 1}{2} - d_{Z_3}(y_\varepsilon)$. Así,

$$d_{Z_3}(z_\rho) + d_{Z_3}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_3)| + 1}{2}. \quad (12)$$

$$\text{.- } Z_4 = C[u_\rho, z_\rho]$$

Tenemos que $y_\varepsilon t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_4)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = z_\rho \overrightarrow{C} u_k u u_\rho \overleftarrow{C} v_{\varepsilon+1} v v_1 \overrightarrow{C} y_\varepsilon t \overrightarrow{C} z_\rho$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_4}(y_\varepsilon) = 0$. Así,

$$d_{Z_4}(z_\rho) + d_{Z_4}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_4)|}{2}. \quad (13)$$

.- $Z_5 = C(z_\rho, v_1]$

Si $y_\varepsilon t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_5)$, $z_\rho t^+ \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon t \overleftarrow{C} z_\rho t^+ \overrightarrow{C} u_k u u_\rho \overleftarrow{C} v_{\varepsilon+1} v v_1 \overrightarrow{C} y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_5}(z_\rho) \leq \frac{|V(Z_5)|+1}{2} - d_{Z_5}(y_\varepsilon)$. Así,

$$d_{Z_5}(z_\rho) + d_{Z_5}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_5)| + 1}{2}. \quad (14)$$

Luego, de (10), (11), (12), (13), (14) y por el Lema 2.1, tenemos que:

$$\begin{aligned} d_G(z_\rho) + d_G(y_\varepsilon) &\leq \left(\frac{|V(Z_1)|-1}{2} + 1 \right) + \left(\frac{|V(Z_2)|+1}{2} \right) + \left(\frac{|V(Z_3)|+1}{2} \right) + \left(\frac{|V(Z_4)|}{2} \right) + \left(\frac{|V(Z_5)|+1}{2} \right) \\ &= \frac{|C| - 2}{2} + 2 = \frac{|C|}{2} + 1 < n + 1 \end{aligned}$$

Las demostraciones de las siguientes afirmaciones, son análogas a las anteriores:

Afirmación V: $d_G(z_\lambda) + d_G(z_\rho) < n + 1$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$ y $z_\rho \in \Omega \cap B$.

Afirmación VI: $d_G(z_\rho) + d_G(u) < n + 1$, con $z_\rho \in \Omega \cap B$.

Afirmación VII: $d_G(z_\lambda) + d_G(v) < n + 1$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$.

Así, de las afirmaciones anteriores, $d_G(a) + d_G(b) \leq n$, para todo par de vértices, no adyacentes, $a \in \Sigma \cap A$ y $b \in \Sigma \cap B$. \square

Lema 2.3. Sea $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$, U un subconjunto balanceado de $V(G)$ y k un entero par tal que $k \geq 6$. Sea C un ciclo que contiene el máximo número, como sea posible, de vértices de U tal que $V(G) - V(C)$ es un lado de vértices extremos $u \in U \cap A$ y $v \in U \cap B$.

Sean y_i el primer vértice perteneciente a U en $C(v_i, v_{i+1})$, con $i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2} - 1$, y z_j el primer vértice perteneciente a U en $C(u_j, u_{j+1})$, con $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \dots, k - 1$, tal que $v_i \in N_C(v)$, para toda $i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2}$ y $u_j \in N_C(u)$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \dots, k$. Sean τ_1 el primer vértice perteneciente a U en $\overleftarrow{C}(v_{\frac{k}{2}}, u_{\frac{k}{2}+1})$ y τ_2 el primer vértice perteneciente a U en $C(u_k, v_1)$. Entonces existe un subconjunto independiente Σ de U tal que $|V(\Sigma) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma) \cap B| \geq 1$.

Demostración. Sea $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$, U un subconjunto balanceado de $V(G)$ y k un entero par tal que $k \geq 6$. Sea C un ciclo que contiene el máximo número, como sea posible, de vértices de U tal que $V(G) - V(C)$ es un lado de vértices extremos $u \in U \cap A$ y $v \in U \cap B$.

Supongamos que y_i es el primer vértice perteneciente a U en $C(v_i, v_{i+1})$, con $1 \leq i \leq \frac{k}{2} - 1$, tal que $v_i \in N_C(v)$, para toda $i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2}$; z_j es el primer vértice perteneciente a U en $C(u_j, u_{j+1})$, con $\frac{k}{2} + 1 \leq j \leq k - 1$, tal que $u_j \in N_C(u)$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \dots, k$; y, además, sin

pérdida de generalidad, que $\tau_1 \in U \cap B$ y $\tau_2 \in U \cap A$ son los primeros vértice en $C(v_{\frac{k}{2}}, u_{\frac{k}{2}+1})$ y $C(u_k, v_1)$ respectivamente.

Definamos los conjuntos

$$\Gamma = \{y_i \in U \cap V(C(v_i, v_{i+1})) : i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2} - 1\}$$

y

$$\Omega = \{z_j \in U \cap V(C(u_j, u_{j+1})) : j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \dots, k - 1\}.$$

Demostremos que $\Sigma = \Gamma \cup \Omega \cup \{u\} \cup \{\tau_1, \tau_2\}$ es un subconjunto independiente de U tal que $|V(\Sigma) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma) \cap B| \geq 1$.

Afirmación I: $y_\varepsilon y_\delta \notin E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

En efecto: Sea $y_\varepsilon y_\delta \in E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$, $y_\delta \in \Gamma \cap B$ y, sin pérdida de generalidad, $\varepsilon < \delta$ en \vec{C} . Entonces existe el ciclo $C_1 = y_\varepsilon \vec{C} v_\delta v_\varepsilon \vec{C} y_\delta y_\varepsilon$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $y_\varepsilon y_\delta \notin E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

Afirmación II: $u y_\delta \notin E(G)$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

En efecto: Sea $u y_\delta \in E(G)$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$. Entonces existe el ciclo $C_1 = y_\delta \vec{C} v_\delta v u y_\delta$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $u y_\delta \notin E(G)$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

Afirmación III: $y_\delta z_\lambda \notin E(G)$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$ y $z_\lambda \in \Omega \cap A$.

En efecto: Sea $y_\delta z_\lambda \in E(G)$, con, sin pérdida de generalidad, $y_\delta \in \Gamma \cap B$ y $z_\lambda \in \Omega \cap A$. Entonces existe el ciclo $C_3 = y_\delta \vec{C} u_\lambda u v_\delta \vec{C} z_\lambda y_\delta$ tal que $|V(C_3) \cap U| > |V(C) \cap U|$. Ver Figura 5.

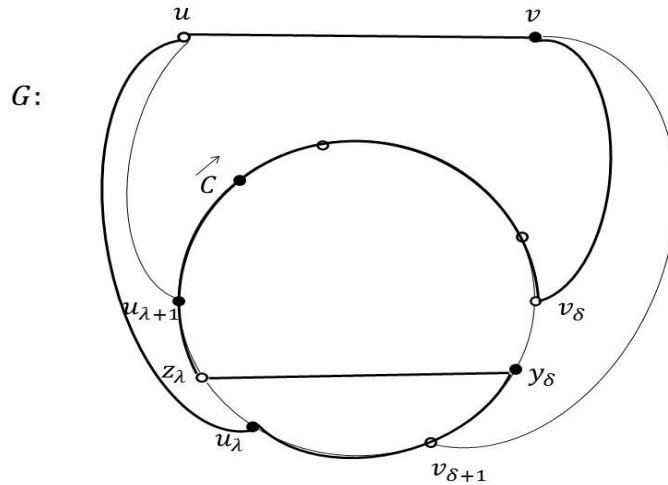


Figura 5: Representa la formación del ciclo C_3 tal que $|V(C_3) \cap U| > |V(C) \cap U|$

Lo cual es una contradicción; en consecuencia, $y_\delta z_\lambda \notin E(G)$, con, sin pérdida de generalidad, $y_\delta \in \Gamma \cap B$ y $z_\lambda \in \Omega \cap A$.

Afirmación IV: $z_\lambda z_\rho \notin E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$ y $z_\rho \in \Omega \cap B$.

En efecto: Sea $z_\lambda z_\rho \in E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$, $z_\rho \in \Omega \cap B$ y, sin pérdida de generalidad, $\lambda < \rho$ en \vec{C} . Entonces existe el ciclo $C_1 = z_\rho \vec{C} u_\lambda u u_\rho \overleftarrow{C} z_\lambda z_\rho$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $z_\lambda z_\rho \notin E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$ y $z_\rho \in \Omega \cap B$.

Afirmación V: $uz_\rho \notin E(G)$, con $z_\rho \in \Omega \cap B$.

En efecto: Sea $uz_\rho \in E(G)$, con $z_\rho \in \Omega \cap B$. Entonces existe el ciclo $C_1 = z_\rho \vec{C} u_\rho uz_\rho$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $uz_\rho \notin E(G)$, con $z_\rho \in \Omega \cap B$.

Afirmación VI: $\tau_1 y_\varepsilon \notin E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$.

En efecto: Sea $\tau_1 y_\varepsilon \in E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$. Entonces existe el ciclo $C_1 = y_\varepsilon \vec{C} v_{\frac{k}{2}} v v_\varepsilon \overleftarrow{C} \tau_1 y_\varepsilon$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $\tau_1 y_\varepsilon \notin E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$.

Afirmación VII: $\tau_1 z_\lambda \notin E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$.

En efecto: Sea $\tau_1 z_\lambda \in E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$. Entonces existe el ciclo $C_1 = z_\lambda \vec{C} v_{\frac{k}{2}} v u u_\lambda \overleftarrow{C} \tau_1 z_\lambda$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $\tau_1 z_\lambda \notin E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$.

Afirmación VIII: $\tau_1 u \notin E(G)$.

En efecto: Sea $\tau_1 u \in E(G)$. Entonces existe el ciclo $C_1 = \tau_1 \vec{C} v_{\frac{k}{2}} v u \tau_1$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $\tau_1 u \notin E(G)$.

Afirmación IX: $\tau_1 \tau_2 \notin E(G)$.

En efecto: Sea $\tau_1 \tau_2 \in E(G)$. Entonces existe el ciclo $C_4 = \tau_2 \vec{C} v_{\frac{k}{2}} v u u_k \overleftarrow{C} \tau_1 \tau_2$ tal que $|V(C_4) \cap U| > |V(C) \cap U|$. Ver Figura 6.

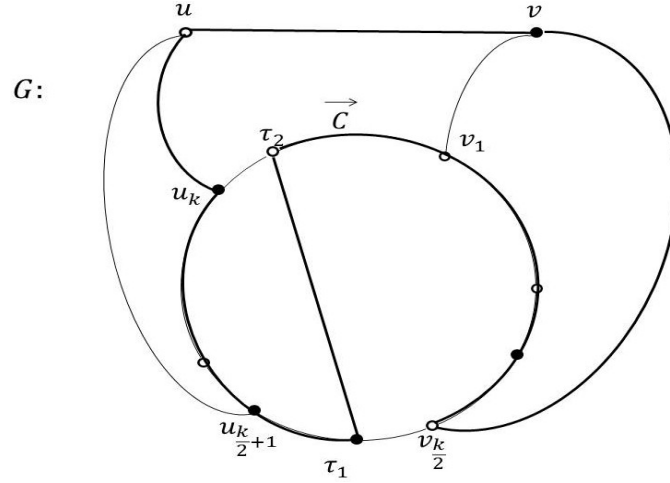


Figura 6: Representa la formación del ciclo C_4 tal que $|V(C_4) \cap U| > |V(C) \cap U|$

Lo cual es una contradicción; en consecuencia, $\tau_1\tau_2 \in E(G)$.

Afirmación X: $\tau_2y_\delta \notin E(G)$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

En efecto: Sea $\tau_2y_\delta \notin E(G)$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$. Entonces existe el ciclo $C_1 = \tau_2 \overrightarrow{C} v_\delta v u u_k \overleftarrow{C} y_\delta \tau_2$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $\tau_2y_\delta \notin E(G)$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

Afirmación XI: $\tau_2z_\rho \notin E(G)$, con $z_\rho \in \Omega \cap B$.

En efecto: Sea $\tau_2z_\rho \notin E(G)$, con $z_\rho \in \Omega \cap B$. Entonces existe el ciclo $C_1 = \tau_2 \overrightarrow{C} u_\rho u u_k \overleftarrow{C} z_\rho \tau_2$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $\tau_2z_\rho \notin E(G)$, con $z_\rho \in \Omega \cap B$.

Así, de las afirmaciones anteriores, $\Sigma = \Gamma \cup \Omega \cup \{u\} \cup \{\tau_1, \tau_2\}$ es un subconjunto independiente de U , tal que $|V(\Sigma) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma) \cap B| \geq 1$. \square

Lema 2.4. Sea $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$, U un subconjunto balanceado de $V(G)$ y k un entero par tal que $k \geq 6$. Sea C un ciclo que contiene el máximo número, como sea posible, de vértices de U tal que $V(G) - V(C)$ es un lado de vértices extremos u en $U \cap A$ y v en $U \cap B$.

Sean y_i el primer vértice perteneciente a U en $C(v_i, v_{i+1})$, con $i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2} - 1$, y z_j el primer vértice perteneciente a U en $C(u_j, u_{j+1})$, con $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \dots, k - 1$, tal que $v_i \in N_C(v)$, para toda $i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2}$ y $u_j \in N_C(u)$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \dots, k$. Sean τ_1 el primer vértice perteneciente a U en $C(v_{\frac{k}{2}}, u_{\frac{k}{2}+1})$ y τ_2 el primer vértice perteneciente a U en $C(v_k, v_1)$.

Sea Σ un subconjunto independiente de U tal que $|V(\Sigma) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma) \cap B| \geq 1$. Entonces $d_G(a) + d_G(b) \leq n$, para todo vértice a en $\Sigma \cap A$ y todo vértice b en $\Sigma \cap B$

Demostración. Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$, U un subconjunto balanceado de $V(G)$ y k un entero par tal que $k \geq 6$. Sea C un ciclo que contiene el

máximo número, como sea posible, de vértices de U tal que $V(G) - V(C)$ es un lado de vértices extremos $u \in U \cap A$ y $v \in U \cap B$.

Supongamos que y_i es el primer vértice perteneciente a U en $C(v_i, v_{i+1})$, con $1 \leq i \leq \frac{k}{2} - 1$, tal que $v_i \in N_C(v)$, para toda $i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2}$; z_j es el primer vértice perteneciente a U en $C(u_j, u_{j+1})$, con $\frac{k}{2} + 1 \leq j \leq k - 1$, tal que $u_j \in N_C(u)$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \dots, k$; y, además, sin pérdida de generalidad, que $\tau_1 \in U \cap B$ y $\tau_2 \in U \cap A$ son los primeros vértice de U en $C(v_{\frac{k}{2}}, u_{\frac{k}{2}+1})$ y $C(u_k, v_1)$ respectivamente.

Definamos los conjuntos

$$\Gamma = \{y_i \in U \cap V(C(v_i, v_{i+1})) : i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2} - 1\}$$

y

$$\Omega = \{z_j \in U \cap V(C(u_j, u_{j+1})) : j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \dots, k - 1\}.$$

Entonces, por el Lema 2.3, $\Sigma_1 = \Gamma \cup \Omega \cup \{\tau_1, \tau_2\} \subseteq \Sigma$ es un subconjunto independiente de U tal que $|V(\Sigma_1) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma_1) \cap B| \geq 1$. Demostraremos que $d_G(a) + d_G(b) \leq n$, para todo par de vértices $a \in \Sigma_1 \cap A$ y $b \in \Sigma_1 \cap B$.

Afirmación I: $d_G(y_\varepsilon) + d_G(y_\delta) < n + 1$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

En efecto: Sean $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $y_\delta \in \Gamma \cap B$ tal que, sin pérdida de generalidad, $\delta < \varepsilon$ en \vec{C} . Consideremos los siguientes subgrafos de C :

- $Z_1 = C(y_\delta, v_\varepsilon]$

Si $y_\delta t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_1)$, $y_\varepsilon t^- \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\delta t \vec{C} v_\varepsilon v v_\delta \overleftarrow{C} y_\varepsilon t^- \overleftarrow{C} y_\delta$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_1}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_1)| - 1}{2} - (d_{Z_1}(y_\delta) - 1)$. Así,

$$d_{Z_1}(y_\varepsilon) + d_{Z_1}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_1)| - 1}{2} + 1. \tag{15}$$

- $Z_2 = C(v_\varepsilon, y_\varepsilon)$

Tenemos que $y_\delta t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_2)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon \vec{C} v_\delta v v_\varepsilon \overleftarrow{C} y_\delta t \vec{C} y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_2}(y_\delta) = 0$. Así,

$$d_{Z_2}(y_\delta) + d_{Z_2}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_2)| + 1}{2}. \tag{16}$$

- $Z_3 = C(y_\varepsilon, v_\delta]$

Si $y_\varepsilon t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_3)$, $y_\delta t^- \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\delta t^- \overleftarrow{C} y_\varepsilon t \overrightarrow{C} v_\delta v_\varepsilon \overleftarrow{C} y_\delta$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_3}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_3)|}{2} - (d_{Z_3}(y_\varepsilon) - 1)$. Así,

$$d_{Z_3}(y_\varepsilon) + d_{Z_3}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_3)|}{2} + 1. \tag{17}$$

.- $Z_4 = C(v_\delta, y_\delta)$

Tenemos que $y_\varepsilon t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_4)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\delta \overrightarrow{C} v_\varepsilon v v_\delta \overleftarrow{C} y_\varepsilon t \overrightarrow{C} y_\delta$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_4}(y_\varepsilon) = 0$. Así,

$$d_{Z_4}(y_\delta) + d_{Z_4}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_4)|}{2}. \tag{18}$$

Luego, de (15), (16), (17), (18) y Lema 2.3, tenemos que:

$$d_G(y_\delta) + d_G(y_\varepsilon) \leq \left(\frac{|V(Z_1)| - 1}{2} + 1\right) + \left(\frac{|V(Z_2)| + 1}{2}\right) + \left(\frac{|V(Z_3)|}{2} + 1\right) + \left(\frac{|V(Z_4)|}{2}\right) = \frac{|C| - 2}{2} + 2 < n + 1$$

Afirmación II: $d_G(y_\delta) + d_G(z_\lambda) < n + 1$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$ y $z_\lambda \in \Omega \cap A$.

En efecto: Sean, sin pérdida de generalidad, $y_\delta \in \Gamma \cap B$ y $z_\lambda \in \Omega \cap A$. Consideremos los siguientes subgrafos de C . Ver Figura 7.

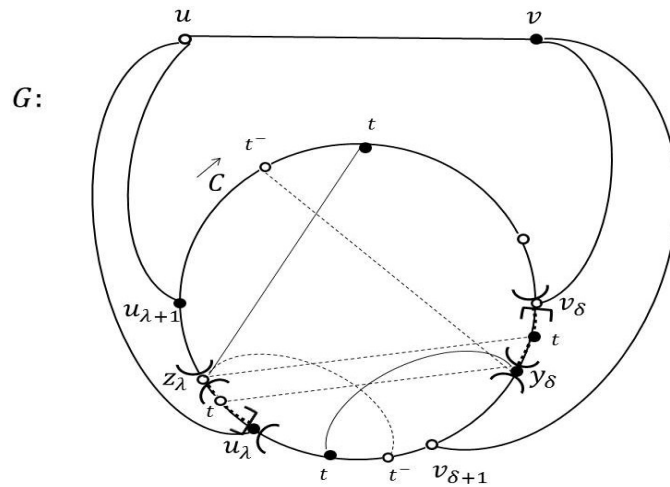


Figura 7: Representa la partición del ciclo C en Z_1, Z_2, Z_3 y Z_4

.- $Z_1 = C(y_\delta, u_\lambda)$

Si $y_\delta t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_1)$, $z_\lambda t^- \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\delta t \vec{C} u_\lambda u v v_\delta \overleftarrow{C} z_\lambda t^- \overleftarrow{C} y_\delta$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_1}(z_\lambda) \leq \frac{|V(Z_1)|-1}{2} - (d_{Z_1}(y_\delta) - 1)$. Así,

$$d_{Z_1}(z_\lambda) + d_{Z_1}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_1)| - 1}{2} + 1. (I) \quad (19)$$

.- $Z_2 = C(u_\lambda, z_\lambda)$

Tenemos que $y_\delta t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_2)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = z_\lambda \vec{C} v_\delta v u u_\lambda \overleftarrow{C} y_\delta t \vec{C} z_\lambda$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_2}(y_\delta) = 0$. Así,

$$d_{Z_2}(z_\lambda) + d_{Z_2}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_2)| + 1}{2}. (II) \quad (20)$$

.- $Z_3 = C(z_\lambda, v_\delta)$

Si $z_\lambda t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_3)$, $y_\delta t^- \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = z_\lambda t \vec{C} v_\delta v u u_\lambda \overleftarrow{C} y_\delta t^- \overleftarrow{C} z_\lambda$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_3}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_3)|-1}{2} - (d_{Z_3}(z_\lambda) - 1)$. Así,

$$d_{Z_3}(z_\lambda) + d_{Z_3}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_3)| - 1}{2} + 1. (III) \quad (21)$$

.- $Z_4 = C(v_\delta, y_\delta)$

Tenemos que $z_\lambda t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_4)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\delta \vec{C} u_\lambda u v v_\delta \overleftarrow{C} z_\lambda t \vec{C} y_\delta$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_4}(z_\lambda) = 0$. Así,

$$d_{Z_4}(z_\lambda) + d_{Z_4}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_4)| + 1}{2}. (IV) \quad (22)$$

Luego, de (19I), (20II), (21III), (22IV) y Lema 2.3, tenemos que:

$$d_G(y_\delta) + d_G(z_\lambda) \leq \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{|V(Z_{2i-1})| - 1}{2} + 1 \right) + \left(\frac{|V(Z_{2i})| + 1}{2} \right) \right] = \frac{|C| - 2}{2} + 2 < n + 1$$

Afirmación III: $d_G(y_\varepsilon) + d_G(\tau_1) < n + 1$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $\tau_1 \in C(v_{\frac{k}{2}}, u_{\frac{k}{2}+1}) \cap B$.

En efecto: Sean $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $\tau_1 \in C(v_{\frac{k}{2}}, u_{\frac{k}{2}+1}) \cap B$. Consideremos los siguientes subgrafos de C :

$$\cdot - Z_1 = C(y_\varepsilon, v_{\frac{k}{2}})$$

Si $y_\varepsilon t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_1)$, $\tau_1 t^- \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon t \vec{C} v_{\frac{k}{2}} v v_\varepsilon \overleftarrow{C} \tau_1 t^- \overleftarrow{C} y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_1}(\tau_1) \leq \frac{|V(Z_1)|-1}{2} - (d_{Z_1}(y_\varepsilon) - 1)$. Así,

$$d_{Z_1}(\tau_1) + d_{Z_1}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_1)| - 1}{2} + 1. \quad (23)$$

$$\cdot - Z_2 = C[v_{\frac{k}{2}}, \tau_1)$$

Tenemos que $y_\varepsilon t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_2)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = \tau_1 \overrightarrow{C} v_\varepsilon v v_{\frac{k}{2}} \overleftarrow{C} y_\varepsilon t \overrightarrow{C} \tau_1$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_2}(y_\varepsilon) = 0$. Así,

$$d_{Z_2}(\tau_1) + d_{Z_2}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_2)| + 1}{2}. \quad (24)$$

$$\cdot - Z_3 = C(\tau_1, v_\varepsilon]$$

Si $y_\varepsilon t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_3)$, $\tau_1 t^+ \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon \overrightarrow{C} v_{\frac{k}{2}} v v_\varepsilon \overleftarrow{C} t^+ \tau_1 \overrightarrow{C} t y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_3}(\tau_1) \leq \frac{|V(Z_3)|+1}{2} - d_{Z_3}(y_\varepsilon)$. Así,

$$d_{Z_3}(\tau_1) + d_{Z_3}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_3)| + 1}{2}. \quad (25)$$

$$\cdot - Z_4 = C(v_\varepsilon, y_\varepsilon)$$

Tenemos que $\tau_1 t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_4)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon \overrightarrow{C} v_{\frac{k}{2}} v v_\varepsilon \overleftarrow{C} \tau_1 t \overrightarrow{C} y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_4}(\tau_1) = 0$. Así,

$$d_{Z_4}(\tau_1) + d_{Z_4}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_4)| + 1}{2}. \quad (26)$$

Luego, de (23), (24), (25), (26) y Lema 2.3, tenemos que:

$$d_G(\tau_1) + d_G(y_\varepsilon) \leq \left(\frac{|V(Z_1)| - 1}{2} + 1 \right) + \sum_{i=2}^4 \left(\frac{|V(Z_i)| + 1}{2} \right) = \frac{|C| - 2 + 2}{2} + 1 = \frac{|C|}{2} + 1 < n + 1$$

Afirmación IV: $d_G(z_\rho) + d_G(\tau_2) < n + 1$, con $z_\rho \in \Gamma \cap B$ y $\tau_2 \in C(u_k, v_1) \cap A$.

En efecto: Sean $z_\rho \in \Gamma \cap B$ y $\tau_2 \in C(u_k, v_1) \cap A$. Consideremos los siguientes subgrafos de C :

$$\text{.- } Z_1 = C(\tau_2, u_\rho]$$

Si $z_\rho t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_1)$, $\tau_2 t^+ \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = z_\rho \vec{C} u_k u u_\rho \overleftarrow{C} t^+ \tau_2 \vec{C} t z_\rho$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_1}(\tau_2) \leq \frac{|V(Z_1)| + 1}{2} - d_{Z_1}(z_\rho)$. Así,

$$d_{Z_1}(\tau_2) + d_{Z_1}(z_\rho) \leq \frac{|V(Z_1)| + 1}{2}. \quad (27)$$

$$\text{.- } Z_2 = C(u_\rho, z_\rho)$$

Tenemos que $\tau_2 t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_2)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = z_\rho \vec{C} u_k u u_\rho \overleftarrow{C} \tau_2 t \vec{C} z_\rho$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_2}(\tau_2) = 0$. Así,

$$d_{Z_2}(\tau_2) + d_{Z_2}(z_\rho) \leq \frac{|V(Z_2)| + 1}{2}. \quad (28)$$

$$\text{.- } Z_3 = C(z_\rho, u_k)$$

Si $z_\rho t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_3)$, $\tau_2 t^- \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = z_\rho t \vec{C} u_k u u_\rho \overleftarrow{C} \tau_2 t^- \overleftarrow{C} z_\rho$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_3}(\tau_2) \leq \frac{|V(Z_3)| - 1}{2} - (d_{Z_3}(z_\rho) - 1)$. Así,

$$d_{Z_3}(\tau_2) + d_{Z_3}(z_\rho) \leq \frac{|V(Z_3)| - 1}{2} + 1. \quad (29)$$

$$\text{.- } Z_4 = C[u_k, \tau_2)$$

Tenemos que $z_\rho t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_4)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = \tau_2 \vec{C} u_\rho u u_k \overleftarrow{C} z_\rho t \vec{C} \tau_2$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_4}(z_\rho) = 0$. Así,

$$d_{Z_4}(\tau_2) + d_{Z_4}(z_\rho) \leq \frac{|V(Z_4)| + 1}{2}. \tag{30}$$

Luego, de (27), (28), (29), (30) y Lema 2.3, tenemos que:

$$\begin{aligned} d_G(\tau_2) + d_G(z_\rho) &\leq \left(\frac{|V(Z_1)| + 1}{2}\right) + \left(\frac{|V(Z_2)| + 1}{2}\right) + \left(\frac{|V(Z_3)| - 1}{2} + 1\right) + \left(\frac{|V(Z_4)| + 1}{2}\right) \\ &= \frac{|C| - 2 + 2}{2} + 1 = \frac{|C|}{2} + 1 < n + 1 \end{aligned}$$

Afirmación V: $d_G(\tau_1) + d_G(\tau_2) < n + 1$, con $\tau_1 \in C(v_{\frac{k}{2}}, u_{\frac{k}{2}+1}) \cap B$ y $\tau_2 \in C(u_k, v_1) \cap A$.

En efecto: Sean $\tau_1 \in C(v_{\frac{k}{2}}, u_{\frac{k}{2}+1}) \cap B$ y $\tau_2 \in C(u_k, v_1) \cap A$. Consideremos los siguientes subgrafos de C . Ver Figura 8.

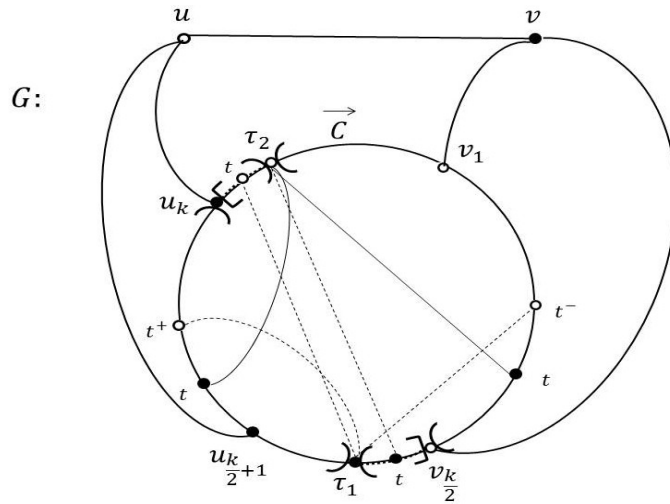


Figura 8: Representa la partición del ciclo C en Z_1, Z_2, Z_3 y Z_4

.- $Z_1 = C(\tau_2, v_{\frac{k}{2}})$

Si $\tau_2 t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_1)$, $\tau_1 t^- \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = \tau_2 t \vec{C} v_{\frac{k}{2}} v u u_k \overleftarrow{C} \tau_1 t^- \overleftarrow{C} \tau_2$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_1}(\tau_1) \leq \frac{|V(Z_1)| - 1}{2} - (d_{Z_1}(\tau_2) - 1)$. Así,

$$d_{Z_1}(\tau_1) + d_{Z_1}(\tau_2) \leq \frac{|V(Z_1)| - 1}{2} + 1. \tag{31}$$

.- $Z_2 = C[v_{\frac{k}{2}}, \tau_1)$

Tenemos que $\tau_2 t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_2)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = \tau_1 \vec{C} u_k u v v_{\frac{k}{2}} \overleftarrow{C} \tau_2 t \vec{C} \tau_1$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_2}(\tau_2) = 0$. Así,

$$d_{Z_2}(\tau_1) + d_{Z_2}(\tau_2) \leq \frac{|V(Z_2)| + 1}{2}. \quad (32)$$

.- $Z_3 = C(\tau_1, u_k)$

Si $\tau_2 t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_3)$, $\tau_1 t^+ \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = \tau_2 t \overleftarrow{C} \tau_1 t^+ \vec{C} u_k u v v_{\frac{k}{2}} \overleftarrow{C} \tau_2$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_3}(\tau_1) \leq \frac{|V(Z_3)| + 1}{2} - d_{Z_3}(\tau_2)$. Así,

$$d_{Z_3}(\tau_1) + d_{Z_3}(\tau_2) \leq \frac{|V(Z_3)| + 1}{2}. \quad (33)$$

.- $Z_4 = C[u_k, \tau_2)$

Tenemos que $\tau_1 t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_4)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = \tau_2 \vec{C} v_{\frac{k}{2}} v u u_k \overleftarrow{C} \tau_1 t \vec{C} \tau_2$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_4}(\tau_1) = 0$. Así,

$$d_{Z_4}(\tau_1) + d_{Z_4}(\tau_2) \leq \frac{|V(Z_4)| + 1}{2}. \quad (34)$$

Luego, de (31I), (32II), (33III), (34IV) y Lema 2.3, tenemos que:

$$d_G(\tau_1) + d_G(\tau_2) \leq \left(\frac{|V(Z_1)| - 1}{2} + 1 \right) + \sum_{i=2}^4 \left(\frac{|V(Z_i)| + 1}{2} \right) = \frac{|C| - 2 + 2}{2} + 1 = \frac{|C|}{2} + 1 < n + 1$$

Las demostraciones de las siguientes afirmaciones, son análogas a las anteriores.

Afirmación VI: $d_G(z_\lambda) + d_G(z_\rho) < n + 1$, con $z_\lambda \in \Gamma \cap A$ y $z_\rho \in \Gamma \cap B$.

Afirmación VII: $d_G(y_\delta) + d_G(\tau_2) < n + 1$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

Afirmación VIII: $d_G(z_\lambda) + d_G(\tau_1) < n + 1$, con $z_\lambda \in \Gamma \cap A$.

Así, de las afirmaciones anteriores, $d_G(a) + d_G(b) \leq n$, para todo par de vértices, no adyacentes, $a \in \Sigma_1 \cap A$ y $b \in \Sigma_1 \cap B$. \square

3 Resultados Principales

Teorema 3.1. Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado k -conexo de orden $2n$ y U un subconjunto balanceado de $V(G)$. Si $\Delta_{1,1}(S) \geq n + 1$, para todo conjunto independiente S , con $S \cap A \neq \emptyset$ y $S \cap B \neq \emptyset$, de cardinalidad $(\frac{\kappa(U)}{2} + 1)$ en $G[U]$, entonces G tiene un ciclo que contiene todos los vértices de U .

Demostración. Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$ y U un subconjunto balanceado de $V(G)$. Supongamos que $\Delta_{1,1}(S) \geq n + 1$, para todo conjunto independiente S , con $S \cap A \neq \emptyset$ y $S \cap B \neq \emptyset$, de cardinalidad $(\frac{\kappa(U)}{2} + 1)$ en $G[U]$, y que G no tiene un ciclo que contenga todos los vértices de U .

Sean C un ciclo de G que contiene la mayor cantidad, como sea posible, de vértices de U , $k = \kappa(U)$ y $T \subseteq V(G)$ el conjunto de vértices separadores de los elementos de U tal que $|V(T) \cap A| = |V(T) \cap B| \geq 3$. Entonces, consideremos los siguientes casos:

Caso I: $V(G) - V(C)$ es un conjunto independiente.

Como G es balanceado, el conjunto $V(G) - V(C)$ contiene al menos un vértice aislado u en $U \cap A$ y al menos un vértice aislado v en $U \cap B$.

Por el teorema de Menger, existen $\frac{k}{2}$ caminos vértices disjuntos P_i que conectan a v con C ; es decir, existen $\frac{k}{2}$ caminos internamente vértices disjuntos vP_iv_i con $v_i \in V(C)$, y $\frac{k}{2}$ caminos vértices disjuntos Q_j que conectan a u con C ; es decir, $\frac{k}{2}$ caminos internamente vértices disjuntos vQ_ju_j con $u_j \in V(C)$, tal que los índices de v_i y u_j se incrementan de acuerdo a la orientación de C y $V(P_i) \cap V(Q_j) = \emptyset$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que los vértices $v_1, v_2, \dots, v_{\frac{k}{2}}$ son los vecinos de P_i en $A \cap V(C)$ y los vértices $u_{\frac{k}{2}+1}, u_{\frac{k}{2}+2}, \dots, u_k$ son los vecinos de Q_j en $B \cap V(C)$ tal que $u_k^+ = v_1$. Por la escojencia del ciclo, $V(C(v_i, v_{i+1})) \cap U \neq \emptyset$, para toda $i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2} - 1$ y $V(C(u_j, u_{j+1})) \cap U \neq \emptyset$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \dots, k - 1$.

Consideremos, $\alpha_i = \max\{p_t : y_{p_t} \in U \cap C(v_i, v_{i+1}), t \in Z^+\}$, para toda $i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2} - 1$, y $\beta_j = \min\{q_t : z_{q_t} \in U \cap C(u_j, u_{j+1}), t \in Z^+\}$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \dots, k - 1$. Sean los conjuntos $\Gamma = \{y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \dots, y_{\alpha_{\frac{k}{2}-1}}\}$ y $\Omega = \{z_{\beta_{\frac{k}{2}+1}}, z_{\beta_{\frac{k}{2}+2}}, \dots, z_{\beta_{k-1}}\}$. Entonces, por el Lema 2.1, $\Sigma = \Gamma \cup \Omega \cup \{u, v\}$ es un conjunto independiente en $G[U]$ tal que $|V(\Sigma_1) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma_1) \cap B| \geq 1$.

Por otro lado, por el Lema 2.2, $d_G(a) + d_G(b) \leq n$, para todo par de vértices a y b , en clases diferentes de Σ . En consecuencia, existe un conjunto independiente $S_1 \subseteq \Sigma$, en $G[U]$, de cardinalidad $(\frac{k}{2} + 1)$, tal que $|V(S_1) \cap A| \geq 1$ y $|V(S_1) \cap B| \geq 1$, y $d_G(a) + d_G(b) \leq n$, para todo par de vértices a y b , en clases diferentes de S_1 .

Caso II: $V(G) - V(C)$ es un conjunto de componente H_p , tal que $|H_p| \geq 2$, para toda p .

Sea, sin pérdida de generalidad, H una componente conexas de $V(G) - V(C)$ isomorfa al grafo $K_{1,1}$, con vértices extremos $u \in U \cap A$ y $v \in U \cap B$.

Por el teorema de Menger, existen $\frac{k}{2}$ caminos vértices disjuntos P_i que conectan a v con C ; es decir, existen $\frac{k}{2}$ caminos internamente vértices disjuntos vP_iv_i con $v_i \in V(C)$, y $\frac{k}{2}$ caminos vértices disjuntos Q_j que conectan a u con C ; es decir, $\frac{k}{2}$ caminos internamente vértices disjuntos vQ_ju_j con $u_j \in V(C)$, tal que los índices de v_i y u_j se incrementan de acuerdo a la orientación de C y $V(P_i) \cap V(Q_j) = \emptyset$.

Spongamos, sin pérdida de generalidad, que los vértices $v_1, v_2, \dots, v_{\frac{k}{2}}$ son los vecinos de P_i en $A \cap V(C)$ y los vértices $u_{\frac{k}{2}+1}, u_{\frac{k}{2}+2}, \dots, u_k$ son los vecinos de Q_j en $B \cap V(C)$. Por la escojencia de C , $V(C(v_i, v_{i+1})) \cap U \neq \emptyset$, para toda $i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2} - 1$, $V(C(u_j, u_{j+1})) \cap U \neq \emptyset$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \dots, k - 1$, $V(C(v_{\frac{k}{2}}, u_{\frac{k}{2}+1})) \cap U \neq \emptyset$ y $V(C(u_k, v_1)) \cap U \neq \emptyset$.

Consideremos, $\alpha_i = \min\{p_t : y_{p_t} \in U \cap C(v_i, v_{i+1}), t \in Z^+\}$, para toda $i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2} - 1$, $\beta_j = \min\{q_t : z_{q_t} \in U \cap C(u_j, u_{j+1}), t \in Z^+\}$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \dots, k - 1$, τ_1 el primer vértice de, sin pérdida de generalidad, $U \cap B$ en $V(C(v_{\frac{k}{2}}, u_{\frac{k}{2}+1}))$ y τ_2 el primer vértice de, sin pérdida de generalidad, $U \cap A$ en $V(C(u_k, v_1))$.

Sean los conjuntos $\Gamma = \{y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \dots, y_{\alpha_{\frac{k}{2}-1}}\}$ y $\Omega = \{z_{\beta_{\frac{k}{2}+1}}, z_{\beta_{\frac{k}{2}+2}}, \dots, z_{\beta_{k-1}}\}$. Entonces, por el Lema 2.3, $\Sigma_1 = \Gamma \cup \Omega \cup \{\tau_1, \tau_2\} \subseteq \Sigma$ es un conjunto independiente en $G[U]$ tal que $|V(\Sigma_1) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma_1) \cap B| \geq 1$; por otro lado, por el Lema 2.4, $d_G(a) + d_G(b) \leq n$, para todo par de vértices a y b , en clases diferentes de Σ_1 . En consecuencia, existe un conjunto independiente $S_1 \subseteq \Sigma_1$ en $G[U]$, de cardinalidad $(\frac{k}{2} + 1)$, tal que $|V(S_1) \cap A| \geq 1$, $|V(S_1) \cap B| \geq 1$ y $d_G(a) + d_G(b) \leq n$, para todo par de vértices a y b , en clases diferentes de S_1 .

Por consiguiente, de los Casos I y II, existe un conjunto independiente S_1 en $G[U]$, de cardinalidad $(\frac{k}{2} + 1)$, tal que $\Delta_{1,1}(S_1) < n + 1$, lo cual es una contradicción. Así, G contiene un ciclo que incluye todos los vértices de U . □

3.1 Ejemplo ilustrativo del Teorema Principal

Sea el siguiente grafo bipartito balanceado conexo $G = (A \cup B, E)$, con $A = \{a_1, a_2, u_1, u_2, c_1, c_2, c_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, v_1, v_2, d_1, d_2, d_3\}$, y sea $G[U]$ el subgrafo inducido por el subconjunto balanceado $U = \{a_1, a_2, u_1, u_2, b_1, b_2, v_1, v_2\}$ de $V(G)$, Figura 9

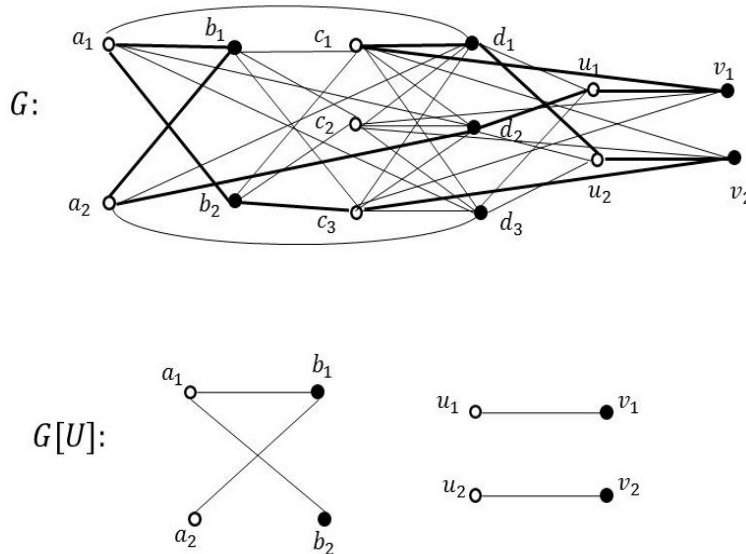


Figura 9: Representa el grafo bipartito $G = (k_{2,2} \cup 2K_{1,1}) + K_{3,3}$ y $G[U]$

Observemos en la Figura 9, que $k(U) = 6$. Sean $S_1 = \{a_2, b_2, u_1, v_2\}$, $S_2 = \{a_2, b_2, u_2, v_1\}$, $S_3 = \{a_2, b_2, u_1, u_2\}$, $S_4 = \{a_2, b_2, v_1, v_2\}$, $S_5 = \{a_1, a_2, u_1, v_2\}$, $S_6 = \{a_1, a_2, u_2, v_1\}$ y $S_7 = \{a_1, a_2, v_1, v_2\}$ conjuntos independientes de cardinalidad $(\frac{k(U)}{2} + 1) = 3 + 1 = 4$ en $G[U]$. Como $\Delta_{1,1}(S) \geq n + 1 = 7 + 1 = 8$ para todo S_i desde $i = \overline{1, 7}$, se tiene que G cumple con la hipótesis del teorema principal; por lo tanto, existe el ciclo:

$$C =: a_2 b_1 a_1 b_2 c_3 v_2 u_2 d_1 c_1 v_1 u_1 d_2 a_2$$

que contiene todos los vértices de U .

Corolario 1. Sean $k \geq 2$ y $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado k -conexo de orden $2n$. Sean $V_1, V_2, \dots, V_{\frac{k}{2}}$ subconjuntos balanceados de $V(G)$ y $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{\frac{k}{2}}$. Si para cada $i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2}$ y para cada par de vértices independientes, en particiones distintas, u y v en V_i , $d_G(u) + d_G(v) \geq n + 1$, entonces G tiene un ciclo que contiene todos los vértices de V .

Demostración. Sean $k \geq 2$ y $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado k -conexo de orden $2n$. Sean $V_1, V_2, \dots, V_{\frac{k}{2}}$ subconjuntos balanceados de $V(G)$ y $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{\frac{k}{2}}$. Supongamos que para cada $i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2}$ y para cada par de vértices independientes, en clases distintas, u y v en V_i , $d_G(u) + d_G(v) \geq n + 1$. Sea S' un conjunto independiente en $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{\frac{k}{2}}$, con $S' \cap A \neq \emptyset$ y $S' \cap B \neq \emptyset$, de cardinalidad $\frac{k(V)}{2} + 1$. Como $|S'| = \frac{k(V)}{2} + 1 > \frac{k}{2}$, existen dos vértices independientes, en clases diferentes, tales que $u, v \in S' \cap V_i$ para algún $i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2}$. Por hipótesis, $d_G(u) + d_G(v) \geq n + 1$, entonces $\Delta_{1,1}(S') \geq n + 1$. Luego, para cada conjunto independiente S en $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{\frac{k}{2}}$, existen dos vértices independientes en clases diferentes, tales que $\Delta_{1,1}(S) \geq n + 1$, de aquí G satisface las hipótesis del Teorema 3.1, en consecuencia, G tiene un ciclo que contiene todos los vértices de V . \square

Referencias

- [1] Diestel, R. *Graph Theory*. Second Edition, Springer, 2000.
- [2] Yamashita, T. *On degree sum conditions for long cycles and cycles through specified vertices*, Discrete Mathematics., **308**(2008), 6584–6587.

Insertion of a contra-Baire-1 (Baire-.5) function

Inserción de una función Contra-Baire-1 (Baire-.5)

Majid Mirmiran (mirmir@sci.ui.ac.ir)

Department of Mathematics,
University of Isfahan, Isfahan 81746-73441, Iran.

Binesh Naderi (naderi@mng.mui.ac.ir)

School of Management and Medical Information,
Medical University of Isfahan, Iran.

Abstract

A necessary and sufficient condition in terms of lower cut sets are given for the insertion of a Baire-.5 function between two comparable real-valued functions on the topological spaces that F_σ -kernel of sets are F_σ -sets.

Key words and phrases: Insertion, strong binary relation, Baire-.5 function, kernel of sets, lower cut set.

Resumen

Se proporciona una condición necesaria y suficiente en términos de conjuntos de cortes inferiores para la inserción de una función Baire-.5 entre dos funciones comparables de valores reales en los espacios topológicos donde el F_σ -kernel de los conjuntos es F_σ -sets.

Palabras y frases clave: Inserción, relación binaria fuerte, función Baire-.5, núcleo de conjuntos, conjunto de corte inferior.

1 Introduction

A generalized class of closed sets was considered by Maki in 1986 [16]. He investigated the sets that can be represented as union of closed sets and called them V -sets. Complements of V -sets, i.e., sets that are intersection of open sets are called Λ -sets [16].

Recall that a real-valued function f defined on a topological space X is called A -continuous [21] if the preimage of every open subset of \mathbb{R} belongs to A , where A is a collection of subsets of X . Most of the definitions of function used throughout this paper are consequences of the definition of A -continuity. However, for unknown concepts the reader may refer to [4, 10]. In the recent literature many topologists had focused their research in the direction of investigating different types of generalized continuity.

J. Dontchev in [5] introduced a new class of mappings called contra-continuity. A good number of researchers have also initiated different types of contra-continuous like mappings in the papers [1, 3, 7, 8, 9, 11, 12, 20].

Results of Katětov [13, 14] concerning binary relations and the concept of an indefinite lower cut set for a real-valued function, which is due to Brooks [2], are used in order to give a necessary and sufficient condition for the insertion of a Baire-.5 function between two comparable real-valued functions on the topological spaces that F_σ -kernel of sets are F_σ -sets.

A real-valued function f defined on a topological space X is called *contra-Baire-1 (Baire-.5)* if the preimage of every open subset of \mathbb{R} is a G_δ -set in X [22]. If g and f are real-valued functions defined on a space X , we write $g \leq f$ (resp. $g < f$) in case $g(x) \leq f(x)$ (resp. $g(x) < f(x)$) for all x in X .

The following definitions are modifications of conditions considered in [15].

A property P defined relative to a real-valued function on a topological space is a $B - .5$ -property provided that any constant function has property P and provided that the sum of a function with property P and any Baire-.5 function also has property P . If P_1 and P_2 are $B - .5$ -properties, the following terminology is used:

- (i) A space X has the *weak $B - .5$ -insertion property for (P_1, P_2)* if and only if for any functions g and f on X such that $g \leq f$, g has property P_1 and f has property P_2 , then there exists a Baire-.5 function h such that $g \leq h \leq f$.
- (ii) A space X has the *$B - .5$ -insertion property for (P_1, P_2)* if and only if for any functions g and f on X such that $g < f$, g has property P_1 and f has property P_2 , then there exists a Baire-.5 function h such that $g < h < f$.

In this paper, for a topological space that F_σ -kernel of sets are F_σ -sets, is given a sufficient condition for the weak $B - .5$ -insertion property. Also for a space with the weak $B - .5$ -insertion property, we give a necessary and sufficient condition for the space to have the $B - .5$ -insertion property. Several insertion theorems are obtained as corollaries of these results.

2 The Main Result

Before giving a sufficient condition for insertability of a Baire-.5 function, the necessary definitions and terminology are stated.

Definition 2.1. Let A be a subset of a topological space (X, τ) . We define the subsets A^\wedge and A^\vee as follows:

$$A^\wedge = \bigcap \{O : O \supseteq A, O \in (X, \tau)\} \quad \text{and} \quad A^\vee = \bigcup \{F : F \subseteq A, F^c \in (X, \tau)\}.$$

In [6, 17, 19], A^\wedge is called the *kernel* of A .

We define the subsets $G_\delta(A)$ and $F_\sigma(A)$ as follows:

$$G_\delta(A) = \bigcup \{O : O \subseteq A, O \text{ is } G_\delta\text{-set}\} \quad \text{and} \quad F_\sigma(A) = \bigcap \{F : F \supseteq A, F \text{ is } F_\sigma\text{-set}\}$$

$F_\sigma(A)$ is called the *F_σ -kernel* of A .

The following Lemma is a direct consequence of the definition F_σ -kernel of sets.

Lemma 2.1. *The following conditions on the space X are equivalent:*

- (i) *For every G of G_δ -set we have $F_\sigma(G)$ is a G_δ -set.*
- (ii) *For each pair of disjoint G_δ -sets as G_1 and G_2 we have $F_\sigma(G_1) \cap F_\sigma(G_2) = \emptyset$.*

The following first two definitions are modifications of conditions considered in [13, 14].

Definition 2.2. If ρ is a binary relation in a set S then $\bar{\rho}$ is defined as follows: $x \bar{\rho} y$ if and only if $y \rho \nu$ implies $x \rho \nu$ and $u \rho x$ implies $u \rho y$ for any u and v in S .

Definition 2.3. A binary relation ρ in the power set $P(X)$ of a topological space X is called a *strong binary relation* in $P(X)$ in case ρ satisfies each of the following conditions:

1. If $A_i \rho B_j$ for any $i \in \{1, \dots, m\}$ and for any $j \in \{1, \dots, n\}$, then there exists a set C in $P(X)$ such that $A_i \rho C$ and $C \rho B_j$ for any $i \in \{1, \dots, m\}$ and any $j \in \{1, \dots, n\}$.
2. If $A \subseteq B$, then $A \bar{\rho} B$.
3. If $A \rho B$, then $F_\sigma(A) \subseteq B$ and $A \subseteq G_\delta(B)$.

The concept of a lower indefinite cut set for a real-valued function was defined by Brooks [2] as follows:

Definition 2.4. If f is a real-valued function defined on a space X and if $\{x \in X : f(x) < \ell\} \subseteq A(f, \ell) \subseteq \{x \in X : f(x) \leq \ell\}$ for a real number ℓ , then $A(f, \ell)$ is a *lower indefinite cut set* in the domain of f at the level ℓ .

We now give the following main results:

Theorem 2.1. *Let g and f be real-valued functions on the topological space X , that F_σ -kernel of sets in X are F_σ -sets, with $g \leq f$. If there exists a strong binary relation ρ on the power set of X and if there exist lower indefinite cut sets $A(f, t)$ and $A(g, t)$ in the domain of f and g at the level t for each rational number t such that if $t_1 < t_2$ then $A(f, t_1) \rho A(g, t_2)$, then there exists a Baire-.5 function h defined on X such that $g \leq h \leq f$.*

Proof. Let g and f be real-valued functions defined on the X such that $g \leq f$. By hypothesis there exists a strong binary relation ρ on the power set of X and there exist lower indefinite cut sets $A(f, t)$ and $A(g, t)$ in the domain of f and g at the level t for each rational number t such that if $t_1 < t_2$ then $A(f, t_1) \rho A(g, t_2)$.

Define functions F and G mapping the rational numbers \mathbb{Q} into the power set of X by $F(t) = A(f, t)$ and $G(t) = A(g, t)$. If t_1 and t_2 are any elements of \mathbb{Q} with $t_1 < t_2$, then $F(t_1) \bar{\rho} F(t_2), G(t_1) \bar{\rho} G(t_2)$, and $F(t_1) \rho G(t_2)$. By Lemmas 1 and 2 of [14] it follows that there exists a function H mapping \mathbb{Q} into the power set of X such that if t_1 and t_2 are any rational numbers with $t_1 < t_2$, then $F(t_1) \rho H(t_2), H(t_1) \rho H(t_2)$ and $H(t_1) \rho G(t_2)$.

For any x in X , let $h(x) = \inf\{t \in \mathbb{Q} : x \in H(t)\}$. We first verify that $g \leq h \leq f$: If x is in $H(t)$ then x is in $G(t')$ for any $t' > t$; since x in $G(t') = A(g, t')$ implies that $g(x) \leq t'$, it follows that $g(x) \leq t$. Hence $g \leq h$. If x is not in $H(t)$, then x is not in $F(t')$ for any $t' < t$; since x is not in $F(t') = A(f, t')$ implies that $f(x) > t'$, it follows that $f(x) \geq t$. Hence $h \leq f$.

Also, for any rational numbers t_1 and t_2 with $t_1 < t_2$, we have

$$h^{-1}(t_1, t_2) = G_\delta(H(t_2)) \setminus F_\sigma(H(t_1)).$$

Hence $h^{-1}(t_1, t_2)$ is a G_δ -set in X , i.e., h is a Baire-.5 function on X . □

The above proof used the technique of Theorem 1 of [13].

Theorem 2.2. *Let P_1 and P_2 be $B-.5$ -property and X be a space that satisfies the weak $B-.5$ -insertion property for (P_1, P_2) . Also assume that g and f are functions on X such that $g < f$, g has property P_1 and f has property P_2 . The space X has the $B-.5$ -insertion property for (P_1, P_2) if and only if there exist lower cut sets $A(f - g, 3^{-n+1})$ and there exists a decreasing sequence $\{D_n\}$ of subsets of X with empty intersection and such that for each n , $X \setminus D_n$ and $A(f - g, 3^{-n+1})$ are completely separated by Baire-.5 functions.*

Proof. Theorem 2.1 of [18]. □

3 Applications

Definition 3.1. A real-valued function f defined on a space X is called *contra-upper semi-Baire-.5* (resp. *contra-lower semi-Baire-.5*) if $f^{-1}(-\infty, t)$ (resp. $f^{-1}(t, +\infty)$) is a G_δ -set for any real number t .

The abbreviations *usc*, *lsc*, *cusB-.5* and *clsB-.5* are used for upper semicontinuous, lower semicontinuous, contra-upper semi-Baire-.5, and contra-lower semi-Baire-.5, respectively.

Remark 3.1. [13, 14]. A space X has the weak c -insertion property for (*usc*, *lsc*) if and only if X is normal.

Before stating the consequences of Theorems 2.1 and 2.2 we suppose that X is a topological space that F_σ -kernel of sets are F_σ -sets.

Corollary 3.1. *For each pair of disjoint F_σ -sets F_1, F_2 , there are two G_δ -sets G_1 and G_2 such that $F_1 \subseteq G_1$, $F_2 \subseteq G_2$ and $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ if and only if X has the weak $B-.5$ -insertion property for (*cusB-.5*, *clsB-.5*).*

Proof. Let g and f be real-valued functions defined on the X , such that f is *lsB*₁, g is *usB*₁, and $g \leq f$. If a binary relation ρ is defined by $A \rho B$ in case $F_\sigma(A) \subseteq G_\delta(B)$, then by hypothesis ρ is a strong binary relation in the power set of X . If t_1 and t_2 are any elements of \mathbb{Q} with $t_1 < t_2$, then

$$A(f, t_1) \subseteq \{x \in X : f(x) \leq t_1\} \subseteq \{x \in X : g(x) < t_2\} \subseteq A(g, t_2);$$

since $\{x \in X : f(x) \leq t_1\}$ is a F_σ -set and since $\{x \in X : g(x) < t_2\}$ is a G_δ -set, it follows that $F_\sigma(A(f, t_1)) \subseteq G_\delta(A(g, t_2))$. Hence $t_1 < t_2$ implies that $A(f, t_1) \rho A(g, t_2)$. The proof follows from Theorem 2.1.

On the other hand, let F_1 and F_2 are disjoint F_σ -sets. Set $f = \chi_{F_1^c}$ and $g = \chi_{F_2}$, then f is *clsB-.5*, g is *cusB-.5*, and $g \leq f$. Thus there exists Baire-.5 function h such that $g \leq h \leq f$. Set $G_1 = \{x \in X : h(x) < \frac{1}{2}\}$ and $G_2 = \{x \in X : h(x) > \frac{1}{2}\}$, then G_1 and G_2 are disjoint G_δ -sets such that $F_1 \subseteq G_1$ and $F_2 \subseteq G_2$. □

Remark 3.2. [23]. A space X has the weak c -insertion property for (*lsc*, *usc*) if and only if X is extremally disconnected.

Corollary 3.2. *For every G of G_δ -set, $F_\sigma(G)$ is a G_δ -set if and only if X has the weak $B-.5$ -insertion property for (*clsB-.5*, *cusB-.5*).*

Proof. Let g and f be real-valued functions defined on the X , such that f is *clsB* - .5, g is *cusB* - .5, and $f \leq g$. If a binary relation ρ is defined by $A \rho B$ in case $F_\sigma(A) \subseteq G \subseteq F_\sigma(G) \subseteq G_\delta(B)$ for some G_δ -set g in X , then by hypothesis and Lemma 2.1 ρ is a strong binary relation in the power set of X . If t_1 and t_2 are any elements of \mathbb{Q} with $t_1 < t_2$, then

$$A(g, t_1) = \{x \in X : g(x) < t_1\} \subseteq \{x \in X : f(x) \leq t_2\} = A(f, t_2);$$

since $\{x \in X : g(x) < t_1\}$ is a G_δ -set and since $\{x \in X : f(x) \leq t_2\}$ is a F_σ -set, by hypothesis it follows that $A(g, t_1) \rho A(f, t_2)$. The proof follows from Theorem 2.1.

On the other hand, Let G_1 and G_2 are disjoint G_δ -sets. Set $f = \chi_{G_2}$ and $g = \chi_{G_1^c}$, then f is *clsB* - .5, g is *cusB* - .5, and $f \leq g$.

Thus there exists Baire-.5 function h such that $f \leq h \leq g$. Set $F_1 = \{x \in X : h(x) \leq \frac{1}{3}\}$ and $F_2 = \{x \in X : h(x) \geq \frac{2}{3}\}$ then F_1 and F_2 are disjoint F_σ -sets such that $G_1 \subseteq F_1$ and $G_2 \subseteq F_2$. Hence $F_\sigma(F_1) \cap F_\sigma(F_2) = \emptyset$. \square

Before starting the consequences of Theorem 2.2, we state and prove some necessary lemmas.

Lemma 3.1. *The following conditions on the space X are equivalent:*

- (i) *Every two disjoint F_σ -sets of X can be separated by G_δ -sets of X .*
- (ii) *If F is a F_σ -set of X which is contained in a G_δ -set G , then there exists a G_δ -set H such that $F \subseteq H \subseteq F_\sigma(H) \subseteq G$.*

Proof. (i) \Rightarrow (ii). Suppose that $F \subseteq G$, where F and G are F_σ -set and G_δ -set of X , respectively. Hence, G^c is a F_σ -set and $F \cap G^c = \emptyset$.

By (i) there exists two disjoint G_δ -sets G_1, G_2 such that $F \subseteq G_1$ and $G^c \subseteq G_2$. But

$$G^c \subseteq G_2 \Rightarrow G_2^c \subseteq G,$$

and

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset \Rightarrow G_1 \subseteq G_2^c$$

hence

$$F \subseteq G_1 \subseteq G_2^c \subseteq G$$

and since G_2^c is a F_σ -set containing G_1 we conclude that $F_\sigma(G_1) \subseteq G_2^c$, i.e.,

$$F \subseteq G_1 \subseteq F_\sigma(G_1) \subseteq G.$$

By setting $H = G_1$, condition (ii) holds.

(ii) \Rightarrow (i). Suppose that F_1, F_2 are two disjoint F_σ -sets of X .

This implies that $F_1 \subseteq F_2^c$ and F_2^c is a G_δ -set. Hence by (ii) there exists a G_δ -set H such that, $F_1 \subseteq H \subseteq F_\sigma(H) \subseteq F_2^c$. But

$$H \subseteq F_\sigma(H) \Rightarrow H \cap (F_\sigma(H))^c = \emptyset$$

and

$$F_\sigma(H) \subseteq F_2^c \Rightarrow F_2 \subseteq (F_\sigma(H))^c.$$

Furthermore, $(F_\sigma(H))^c$ is a G_δ -set of X . Hence $F_1 \subseteq H, F_2 \subseteq (F_\sigma(H))^c$ and $H \cap (F_\sigma(H))^c = \emptyset$. This means that condition (i) holds. \square

Lemma 3.2. *Suppose that X is the topological space such that we can separate every two disjoint F_σ -sets by G_δ -sets. If F_1 and F_2 are two disjoint F_σ -sets of X , then there exists a Baire-.5 function $h : X \rightarrow [0, 1]$ such that $h(F_1) = \{0\}$ and $h(F_2) = \{1\}$.*

Proof. Suppose F_1 and F_2 are two disjoint F_σ -sets of X . Since $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, hence $F_1 \subseteq F_2^c$. In particular, since F_2^c is a G_δ -set of X containing F_1 , by Lemma 3.1, there exists a G_δ -set $H_{1/2}$ such that,

$$F_1 \subseteq H_{1/2} \subseteq F_\sigma(H_{1/2}) \subseteq F_2^c.$$

Note that $H_{1/2}$ is a G_δ -set and contains F_1 , and F_2^c is a G_δ -set and contains $F_\sigma(H_{1/2})$. Hence, by Lemma 3.1, there exists G_δ -sets $H_{1/4}$ and $H_{3/4}$ such that,

$$F_1 \subseteq H_{1/4} \subseteq F_\sigma(H_{1/4}) \subseteq H_{1/2} \subseteq F_\sigma(H_{1/2}) \subseteq H_{3/4} \subseteq F_\sigma(H_{3/4}) \subseteq F_2^c.$$

By continuing this method for every $t \in D$, where $D \subseteq [0, 1]$ is the set of rational numbers that their denominators are exponents of 2, we obtain G_δ -sets H_t with the property that if $t_1, t_2 \in D$ and $t_1 < t_2$, then $H_{t_1} \subseteq H_{t_2}$. We define the function h on X by $h(x) = \inf\{t : x \in H_t\}$ for $x \notin F_2$ and $h(x) = 1$ for $x \in F_2$.

Note that for every $x \in X$, $0 \leq h(x) \leq 1$, i.e., h maps X into $[0, 1]$. Also, we note that for any $t \in D$, $F_1 \subseteq H_t$; hence $h(F_1) = \{0\}$. Furthermore, by definition, $h(F_2) = \{1\}$. It remains only to prove that h is a Baire-.5 function on X . For every $\alpha \in \mathbb{R}$, we have if $\alpha \leq 0$ then $\{x \in X : h(x) < \alpha\} = \emptyset$ and if $0 < \alpha$ then $\{x \in X : h(x) < \alpha\} = \cup\{H_t : t < \alpha\}$. Hence, they are G_δ -sets of X . Similarly, if $\alpha < 1$ then $\{x \in X : h(x) > \alpha\} = X$ and if $0 \leq \alpha$ then $\{x \in X : h(x) > \alpha\} = \cup\{(F_\sigma(H_t))^c : t > \alpha\}$ hence, every of them is a G_δ -set. Consequently h is a Baire-.5 function. \square

Lemma 3.3. *Suppose that X is the topological space such that every two disjoint F_σ -sets can be separated by G_δ -sets. The following conditions are equivalent:*

- (i) *Every countable covering of G_δ -sets of X has a refinement consisting of G_δ -sets such that, for every $x \in X$, there exists a G_δ -set containing x such that it intersects only finitely many members of the refinement.*
- (ii) *Corresponding to every decreasing sequence $\{F_n\}$ of F_σ -sets with empty intersection there exists a decreasing sequence $\{G_n\}$ of G_δ -sets such that, $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$ and for every $n \in \mathbb{N}$, $F_n \subseteq G_n$.*

Proof. (i) \Rightarrow (ii). suppose that $\{F_n\}$ be a decreasing sequence of F_σ -sets with empty intersection. Then $\{F_n^c : n \in \mathbb{N}\}$ is a countable covering of G_δ -sets. By hypothesis (i) and Lemma ??, this covering has a refinement $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ such that every V_n is a G_δ -set and $F_\sigma(V_n) \subseteq F_n^c$. By setting $G_n = (F_\sigma(V_n))^c$, we obtain a decreasing sequence of G_δ -sets with the required properties.

(ii) \Rightarrow (i). Now if $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$ is a countable covering of G_δ -sets, we set for $n \in \mathbb{N}$, $F_n = (\bigcup_{i=1}^n H_i)^c$. Then $\{F_n\}$ is a decreasing sequence of F_σ -sets with empty intersection. By (ii) there exists a decreasing sequence $\{G_n\}$ consisting of G_δ -sets such that, $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$ and for every $n \in \mathbb{N}$, $F_n \subseteq G_n$. Now we define the subsets W_n of X in the following manner:

- W_1 is a G_δ -set of X such that $G_1^c \subseteq W_1$ and $F_\sigma(W_1) \cap F_1 = \emptyset$.
- W_2 is a G_δ -set of X such that $F_\sigma(W_1) \cup G_2^c \subseteq W_2$ and $F_\sigma(W_2) \cap F_2 = \emptyset$, and so on. (By Lemma 3.1, W_n exists).

Then since $\{G_n^c : n \in \mathbb{N}\}$ is a covering for X , hence $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ is a covering for X consisting of G_δ -sets. Moreover, we have

1. $F_\sigma(W_n) \subseteq W_{n+1}$.
2. $G_n^c \subseteq W_n$.
3. $W_n \subseteq \bigcup_{i=1}^n H_i$.

Now suppose that $S_1 = W_1$ and for $n \geq 2$, we set $S_n = W_{n+1} \setminus F_\sigma(W_{n-1})$. Then since $F_\sigma(W_{n-1}) \subseteq W_n$ and $S_n \supseteq W_{n+1} \setminus W_n$, it follows that $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ consists of G_δ -sets and covers X . Furthermore, $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ if and only if $|i - j| \leq 1$. Finally, consider the following sets:

$$\begin{aligned} &S_1 \cap H_1, \quad S_1 \cap H_2 \\ &S_2 \cap H_1, \quad S_2 \cap H_2, \quad S_2 \cap H_3 \\ &S_3 \cap H_1, \quad S_3 \cap H_2, \quad S_3 \cap H_3, \quad S_3 \cap H_4 \end{aligned}$$

and continue ad infinitum. These sets are G_δ -sets, cover X and refine $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$. In addition, $S_i \cap H_j$ can intersect at most the sets in its row, immediately above, or immediately below row.

Hence if $x \in X$ and $x \in S_n \cap H_m$, then $S_n \cap H_m$ is a G_δ -set containing x that intersects at most finitely many of sets $S_i \cap H_j$. Consequently, $\{S_i \cap H_j : i \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, i + 1\}$ refines $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$ such that its elements are G_δ -sets, and for every point in X we can find a G_δ -set containing the point that intersects only finitely many elements of that refinement. \square

Remark 3.3. [13, 14]. A space X has the c -insertion property for (usc, lsc) if and only if X is normal and countably paracompact.

Corollary 3.3. X has the $B-.5$ -insertion property for $(cusB-.5, clsB-.5)$ if and only if every two disjoint F_σ -sets of X can be separated by G_δ -sets, and in addition, every countable covering of G_δ -sets has a refinement that consists of G_δ -sets such that, for every point of X we can find a G_δ -set containing that point such that, it intersects only a finite number of refining members.

Proof. Suppose that F_1 and F_2 are disjoint F_σ -sets. Since $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, it follows that $F_2 \subseteq F_1^c$. We set $f(x) = 2$ for $x \in F_1^c$, $f(x) = \frac{1}{2}$ for $x \notin F_1^c$, and $g = \chi_{F_2}$. Since F_2 is a F_σ -set, and F_1^c is a G_δ -set, therefore g is $cusB-.5$, f is $clsB-.5$ and furthermore $g < f$. Hence by hypothesis there exists a Baire-.5 function h such that, $g < h < f$. Now by setting $G_1 = \{x \in X : h(x) < 1\}$ and $G_2 = \{x \in X : h(x) > 1\}$. We can say that G_1 and G_2 are disjoint G_δ -sets that contain F_1 and F_2 , respectively. Now suppose that $\{F_n\}$ is a decreasing sequence of F_σ -sets with empty intersection. Set $F_0 = X$ and define for every $x \in F_n \setminus F_{n+1}$, $f(x) = \frac{1}{n+1}$. Since $\bigcap_{n=0}^\infty F_n = \emptyset$ and for every $x \in X$, there exists $n \in \mathbb{N}$, such that, $x \in F_n \setminus F_{n+1}$, f is well defined. Furthermore, for every $r \in \mathbb{R}$, if $r \leq 0$ then $\{x \in X : f(x) > r\} = X$ is a G_δ -set and if $r > 0$ then by Archimedean property of \mathbb{R} , we can find $i \in \mathbb{N}$ such that $\frac{1}{i+1} \leq r$. Now suppose that k is the least natural number such that $\frac{1}{k+1} \leq r$. Hence $\frac{1}{k} > r$ and consequently, $\{x \in X : f(x) > r\} = X \setminus F_k$ is a G_δ -set. Therefore, f is $clsB-.5$. By setting $g = 0$, we have g is $cusB-.5$ and $g < f$. Hence by hypothesis there exists a Baire-.5 function h on X such that, $g < h < f$.

By setting $G_n = \{x \in X : h(x) < \frac{1}{n+1}\}$, we have G_n is a G_δ -set. But for every $x \in F_n$, we have $f(x) \leq \frac{1}{n+1}$ and since $g < h < f$ therefore $0 < h(x) < \frac{1}{n+1}$, i.e., $x \in G_n$ therefore $F_n \subseteq G_n$ and since $h > 0$ it follows that $\bigcap_{n=1}^\infty G_n = \emptyset$. Hence by Lemma 3.3, the conditions holds.

On the other hand, since every two disjoint F_σ -sets can be separated by G_δ -sets, therefore by Corollary 3.1, X has the weak $B - .5$ -insertion property for $(cusB - .5, clsB - .5)$. Now suppose that f and g are real-valued functions on X with $g < f$, such that, g is $cusB - .5$ and f is $clsB - .5$. For every $n \in \mathbb{N}$, set

$$A(f - g, 3^{-n+1}) = \{x \in X : (f - g)(x) \leq 3^{-n+1}\}.$$

Since g is $cusB - .5$, and f is $clsB - .5$, therefore $f - g$ is $clsB - .5$. Hence $A(f - g, 3^{-n+1})$ is a F_σ -set of X . Consequently, $\{A(f - g, 3^{-n+1})\}$ is a decreasing sequence of F_σ -sets and furthermore since $0 < f - g$, it follows that $\bigcap_{n=1}^{\infty} A(f - g, 3^{-n+1}) = \emptyset$. Now by Lemma 3.3, there exists a decreasing sequence $\{D_n\}$ of G_δ -sets such that $A(f - g, 3^{-n+1}) \subseteq D_n$ and $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \emptyset$. But by Lemma 3.2, $A(f - g, 3^{-n+1})$ and $X \setminus D_n$ of F_σ -sets can be completely separated by Baire-.5 functions. Hence by Theorem 2.2, there exists a Baire-.5 function h defined on X such that, $g < h < f$, i.e., X has the $B - .5$ -insertion property for $(cusB - .5, clsB - .5)$. \square

Remark 3.4. [15]. A space X has the c -insertion property for (lsc, usc) iff X is extremally disconnected and if for any decreasing sequence $\{G_n\}$ of open subsets of X with empty intersection there exists a decreasing sequence $\{F_n\}$ of closed subsets of X with empty intersection such that $G_n \subseteq F_n$ for each n .

Corollary 3.4. For every G of G_δ -set, $F_\sigma(G)$ is a G_δ -set and in addition for every decreasing sequence $\{G_n\}$ of G_δ -sets with empty intersection, there exists a decreasing sequence $\{F_n\}$ of F_σ -sets with empty intersection such that for every $n \in \mathbb{N}$, $G_n \subseteq F_n$ if and only if X has the $B - .5$ -insertion property for $(clsB - .5, cusB - .5)$.

Proof. Since for every G of G_δ -set, $F_\sigma(G)$ is a G_δ -set, therefore by Corollary 3.2, X has the weak $B - .5$ -insertion property for $(clsB - .5, cusB - .5)$. Now suppose that f and g are real-valued functions defined on X with $g < f$, g is $clsB - .5$, and f is $cusB - .5$. Set $A(f - g, 3^{-n+1}) = \{x \in X : (f - g)(x) < 3^{-n+1}\}$. Then since $f - g$ is $cusB - .5$, hence $\{A(f - g, 3^{-n+1})\}$ is a decreasing sequence of G_δ -sets with empty intersection. By hypothesis, there exists a decreasing sequence $\{D_n\}$ of F_σ -sets with empty intersection such that, for every $n \in \mathbb{N}$, $A(f - g, 3^{-n+1}) \subseteq D_n$. Hence $X \setminus D_n$ and $A(f - g, 3^{-n+1})$ are two disjoint G_δ -sets and therefore by Lemma 2.1, we have

$$F_\sigma(A(f - g, 3^{-n+1})) \cap F_\sigma((X \setminus D_n)) = \emptyset$$

and therefore by Lemma 3.2, $X \setminus D_n$ and $A(f - g, 3^{-n+1})$ are completely separable by Baire-.5 functions. Therefore by Theorem 2.2, there exists a Baire-.5 function h on X such that, $g < h < f$, i.e., X has the $B - .5$ -insertion property for $(clsB - .5, cusB - .5)$.

On the other hand, suppose that G_1 and G_2 be two disjoint G_δ -sets. Since $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. We have $G_2 \subseteq G_1^c$. We set $f(x) = 2$ for $x \in G_1^c$, $f(x) = \frac{1}{2}$ for $x \in G_1$ and $g = \chi_{G_2}$.

Then since G_2 is a G_δ -set and G_1^c is a F_σ -set, we conclude that g is $clsB - .5$ and f is $cusB - .5$ and furthermore $g < f$. By hypothesis, there exists a Baire-.5 function h on X such that, $g < h < f$. Now we set $F_1 = \{x \in X : h(x) \leq \frac{3}{4}\}$ and $F_2 = \{x \in X : h(x) \geq 1\}$. Then F_1 and F_2 are two disjoint F_σ -sets contain G_1 and G_2 , respectively. Hence $F_\sigma(G_1) \subseteq F_1$ and $F_\sigma(G_2) \subseteq F_2$ and consequently $F_\sigma(G_1) \cap F_\sigma(G_2) = \emptyset$. By Lemma 2.1, for every G of G_δ -set, the set $F_\sigma(G)$ is a G_δ -set.

Now suppose that $\{G_n\}$ is a decreasing sequence of G_δ -sets with empty intersection. We set $G_0 = X$ and $f(x) = \frac{1}{n+1}$ for $x \in G_n \setminus G_{n+1}$. Since $\bigcap_{n=0}^{\infty} G_n = \emptyset$ and for every $n \in \mathbb{N}$ there exists $x \in G_n \setminus G_{n+1}$, f is well-defined. Furthermore, for every $r \in \mathbb{R}$, if $r \leq 0$ then

$\{x \in X : f(x) < r\} = \emptyset$ is a G_δ -set and if $r > 0$ then by Archimedean property of \mathbb{R} , there exists $i \in \mathbb{N}$ such that $\frac{1}{i+1} \leq r$. Suppose that k is the least natural number with this property. Hence $\frac{1}{k} > r$. Now if $\frac{1}{k+1} < r$ then $\{x \in X : f(x) < r\} = G_k$ is a G_δ -set and if $\frac{1}{k+1} = r$ then $\{x \in X : f(x) < r\} = G_{k+1}$ is a G_δ -set. Hence f is a *cusB*-.5 on X . By setting $g = 0$, we have conclude that g is *clsB*-.5 on X and in addition $g < f$. By hypothesis there exists a Baire-.5 function h on X such that, $g < h < f$.

Set $F_n = \{x \in X : h(x) \leq \frac{1}{n+1}\}$. This set is a F_σ -set. But for every $x \in G_n$, we have $f(x) \leq \frac{1}{n+1}$ and since $g < h < f$ thus $h(x) < \frac{1}{n+1}$, this means that $x \in F_n$ and consequently $G_n \subseteq F_n$.

By definition of $F_n, \{F_n\}$ is a decreasing sequence of F_σ -sets and since $h > 0, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$. Thus the conditions holds. \square

4 Acknowledgements

This research was partially supported by Centre of Excellence for Mathematics(University of Isfahan).

References

- [1] A. Al-Omari and M.S. Md Noorani. *Some properties of contra-b-continuous and almost contra-b-continuous functions*, European J. Pure. Appl. Math., **2**(2)(2009), 213–230.
- [2] F. Brooks. *Indefinite cut sets for real functions*. Amer. Math. Monthly, **78**(1971), 1007–1010.
- [3] M. Caldas and S. Jafari. *Some properties of contra- β -continuous functions*. Mem. Fac. Sci. Kochi. Univ., **22**(2001), 19–28.
- [4] J. Dontchev. *The characterization of some peculiar topological space via α - and β -sets*. Acta Math. Hungar., **69**(1-2)(1995), 67–71.
- [5] J. Dontchev. *Contra-continuous functions and strongly S-closed space*. Intrnat. J. Math. Math. Sci., **19**(2)(1996), 303–310.
- [6] J. Dontchev and H. Maki. *On sg-closed sets and semi- λ -closed sets*. Questions Answers Gen. Topology, **15**(2)(1997), 259–266.
- [7] E. Ekici. *On contra-continuity*. Annales Univ. Sci. Bodapest, **47**(2004), 127–137.
- [8] E. Ekici. *New forms of contra-continuity*. Carpathian J. Math., **24**(1)(2008), 37–45.
- [9] A.I. El-Magbrabi. *Some properties of contra-continuous mappings*. Int. J. General Topol., **3**(1-2)(2010), 55–64.
- [10] M. Ganster and I. Reilly. *A decomposition of continuity*. Acta Math. Hungar., **56**(3-4)(1990), 299–301.
- [11] S. Jafari and T. Noiri. *Contra-continuous function between topological spaces*. Iranian Int. J. Sci., **2**(2001), 153–167.

-
- [12] S. Jafari and T. Noiri. *On contra-precontinuous functions*, Bull. Malaysian Math. Sc. Soc., **25**(2002), 115–128.
- [13] M. Katětov. *On real-valued functions in topological spaces*. Fund. Math., **38**(1951), 85–91.
- [14] M. Katětov. *Correction to, "On real-valued functions in topological spaces"*. Fund. Math., **40**(1953), 203–205.
- [15] E. Lane. *Insertion of a continuous function*. Pacific J. Math., **66**(1976), 181–190.
- [16] H. Maki. *Generalized Λ -sets and the associated closure operator*, The special Issue in commemoration of Prof. Kazuada IKEDA's Retirement, (1986), 139–146.
- [17] S. N. Maheshwari and R. Prasad *On R_{O_s} -spaces*. Portugal. Math., **34**(1975), 213–217.
- [18] M. Mirmiran. *Insertion of a function belonging to a certain subclass of \mathbb{R}^X* . Bull. Iran. Math. Soc., Vol. **28**, No. 2 (2002), 19–27.
- [19] M. Mrsevic. *On pairwise R and pairwise R_1 bitopological spaces*. Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie, **30**(1986), 141–145.
- [20] A.A. Nasef. *Some properties of contra-continuous functions*. Chaos Solitons Fractals, **24**(2005), 471–477.
- [21] M. Przemski. *A decomposition of continuity and α -continuity*. Acta Math. Hungar., **61**(1-2)(1993), 93–98.
- [22] H. Rosen. *Darboux Baire-.5 functions*. Proceedings of The American Mathematical Society, **110**(1)(1990), 285–286.
- [23] M.H. Stone. *Boundedness properties in function-lattices*. Canad. J. Math., **1**(1949), 176–189.

Perturbations and zero points for equations with accretive mappings in fuzzy normed spaces

Perturbación y puntos cero para ecuaciones con mapeo acumulativo en espacios normados difusos

M. H. M. Rashid (malik_okasha@yahoo.com)

Faisal Al-kasasbeh (kassasbeh13@yahoo.com)

Department of Mathematics & Statistics
Faculty of Science P.O.Box(7)
Mu'tah University
Al-Karak-Jordan

Abstract

The purpose of this paper is to investigate the 1-set-contractive perturbations of accretive operators and discuss the solution of a special type of operator equations in fuzzy normed spaces. Also we shall study the perturbations, and the existence, problems of zero points for nonlinear equations with accretive mappings in fuzzy normed spaces.

Key words and phrases: accretive operator, iterative method, fixed point theorem, nonexpansive mapping, zero point.

Resumen

El propósito de este artículo es investigar las perturbaciones 1-conjunto contractivas de operadores acumulativos y discutir la solución de un tipo especial de ecuaciones de operadores en espacios normados difusos. También, estudiaremos las perturbaciones y existencia de problemas de puntos cero para ecuaciones no lineales con mapeo acumulativo en espacios normados difusos.

Palabras y frases clave: operador acumulativo, método iterativo, teorema del punto fijo, mapeo no expansivo, punto cero.

1 Introduction

It is well known that the concept of fuzzy metric space, which was initiated by O. Kramosil and J. Michalek in 1975, is an important generalization of metric space, and the fixed point theory in fuzzy metric spaces has been studied by many authors. The topological degree is a fundamental concept in algebraic topology and in analysis, and the number of its applications to nonlinear differential equations has increased at an impressive rate during the whole second half of the 20th century.

Received 07/12/2018. Revised 25/02/2019. Accepted 15/07/2019.
MSC (2010): Primary 47H05; Secondary 47H09, 47H10..
Corresponding author: M. H. M. Rashid

Li et al. introduced and studied the topological degree of 1-set-contractive fields in Banach spaces ([12]). Recently, by using the topological degree method, Li and Xu obtained many new results for 1-set-contractive operators in Banach space ([19, 23]). The topological degree for compact continuous operators in PN-spaces was first defined by Chang and Chen ([7]). Since then, the topological degrees of compact continuous operators, k -set-contractive operators, condensing operators and the A-proper degree in PN-spaces and the corresponding fixed point theorems have been studied extensively ([8, 11, 20, 21, 22, 23, 25]). Also, the accretive (m-accretive) operators in PN spaces were introduced and studied ([6, 10]). In [18], they established the topological degree of 1-set-contractive fields in PN-spaces, and obtained some new fixed point theorems.

The purpose of this paper is to further investigate the 1-set-contractive perturbations of accretive operators and discuss the solution of a special type of operator equations in fuzzy normed spaces.

For the sake of convenience, we first recall some definitions, notations as well as some lemmas which are useful in proving our main results in Section 2.

Definition 1.1. [15] A binary operation $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ is said to be a continuous t -norm if $([0, 1], T)$ is a topological monoid with unit 1 such that $T(a, b) \leq T(c, d)$ whenever $a \leq c, b \leq d$ for all $a, b, c, d \in [0, 1]$.

Some typical examples of t -norm are the following:

$$\begin{aligned} T(a, b) &= ab, & (\text{product}) \\ T(a, b) &= \min\{a, b\}, & (\text{minimum}) \\ T(a, b) &= \max\{a + b - 1, 0\}, & (\text{Lukasiewicz}) \\ T(a, b) &= \frac{ab}{a + b - ab}, & (\text{Hamacher}) \end{aligned}$$

Definition 1.2. [13] Let X be a vector space over a field \mathbb{K} (where \mathbb{K} is \mathbb{R} or \mathbb{C}) and T be a continuous t -norm. A fuzzy set N in $X \times [0, \infty)$ is called a fuzzy norm if it satisfies the following conditions:

- (FN1:) $N(x, 0) = 0$, for all $x \in X$;
- (FN2:) $N(x, t) = 0$ for all $t > 0$ if and only if $x = 0$;
- (FN3:) $N(\lambda x, t) = N\left(x, \frac{t}{|\lambda|}\right)$ for all $x \in X$ and all scalar $\lambda \neq 0$;
- (FN4:) $N(x + y, t + s) \geq T(N(x, t), N(y, s))$ for all $x, y \in X$ and all $t, s > 0$;
- (FN5:) for all $x \in X$, $N(x, \cdot)$ is left continuous and $\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1$.

The triple (X, N, T) will be called fuzzy normed linear space (briefly, FNLS).

Lemma 1.1. [3] Let (X, N, T) be a FNLS. Then $N(x, \cdot)$ is non-decreasing, for all $x \in X$.

Theorem 1.1. [13] Let (X, N, T) be a FNLS. For $x \in X$, $r \in (0, 1)$, $t > 0$, we define the open ball

$$B_x(r, t) := \{y \in X : N(x - y, t) > r\}.$$

Then

$$\tau_A := \{A \subset X : x \in A \iff \exists t > 0, r \in (0, 1) : B_x(r, t) \subset A\}$$

is a topology on X . Moreover, if the t -norm T satisfies $\sup_{t \in (0, 1)} T(t, t) = 1$, then (X, τ_N) is Hausdorff.

Theorem 1.2. [13] Let (X, N, T) be a FNLS. Then (X, τ_N) is a metrizable topological vector space.

Definition 1.3. [13] Let (X, N, T) be a FNLS and $\{x_n\}$ be the sequence in X .

1. The sequence $\{x_n\}$ is said to be convergent if there exists $x \in X$ such that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) = 1, \text{ for all } t > 0.$$

In this case x is called the limit of the sequence $\{x_n\}$ and we denote $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ or $x_n \rightarrow x$.

2. The sequence $\{x_n\}$ is called Cauchy sequence if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_{n+p} - x_n, t) = 1$$

for all $t > 0$ and all $p \in \mathbb{N}$.

3. (X, N, T) is said to be complete if every Cauchy sequence in X is convergent to a point in X . A complete FNLS will be called a fuzzy Banach space.

Definition 1.4. Let (X, N, T) be a fuzzy normed space and D be a subset of X . A mapping $A : D \rightarrow X$ is said to be compact if $\overline{A(D)}$ is a compact subset of X .

Lemma 1.2. Let (X, N, T) be a fuzzy normed space, T is a t -norm satisfying $T(t, t) \geq t$ for all $t \in [0, 1]$, Ω be a nonempty subset of X , $S : \Omega \rightarrow X$ be a compact continuous mapping. Then for any neighborhood of θ , $u(\epsilon, \lambda)$, $\epsilon > 0$, $\lambda > 0$, there exists a finite dimension-valued compact mapping $S_{\epsilon, \lambda}$ such that

$$Sx - S_{\epsilon, \lambda} \in u(\epsilon, \lambda), \quad x \in \Omega.$$

Lemma 1.3. Let (X, N, T) satisfy all the conditions of Lemma 1.2. Let Ω be a nonempty open subset of X and $S : \overline{\Omega} \rightarrow X$ be a compact continuous mapping. Then $R = I - S$ is a closed mapping.

Definition 1.5. Let (X, N, T) be a fuzzy normed space, T is a t -norm satisfying $T(t, t) \geq t$ for all $t \in [0, 1]$. Let Ω be a nonempty open subset of X and $S : \overline{\Omega} \rightarrow X$ be a compact continuous mapping. Let $R = I - S$ and $p \in X \setminus R(\partial\Omega)$. By Lemma 1.3, R is a closed mapping, $R(\partial\Omega)$ is a closed subset of X , and, consequently, there exists a neighborhood of θ , $u(\epsilon, \lambda)$, such that

$$(p + u(\epsilon, \lambda)) \cap R(\partial\Omega) = \emptyset.$$

By Lemma 1.2, there exists a finite dimension subspace $X^{(n)}$ of X with $p \in X^{(n)}$ and a continuous compact mapping $S_n : \overline{\Omega} \rightarrow X^{(n)}$ such that $N(Sx - S_n x, \epsilon) > 1 - \lambda$ for all $x \in \overline{\Omega}$. Letting $\Omega_n = \Omega \cap X^{(n)}$ and $R_n = I - S_n$, we are going to prove $p \notin R_n(\partial\Omega)$.

In fact, if there exists some $x_0 \in \partial\Omega$ such that $p = R_n x_0$, then we have

$$N(Rx_0 - p, \epsilon) = N(Sx_0 - R_n x_0, \epsilon) = N(Sx_0 - S_n x_0, \epsilon) > 1 - \lambda.$$

This contradicts $(p + u(\epsilon, \lambda)) \cap R(\partial\Omega) = \emptyset$. Beside, since $\overline{(I - (I - S_n))(\Omega_n)}$ is a compact set, the topological degree $deg_n(R_n, \Omega_n, p)$ in finite dimensional space $X^{(n)}$ is significant. We define the *Leray-Schauder topological degree* of R as follows:

$$Deg(R, \Omega, p) = deg_n(R_n, \Omega_n, p). \quad (1.1)$$

2 Accretive mappings in fuzzy normed spaces

Definition 2.1. Let (X, N, T) is a fuzzy normed space and A be a nonempty subset of X . The function

$$D_A(t) = \sup_{s < t} \inf_{x, y \in A} N(x - y, s), \quad t \in \mathbb{R}$$

is called the fuzzy diameter of A . If we have $\sup_{t > 0} D_A(t) = 1$, then A is called a fuzzy bounded subset; if $\sup_{t > 0} D_A(t) = 0$, then A is called a fuzzy unbounded subset.

Remark 2.1. In the sequel, we call the nonnegative number $\alpha_A(t) = \sup\{\epsilon \geq 0 : \text{there exist finite subsets } A_i, i = 1, \dots, n \text{ such that } A \subset \cup_{i=1}^n A_i \text{ and } D_{A_i}(t) \geq \epsilon\}$ the fuzzy noncompactness measure of A .

The fuzzy noncompactness measure has many important basic properties. The following will be useful in the sequel:

- (i) $\alpha_A(t) = 1$ for all $t > 0$ if and only if A is a *relatively compact set*.
- (ii) Assume that $S : Dom(S) \subset X \rightarrow X$ is a mapping and A is a fuzzy bounded set of $Dom(S)$. If there exists a $k \in (0, 1)$ such that

$$\alpha_{SA}(t) \geq \alpha_A\left(\frac{t}{k}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

then S is called a k -set contraction mapping. If for any fuzzy bounded set $A \subset Dom(S)$ with $\alpha_A(t) \neq 1$, $\alpha_{SA}(t) > \alpha_A(t)$ for all $t > 0$, then S is called a *condensing mapping*.

Definition 2.2. Let (X, N, T) is a fuzzy normed space. Then

1. A mapping $S : Dom(S) \subset X \rightarrow 2^X$ is said to be *accretive* if

$$N(x - y, t) \geq N(x - y + \lambda(u - v), t), \quad u \in Sx, v \in Sy, x, y \in Dom(S), \lambda > 0.$$

2. The mapping S is said to be *maximal accretive* if

$$N(x - y_0, t) \geq N(x - y_0 + \lambda(u - v_0), t), \quad x \in Dom(S), \lambda > 0, u \in Sx,$$

then for any $y_0 \in Dom(S)$, we have $v_0 \in Sy_0$.

3. The mapping S is said to be *m-accretive* if S is accretive and $I + S$ is surjective.
4. The mapping S is said to be *strongly accretive* if there exists a $k \in (0, 1)$ such that

$$N((\lambda - k)(x - y), t) \geq N((\lambda - 1)(x - y) + u - v, t) \quad (2.1)$$

for all $\lambda > k$, $x, y \in Dom(S)$, $u \in Sx$, $v \in Sy$.

5. The mapping S is said to be *dissipative* (resp., *maximal dissipative*) if $(-S)$ is accretive (resp., maximal accretive).

Proposition 2.1. *Let (X, N, T) be a complete fuzzy normed space with $T(t, t) \geq t$ for all $t \geq 0$. Then S is m -accretive if and only if for any $\lambda > 0$, $I + \lambda S$ is surjective.*

Proof. The sufficient condition is obvious.

Necessity: Let S be a m -accretive mapping. Then $I + S$ is surjective. Hence for any given $y_0 \in X$, the equation $y_0 \in (I + \lambda S)x$ has a solution x if and only if $x = (I + S)^{-1}(\lambda^{-1}y_0 + \lambda^{-1}(\lambda - 1)x)$. Now we define a mapping R as follows:

$$R : x \rightarrow X, \quad Rx = (I + S)^{-1}[\lambda^{-1}y_0 + \lambda^{-1}(\lambda - 1)x]. \tag{2.2}$$

It follows from (2.2) that for each $x \in X, \lambda^{-1}y_0 + \lambda^{-1}(\lambda - 1)x - Rx \in Sx$. By the accretiveness of S , we have

$$\begin{aligned} N(Rx - Ry, t) &\geq N((x - y)\lambda^{-1}(\lambda - 1), t) \\ &= N\left(x - y, \frac{\lambda}{|\lambda - 1|}t\right), \quad x, y \in X. \end{aligned}$$

When $\lambda > 1/2$, $R : X \rightarrow X$ is a contraction mapping. By [26], R has a unique fixed point in X , i.e., there exists an $w \in X$ such that

$$w = Rw = (I + S)^{-1}[\lambda^{-1}y_0 + \lambda^{-1}(\lambda - 1)w].$$

This means that for any given $y_0 \in X$, the equation $y_0 \in (I + S)(x)$ has a solution w and so $\text{ran}(I + \lambda S) = X$ for all $\lambda > 1/2$.

Similarly, by the induction, we can prove that $\text{ran}(I + \lambda^n S) = X$ for all $n \geq 1, \lambda > 1/2$. From this we can especially obtain $\text{ran}(I + \lambda S) = X$ for all $\lambda > 0$. This achieves the proof. \square

Now, we give some properties of accretive mappings and their resolvents in fuzzy normed spaces.

Let (X, N, T) be a fuzzy normed space and let A be an accretive mapping in X . We put $J_r = (I + rA)^{-1}$ and $A_r = \frac{1}{r}(I - J_r)$ for every $r > 0$. Then $\text{Dom}(J_r) = \text{ran}(I + rA)$, $\text{ran}(J_r) = \text{Dom}(A)$ and $\text{Dom}(A_r) = \text{Dom}(J_r)$ for every $r > 0$.

Firstly, we consider the properties of J_r :

Lemma 2.1. *Let (X, N, T) be a fuzzy normed space. Then J_r is single-valued and*

$$N(J_r x - J_r y, t) \geq N(x - y, t)$$

for every $x, y \in \text{Dom}(J_r)$, $r > 0$ and $t \in \mathbb{R}$.

Proof. Let $x, y \in \text{Dom}(J_r)$, $r > 0$ and $t \in \mathbb{R}$. Suppose that $y_1, y_2 \in J_r x$. Since A is accretive in X ,

$$\begin{aligned} N(y_1 - y_2, t) &\geq N(y_1 - y_2 + r\left(\frac{1}{r}(x - y_1) - \frac{1}{r}(x - y_2)\right), t) \\ &= N(0, t) = 1. \end{aligned}$$

Hence we have $N(y_1 - y_2, t) = 1$ and so $y_1 = y_2$. There exist $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in A$ such that $x = x_1 + ry_1$ and $y = x_2 + ry_2$ and thus $J_r x = x_1$, $J_r y = x_2$. Since A is accretive in X ,

$$N(J_r x - J_r y, t) = N(x_1 - x_2, t) \geq N(x_1 - x_2 + r(y_1 - y_2), t) = N(x - y, t).$$

This achieves the proof. \square

Proposition 2.2. *Let (X, N, T) be a fuzzy normed space. Then*

1. *If $T(t, t) \geq t$ for every $t \in [0, 1]$, then we have*

$$N\left(\frac{1}{n}(J_r^n x - x), t\right) \geq N(J_r x - x, t)$$

for all $x \in \text{Dom}(J_r^n)$, $r > 0$, $t \in \mathbb{R}$ and $n = 1, 2, \dots$.

2. *$\frac{r}{p}x + \frac{p-r}{p}J_p x \in \text{Dom}(J_r)$ and $J_p x = J_r\left(\frac{r}{p}x + \frac{p-r}{p}J_p x\right)$ for all $x \in \text{Dom}(J_p)$, $p, r > 0$ and $t \in \mathbb{R}$.*

3. *$N(J_p x - J_r y, t) \geq N\left(\frac{r}{p+r}(x - J_r y) - \frac{p}{p+r}(y - J_p x), t\right)$ for all $x \in \text{Dom}(J_p)$, $y \in \text{Dom}(J_r)$, $p, r > 0$ and $t \in \mathbb{R}$.*

Proof. (1) Let $x \in \text{Dom}(J_r^n)$, $r > 0$, $t \in \mathbb{R}$ and $n = 1, 2, \dots$. By the assumption and Lemma 2.1, we have

$$\begin{aligned} N\left(\frac{1}{n}(J_r^n x - x), t\right) &= N(J_r^n x - x, nt) \\ &\geq T(N(J_r^n x - J_r^{n-1} x, t), N(J_r^{n-1} x - x, (n-1)t)) \\ &\geq T(N(J_r^n x - J_r^{n-1} x, t), T(N(J_r^{n-1} x - J_r^{n-2} x, t), \dots \\ &\quad T(N(J_r^2 x - J_r x, t), N(J_r x - x, t), \dots))) \\ &\geq T(N(J_r x - x, t), T(N(J_r x - x, t), \dots), \\ &\quad T(N(J_r x - x, t), N(J_r x - x))) \\ &\geq N(J_r x - x, t). \end{aligned}$$

(2) The proof follows similarity as in [4].

(3) Let $x \in \text{Dom}(J_p)$, $y \in \text{Dom}(J_r)$, $p, r > 0$ and $t \in \mathbb{R}$. Putting $q = \frac{p-r}{p+r}$, by (2),

$$\begin{aligned} \frac{q}{p}x + \frac{p-q}{p}J_p x &\in \text{Dom}(J_q), \\ J_p x &= J_q\left(\frac{q}{p}x + \frac{p-q}{p}J_p x\right) = J_q\left(\frac{r}{p+r}x + \frac{p}{p+r}J_p x\right), \\ \frac{q}{r}y + \frac{r-q}{r}J_r y, \\ J_r y &= J_q\left(\frac{q}{r}y + \frac{r-q}{r}J_r y\right) = J_q\left(\frac{p}{p+r}y + \frac{r}{r+p}J_r y\right). \end{aligned}$$

By Lemma 2.1, we have

$$\begin{aligned} N(J_p x - J_r y, t) &= N\left(J_q\left(\frac{r}{p+r}x + \frac{p}{p+r}J_p x\right) - J_q\left(\frac{p}{p+r}y + \frac{r}{p+r}J_r y\right), t\right) \\ &\geq N\left(\frac{r}{p+r}(x - J_r y) - \frac{p}{p+r}(y - J_p x), t\right). \end{aligned}$$

□

Next, we consider the properties of A_r :

Proposition 2.3. *Let (X, N, T) be a fuzzy normed space. Then*

1. *If $T(t, t) \geq t$ for every $t \in [0, 1]$, then we have*

$$N(A_r x - A_r y, t) \geq N\left(\frac{2}{r}(x - y), t\right)$$

for every $x, y \in \text{Dom}(J_r)$, $r > 0$ and $t \in \mathbb{R}$.

2. *$A_r x \in AJ_r x$ for every $x \in \text{Dom}(J_r)$ and $r > 0$, and*

$$N(A_r x, t) \geq \sup_{y \in Ax} N(y, t)$$

for every $x \in \text{Dom}(A) \cap \text{Dom}(J_r)$ and $r > 0$.

Proof. (1) Let $x, y \in \text{Dom}(J_r)$, $r > 0$ and $t \in \mathbb{R}$. Then by Lemma 2.1,

$$\begin{aligned} N(A_r x - A_r y, t) &= N\left(\frac{1}{r}(x - y) - \frac{1}{r}(J_r x - J_r y), t\right) \\ &\geq T\left(N\left(\frac{1}{r}(x - y), \frac{t}{2}\right), N\left(\frac{1}{r}(J_r x - J_r y), \frac{rt}{2}\right)\right) \\ &\geq T\left(N\left(\frac{1}{r}(x - y), t\right), N\left(\frac{1}{r}(x - y), t\right)\right) \\ &\geq N\left(\frac{1}{r}(x - y), t\right). \end{aligned}$$

(2) Let $x \in \text{Dom}(J_r)$ and $r > 0$. By the definition, $A_r x \in AJ_r x$. Let $x \in \text{Dom}(A) \cap \text{Dom}(J_r)$ and $r > 0$. Suppose $y \in Ax$. There exists $[x_1, y_1] \in A$ such that $x = x_1 + ry_1$ and so $J_r x = x_1$. By Lemma 2.1, we have

$$\begin{aligned} N(A_r x, t) &= N(x - J_r x, rt) = N(J_r(x + ry) - J_r x, rt) \\ &\geq N(x + ry - x, rt) = N(y, t). \end{aligned}$$

Thus, it follows that $N(A_r x, t) \geq \sup_{y \in Ax} N(y, t)$. This achieves the proof. □

Definition 2.3. Let (X, N, T) be a fuzzy normed space and let $A, B : X \rightarrow 2^X$ be operators. B is said to be an extension of A if $\text{Dom}(A) \subset \text{Dom}(B)$ and $Ax \subset Bx$ for every $x \in \text{Dom}(A)$. We denote it by $A \subset B$.

Proposition 2.4. *Let (X, N, T) be a fuzzy normed space. If A is an m -accretive operator of X , then A is a maximal accretive operator of X .*

Proof. Let B be accretive in X with $A \subset B$. Let $r > 0$ and $t \in \mathbb{R}$. Let $[x, y] \in B$. Since A is m -accretive in X , $x + ry \in \text{ran}(I + rA)$. There exists $[x_1, y_1] \in A$ such that $x + ry = x_1 + ry_1$. Since B is accretive and $[x_1, y_1] \in B$,

$$N(x - x_1, t) \geq N(x - x_1 + r(y - y_1), t) = N(0, t) = 1.$$

Hence we have $x = x_1$ and thus $y = y_1$. Therefore, $[x, y] \in A$, that is, $B \subset A$ and thus $A = B$. Consequently, A is maximal accretive in X . This achieves the proof. □

Proposition 2.5. *Let (X, N, T) be a fuzzy normed space and $[x_0, y_0] \in X \times X$. Then A is maximal accretive in X if and only if*

$$N(x - x_0, t) \geq N(x - x_0 + r(y - y_0), t)$$

for every $[x, y] \in A$, $r > 0$ and $t \in \mathbb{R}$ implies $[x_0, y_0] \in A$.

Proof. Let A be maximal accretive in X . Put $\widehat{A} = A \cup [x_0, y_0]$. Then A is accretive in X and $A \subset \widehat{A}$. Since \widehat{A} is maximal accretive in X , $\widehat{A} = A$. Hence $[x_0, y_0] \in A$. Conversely, let B be accretive in X with $A \subset B$. Let $[u, v] \in B$. Since B is accretive in X , for every $[x, y] \in A$, $r > 0$ and $t \in \mathbb{R}$, we have

$$N(x - u, t) \geq N(x - u + r(y - v), t).$$

By the assumption, $[u, v] \in A$ and so $B \subset A$. Hence $A = B$. Therefore A is maximal accretive in X . \square

Proposition 2.6. *Let (X, N, T) be a fuzzy normed space and A be accretive in X . Then there exists a maximal accretive operator containing A .*

Proof. Let $\mathcal{B} = \{B : B \text{ is accretive in } X \text{ and } A \subset B\}$. Then (\mathcal{B}, \subset) is a partially ordered set. Let \mathfrak{T} be a totally ordered set with $\mathfrak{T} \subset \mathcal{B}$. It is easy to show that \mathfrak{T} has an upper bound. By Zorn's lemma, there exists a maximal element in \mathcal{B} . This is a maximal accretive operator of X containing A . \square

Next, consider the closeness of accretive operators

Proposition 2.7. *Let (X, N, T) be a fuzzy normed space and let A be accretive in X . Then the closure \bar{A} of A is also accretive in X .*

Proof. Let $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in \bar{A}$. Then there exist $[x_{1n}, y_{1n}], [x_{2n}, y_{2n}] \in A$ such that $x_{1n} \rightarrow x_1, x_{2n} \rightarrow x_2, y_{1n} \rightarrow y_1$ and $y_{2n} \rightarrow y_2$. Let $r > 0$ and $t \in \mathbb{R}$. Since A is accretive,

$$N(x_{1n} - x_{2n}, t) \geq N(x_{1n} - x_{2n} + r(y_{1n} - y_{2n}), t).$$

Since N is lower semi-continuous on X , as $n \rightarrow \infty$, we have

$$N(x_1 - x_2, t) \geq N(x_1 - x_2 + r(y_1 - y_2), t).$$

Hence, \bar{A} is accretive in X . This achieves the proof. \square

Proposition 2.8. *Let (X, N, T) be a complete fuzzy normed space and let T be continuous with $T(t, t) \geq t$ for every $t \in [0, 1]$. Let A be accretive in X . If A is closed, then $\text{ran}(I + rA)$ is also closed for every $r > 0$.*

Proof. Let $z_n \in \text{ran}(I + rA)$ such that $z_n \rightarrow z$. Then by assumption, $\{z_n\}$ is also a Cauchy sequence in X . There exists $[x_n, y_n] \in A$ such that $x_n + ry_n = z_n$ and so $J_r z_n = x_n$. Since A is accretive, for every $t \in \mathbb{R}$, we have

$$N(x_n - x_m, t) = N(J_r z_n - J_r z_m, t) \geq N(z_n - z_m, t).$$

Hence, it follows that

$$\liminf_{n, m \rightarrow \infty} N(x_n - x_m, t) \geq \liminf_{n, m \rightarrow \infty} N(z_n - z_m, t) = N(0, t) = 1$$

for every $t > 0$. Thus $\lim_{n,m \rightarrow \infty} N(x_n - x_m, t) = 1$ for every $t > 0$. Therefore, $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence in X . there exists $x \in X$ such that $x_n \rightarrow x$ and so $y_n = \frac{1}{r}(z_n - x_n) \rightarrow \frac{1}{r}(z - x)$. Since A is closed, $[x, \frac{1}{r}(z - x)] \in A$. Hence $z \in x + rAx \in r(I + rA)$. Therefore, $\text{ran}(I + rA)$ is closed. This achieves the proof. \square

Proposition 2.9. *Let (X, N, T) be a fuzzy normed space and A be maximal accretive in X . Then A is closed.*

Proof. Let $[x_n, y_n] \in A$ and $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$. Let $r > 0$ and $t \in \mathbb{R}$. Since A is accretive, for every $[x, y] \in A$, we have

$$N(x - x_n, t) \geq N(x - x_n + r(y_n - y_0), t).$$

Since N is lower semi-continuous on X , as $n \rightarrow \infty$,

$$N(x - x_0, t) \geq N(x - x_0 + r(y - y_0), t).$$

Since A is maximal accretive, by Proposition 2.5, $[x_0, y_0] \in A$. Hence A is closed. This achieves the proof. \square

Corollary 2.1. *Let (X, N, T) be a fuzzy normed space. Then*

1. *If A is m -accretive in X , then A is closed.*
2. *If A is maximal accretive in X , then Ax is a closed subset of X for every $x \in \text{Dom}(A)$.*

Proposition 2.10. *Let (X, N, T) be a fuzzy normed space and A be accretive in X . Let C be a closed convex subset of X and $p > r > 0$. If $C \subset \text{ran}(I + rA)$ and $J_r C \subset C$, then $C \subset \text{ran}(I + pA)$ and $J_p C \subset C$.*

Proof. Let $x \in C$ and $p > r > 0$. Define $S : C \rightarrow C$ by $Sz = J_r \left(\frac{r}{p}x + \frac{p-r}{p}z \right)$ for every $z \in C$. Let $t \in \mathbb{R}$. By Lemma 2.1, for every $z_1, z_2 \in C$, we have

$$\begin{aligned} N(Sz_1 - Sz_2, t) &= N \left(J_r \left(\frac{r}{p}x + \frac{p-r}{p}z_1 \right) - J_r \left(\frac{r}{p}x + \frac{p-r}{p}z_2 \right), t \right) \\ &\geq N \left(\frac{p-r}{p}(z_1 - z_2), t \right). \end{aligned}$$

Since $0 < \frac{p-r}{p} < 1$, by [15], there exists a point $z \in C$ uniquely such that $Sz = z$. It follows that $x \in z + pAz \subset \text{ran}(I + pA)$. Thus $C \subset \text{ran}(I + pA)$ and $J_p C \subset C$. This achieves the proof. \square

Finally, we consider the convergence of resolvents of accretive mappings in fuzzy normed spaces.

Proposition 2.11. *Let (X, N, T) be a fuzzy normed space and J_r be the resolvent of an accretive operator A for every $r > 0$ and T be continuous. Then*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} J_r x = x, \quad x \in \bigcap_{r > 0} \text{Dom}(J_r) \cap \text{Dom}(A).$$

Proof. Let $x \in \bigcap_{r>0} \text{Dom}(J_r) \cap \text{Dom}(A)$ and $t \in \mathbb{R}$. By (2) of Proposition 2.3, as $r \rightarrow 0^+$,

$$N(J_r x - x, t) = N\left(A_r x, \frac{t}{r}\right) \geq \sup_{y \in A_r x} N\left(y, \frac{t}{r}\right) \rightarrow 1$$

for every $t > 0$. Thus we have $\lim_{r \rightarrow 0^+} N(J_r x - x, t) = 1$ for every $t > 0$. Hence $\lim_{r \rightarrow 0^+} J_r x = x$. \square

Proposition 2.12. *Let (X, N, T) be a fuzzy normed space and J_r be the resolvent of an accretive operator A for every $r > 0$ and $T(t, t) \geq t$ for every $t \in [0, 1]$. Then*

$$\varliminf_{r \rightarrow \infty} N\left(\frac{J_r x}{r}, t\right) = \lim_{r \rightarrow \infty} N(A_r x, t) = \sup_{y \in \text{ran}(A)} N(y, t)$$

for every $x \in \bigcap_{r>0} \text{Dom}(J_r)$ and $t \in \mathbb{R}$.

Proof. Let $x \in \bigcap_{r>0} \text{Dom}(J_r)$ and $t \in \mathbb{R}$. Put $d_t = \sup_{y \in \text{ran}(A)} N(y, t)$. Since $A_r x \in AJ_r x \subset \text{ran}(A)$ by (2) of Proposition 2.3, $N(A_r x, t) \geq \sup_{y \in \text{ran}(A)} N(y, t) = d_t$. Thus $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} N(A_r x, t) \geq d_t$. Let $\alpha \in (0, 1)$. By the definition of $d_{\alpha t}$, for every $\epsilon > 0$, $d_{\alpha t} - \epsilon < N(y_0, \alpha t)$ for some $[x_0, y_0] \in A$. By Proposition 2.3, we have

$$\begin{aligned} N(A_r x, t) &= N(A_r x - A_r x_0 + A_r x_0, (1 - \alpha)t + \alpha t) \\ &\geq T(N(A_r x - A_r x_0, (1 - \alpha)t), N(A_r x_0, \alpha t)) \\ &\geq T\left(N\left(\frac{2}{r}(x - x_0), (1 - \alpha)t\right), N(A_r x_0, \alpha t)\right). \end{aligned}$$

Thus, it follows that

$$\begin{aligned} \varliminf_{r \rightarrow \infty} N(A_r x, t) &\geq \varliminf_{r \rightarrow \infty} T\left(N\left(\frac{2}{r}(x - x_0), (1 - \alpha)t\right), N(A_r x_0, \alpha t)\right) \\ &\geq T\left(\varliminf_{r \rightarrow \infty} N\left(\frac{2}{r}(x - x_0), (1 - \alpha)t\right), \varliminf_{r \rightarrow \infty} N(A_r x_0, \alpha t)\right) \\ &= T(1, \varliminf_{r \rightarrow \infty} N(A_r x_0, \alpha t)) \\ &\geq \sup_{y \in A_r x_0} N(y, \alpha t) \geq N(y, \alpha t) > d_{\alpha t} - \epsilon. \end{aligned}$$

Since ϵ is arbitrary, as $\epsilon \rightarrow 0^+$, $\varliminf_{r \rightarrow \infty} N(A_r x, t) \geq d_{\alpha t}$. Since $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} d_{\alpha t} = d_t$, $\varliminf_{r \rightarrow \infty} N(A_r x, t) \geq d_t$. Therefore, $\lim_{r \rightarrow \infty} N(A_r x, t) = d_t$. The second equality holds.

Next, consider the first equality. Let $\alpha \in (0, 1)$. From

$$N\left(\frac{J_r x}{r}, t\right) = N\left(A_r x - \frac{x}{r}, t\right) \geq T\left(N(A_r x, \alpha t), N\left(\frac{x}{r}, (1 - \alpha)t\right)\right),$$

we have

$$\begin{aligned} \varliminf_{r \rightarrow \infty} N\left(\frac{J_r x}{r}, t\right) &\geq \varliminf_{r \rightarrow \infty} T\left(N(A_r x, \alpha t), N\left(\frac{x}{r}, (1 - \alpha)t\right)\right) \\ &\geq T\left(\varliminf_{r \rightarrow \infty} N(A_r x, \alpha t), \varliminf_{r \rightarrow \infty} N\left(\frac{x}{r}, (1 - \alpha)t\right)\right) \\ &\geq \varliminf_{r \rightarrow \infty} N(A_r x, \alpha t). \end{aligned}$$

As $\alpha \rightarrow 1^-$, $\underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} N\left(\frac{J_r x}{r}, t\right) \geq \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} N(A_r x, t)$. Similarly, $\underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} N(A_r x, t) \geq \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} N\left(\frac{J_r x}{r}, t\right)$. $\underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} N(A_r x, t) = \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} N\left(\frac{J_r x}{r}, t\right)$. This achieves the proof. \square

3 Perturbations and Zero Points for Equations with Accretive Mappings in Fuzzy normed spaces

In this section, we shall study the perturbation and the existence problems of zero points for nonlinear equations with accretive mappings in fuzzy normed spaces. In the sequel we always assume that (X, N, T) is a fuzzy normed space and T is a continuous t -norm satisfying $\sup_{0 < t < 1} T(t, t) = 1$.

Lemma 3.1. *Let D be a nonempty open set of X and $S : \overline{D} \rightarrow 2^X$ be a strongly accretive mapping.*

1. *Let $C = \{x \in D : \text{there exists } t < 0 \text{ such that } tx \in Sx\}$. If $\theta \in D$, then C is fuzzy bounded,*
2. *Let $u_n \in Sx_n$ and $\{x_n - u_n\}$ be fuzzy bounded. If $t_n \in (0, 1]$ and $t_n \rightarrow t_0$, $z_n = (1 - t_n)x_n + t_n u_n \rightarrow y$, then $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence of X .*

Proof. (1) If $x \in C$, then there exists a $t < 0$ such that $tx \in Sx$. Since S is strongly accretive, we have

$$N((\lambda - k)(x - \theta), s) \geq N((\lambda - 1)(x - \theta) + (tx - v), s) \tag{3.1}$$

for all $\lambda > k$, $k \in (0, 1)$ and $v \in S\theta$ is a given point. Let $\lambda = 1 - t$ and so $\lambda > k$. By (3.1), we have

$$N((1 - t - k)x, s) \geq N(-v, s) = N(v, s)$$

and so $N(v, s) \geq N(v, (1 - t - k)s) \geq N(v, (1 - k)s)$. This implies that C is fuzzy bounded.

(2) Since

$$N((\lambda - k)(x_n - x_m), s) \geq N((\lambda - 1)(x_n - x_m) + (u_n - u_m), s) \tag{3.2}$$

for all $\lambda > k$, letting $\lambda = t_n^{-1}$ and substituting it into (3.2), we have

$$N((1 - kt_n)t_n^{-1}(x_n - x_m), s) \geq N((1 - t_n)x_n + t_n u_n - (1 - t_n)x_m - t_n u_m, t_n s).$$

This implies that

$$N(x_n - x_m, s) \geq N(z_n - z_m + (t_m - t_n)(x_m - u_m), (1 - kt_n)s).$$

So, we have

$$N(x_n - x_m, s) \geq T\left(N\left(z_n - z_m, \frac{1 - kt_n}{2}s\right), N\left(x_m - u_m, \frac{1 - kt_n}{t_m - t_n} \cdot \frac{s}{2}\right)\right).$$

Hence we have $\lim_{n, m \rightarrow \infty} N(x_n - x_m, s) = 1$ for all $s > 0$ and so $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence of X . This achieves the proof. \square

Theorem 3.1. *Let (X, N, T) be a complete fuzzy normed space with a continuous t -norm T , $D \subset X$ be an open subset and $S : \overline{D} \rightarrow X$ a single-valued continuous strongly accretive mapping. Suppose further that the following conditions are satisfied:*

- (i) S maps a fuzzy bounded set into a fuzzy bounded set,
- (ii) for any $t \in [0, 1]$, $tI + (1 - t)S$ is an open mapping,
- (iii) there exists some $z \in D$ such that for each $x \in \partial D$ and each $t < 0$, $t(x - z) \neq Sx$.

Then the equation $Sx = \theta$ has a solution in \overline{D} .

Proof. Without loss of generality, we can assume that $z = \theta$ (otherwise, we can make a translation for D and S). Define a mapping $L_t : \overline{D} \rightarrow X$ by

$$L_t(x) = (1 - t)x + tSx, \quad t \in [0, 1],$$

and let $M = \{t \in [0, 1] : \text{there exists } x \in D \text{ such that } \theta = q_t(x)\}$. It is obvious that $\theta \in M$ and so $M \neq \emptyset$.

Now we prove that M is a closed set. In fact, let $\{t_n\}$ be a sequence in M and $t_n \rightarrow t_0$. Hence there exists $x_n \in D$ such that $\theta = L_{t_n}(x_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Then we have

$$\frac{1 - t_n}{t_n}x_n = Sx_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

By Lemma 3.1, $\{x_n\}$ is fuzzy bounded and so $\{x_n - Sx_n\}_{n=1}^\infty$ is a fuzzy bounded set. By Lemma 3.1, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ is a Cauchy sequence. Let $x_n \rightarrow x_0$. Hence $(1 - t_0)x_n + t_0Sx_0 = \theta$, i.e., $t_0 \in M$. This shows that M is a closed set.

Now we use the method of reduction to absurdity to prove $\sup M = 1$. If $\sup M \neq 1$, then there exist $t_1 \in M$ and a sequence $\{t_n\} \subset [0, 1]$, $t_n \in M$ such that $t_n \rightarrow t_1$. Since $\theta = L_{t_1}(x_1)$, where x_1 is a point in D , let C be an open neighborhood of x_1 and $C \subset D$. It is obvious that

$$y_n = L_{t_n} \in L_{t_n}(C), \quad n = 1, 2, \dots$$

Since $\theta \notin L_{t_n}(C)$ and $L_{t_n}(C)$ is an open set, $\{ty_n : t \in [0, 1]\} \cap L_{t_n}(\partial C) \neq \emptyset$. Now we prove that $L_{t_n}(\overline{D})$ is a closed set for $n = 1, 2, \dots$. In fact, if $(1 - t_n)x_1 + t_nSx_1 \rightarrow z$ as $n \rightarrow \infty$, it follows from

$$N((1 - t_nk)t_n^{-1}(x_{i1} - x_{i2}), t) \geq N((1 - t_n)t_n^{-2}(x_{i1} - x_{i2}) + (Sx_{i1} - Sx_{i2}), t)$$

for all $t > 0$ that

$$N((1 - t_nk)(x_{i1} - x_{i2}), t) \geq N(L_{t_n}(x_{i1}) - L_{t_n}(x_{i2}), t)$$

for all $t > 0$. Hence we have $x_i \rightarrow x_0 \in \overline{C}$ and so $z = L_{t_n}(x_0) \in L_{t_n}(\overline{C})$. This implies that $L_{t_n}(\overline{C})$ is a closed set.

Next, we have $\partial L_{t_n}(C) \subset L_{t_n}(\partial C)$ and there exists a point $x_n \in \partial C$ such that $L_{t_n}(x_n) \in \{ty_n : t \in [0, 1]\}$. Since $y_n \rightarrow \theta$, $L_{t_n}(x_n) \rightarrow \theta$. Let $z_n = L_{t_n}(x_n) = (1 - t_n)x_n + t_nSx_n$. Since we have

$$N((\lambda - k)(x_n - \theta), s) \geq N((\lambda - 1)(x_n - \theta) - (1 - t_n)t_n^{-1}x_n + t_n^{-1}z_n - v, s)$$

for all $\lambda > k$, $s > 0$, where $v = S\theta$, taking $\lambda = t_n^{-1}$, we have $N((1 - t_nk)t_n^{-1}x_n, s) \geq N(t_n^{-1}(z_n - t_nv), s)$ for all $s > 0$, i.e.,

$$N(x_n, s) \geq N(x_n - t_nv, s(1 - k)).$$

This implies that $\{x_n\}$ is fuzzy bounded and so $\{x_n - Sx_n\}$ is fuzzy bounded. By Lemma 3.1(2), $x_n \rightarrow x_2 \in \partial C$ and hence we have

$$(1 - t_1)x_2 + t_1Sx_2 = \theta.$$

Since $N((\lambda - k)(x_2 - x_1), s) \geq N((\lambda - 1)(x_2 - x_1) + Sx_2 - Sx_1, s)$, letting $\lambda = t_1^{-1}$, we have

$$N((1 - t_1)t_1^{-1}(x_2 - x_1), s) \geq 1,$$

which implies that $x_1 = x_2$, which is a contradiction. Hence $\sup M = 1$ and so there exist $t_n \rightarrow a$, $x_n \in D$ such that $(1 - t_n)x_n + t_n Sx_n = \theta$.

By the same way stated above, we can prove that $\{x_n\}$ is fuzzy bounded and so $x_n \rightarrow x_0 \in \overline{D}$, $Sx_0 = \theta$. This implies that the equation $Sx = \theta$ has a solution in \overline{D} . This achieves the proof. \square

Corollary 3.1. *Let (X, N, T) be a complete fuzzy normed space, Ω be an open set of X , $\theta \in \Omega$, $S : \overline{\Omega} \rightarrow X$ be a continuous strongly pseudo-contraction mapping, $I - tS$ an open mapping $I - tS$ be a mapping from a fuzzy bounded set into a fuzzy bounded set. Suppose that for each $x \in \partial\Omega$, $Sx \neq \lambda x$ for all $\lambda \geq 1$. Then S has a fixed point in Ω .*

Proposition 3.1. *Let (X, N, T) be a complete fuzzy normed space with $T(t, t) \geq t$ for all $t \in [0, 1]$. Let $S : D \rightarrow 2^X$ be a strongly accretive mapping and D be a nonempty closed set of X . If $D \subset (I + S)(D)$, then S has a zero point in D .*

Proof. Since S is a strongly accretive mapping,

$$N((\lambda - k)(x - y), t) \geq N((\lambda - 1)(x - y) + u - v, t)$$

for all $u \in Sx$, $v \in Sy$, $x, y \in D$, $\lambda > k$, $k \in (0, 1)$. Letting $\lambda = 2$, we have

$$N((2 - k)[(I + S)^{-1}z - (I + S)^{-1}w], t) \geq N(z - w, t)$$

for all $z, w \in (I + S)D$. This implies that $(I + S)^{-1} : D \rightarrow D$ is a contraction mapping and so there exists a fixed point in D , i.e., there exists x_0 such that $x_0 = (I + S)^{-1}x_0$. Hence we have $\theta \in Sx_0$. This achieves the proof. \square

Corollary 3.2. *Let (X, N, T) be a complete fuzzy normed space with $T(t, t) \geq t$ for all $t \in [0, 1]$. Let $S : D \rightarrow 2^X$ be a strongly accretive mapping and D be a nonempty closed set of X . If $(I + S)D = D$, then $\text{ran}(S) = X$.*

Proof. For any given $p \in X$, let $S_0 = S - p$. By Proposition 3.1, the equation $p \in Sx$ has a solution in D . This achieves the proof. \square

Remark 3.1. Assume that (X, N, T) is a complete fuzzy normed space with $T(t, t) \geq t$ for all $t \in [0, 1]$, Ω is a nonempty open subset of X , $S_1 : \overline{\Omega} \rightarrow 2^X$ is accretive mapping, $S_2 : \overline{\Omega} \rightarrow X$ is a continuous condensing mapping such that $S_2(\overline{\Omega})$ is fuzzy bounded and $S_2(\overline{\Omega}) \subset (I + S_1)(\overline{\Omega})$. Now we consider the existence problem of solutions for the following multi-valued equation:

$$\theta \in (I + S_1 - S_2)(x). \tag{3.3}$$

Since S_1 is accretive, $(I + S_1)^{-1}$ is a nonexpansion mapping. Therefore the equation (3.3) is equivalent to the following equation:

$$x \in (I + S_1)^{-1}S_2x. \tag{3.4}$$

It is easy to know that $(I + S_1)^{-1}S_2$ is a condensing mapping.

If $S : \bar{\Omega} \rightarrow X$ is a continuous k -set contraction mapping, $k \in (0, 1)$, $S(\bar{\Omega})$ is a fuzzy bounded set, $\theta \notin (I - S)(\partial\Omega)$, and denote

$$D = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n; \quad D_1 = \overline{co}(S(\bar{\Omega})), \quad D_n = \overline{co}(D_{n-1} \cap \bar{\Omega}), n \geq 2.$$

If there exists an n_0 such that $D_{n_0} = \emptyset$, then we define the topological degree as:

$$\deg(I - S, \Omega, \theta) = 0.$$

If D is a nonempty set of X , it is easy to see that D is a compact convex subset of X . By J. Dugundji [9], there exists a retraction $r : X \rightarrow D$. Letting

$$S_r = S.r : \bar{\Omega} \rightarrow D,$$

then S_r is a compact mapping and $\theta \notin (I - S_r)(\partial\Omega)$. The topological degree $\deg(I - S, \Omega, \theta)$ has meaning [15], and we define

$$\deg(I - S_r, \Omega, \theta) = \deg(I - S, \Omega, \theta). \quad (3.5)$$

It is easy to prove that the topological degree defined by (3.5) is well-defined (see [1, 2] and [5]).

If $S : \bar{\Omega} \rightarrow X$ is a continuous condensing mapping, $S(\bar{\Omega})$ is a fuzzy bounded set and $\theta \notin (I - S)(\partial\Omega)$, then there exists a $t_0 > 0$ such that

$$\sup_{x \in \partial\Omega} N(x - Sx, t_0) = \rho < 1.$$

Since $S(\bar{\Omega})$ is fuzzy bounded, when $k \in (0, 1)$ and k is sufficiently near 1, then we have

$$\inf_{x \in \partial\Omega} N\left(Sx, \frac{t_0}{2(1-k)}\right) > \rho.$$

Let $S_k = kS$. Then S_k is a k -set contraction mapping, $0 < k < 1$. When k is sufficiently near 1, it follows from the following inequality:

$$N(x - Sx, t_0) \geq \min \left\{ N\left(x - Sx, \frac{t_0}{2}\right), N\left(Sx, \frac{t_0}{2(1-k)}\right) \right\}$$

for all $x \in \partial\Omega$ that

$$N(x - Sx, t_0) \geq N\left(x - S_kx, \frac{t_0}{2}\right), \quad x \in \partial\Omega.$$

Therefore, we have $\theta \notin (I - S_k)(\partial\Omega)$ and so the topological degree $\deg(I - S_k, \Omega, \theta)$ is well-defined. We define

$$\deg(I - S, \Omega, \theta) = \deg(I - S_k, \Omega, \theta). \quad (3.6)$$

Now we turn to discuss the existence problem of solutions of equation (3.3). If $\theta \notin (I + S_1 - S_2)(x)$ for all $x \in \partial\Omega$, then $x \notin (I + S_1)^{-1}S_2x$ for all $x \in \partial\Omega$. Hence the topological degree $\deg(I - (I + S_1)^{-1}S_2, \Omega, \theta)$ is well-defined.

Theorem 3.2. *Let (X, N, T) be a complete fuzzy normed space with $T(t, t) \geq t$ for all $t \in [0, 1]$, $\Omega \subset X$ be an open subset and $\theta \in \Omega$. Suppose that $S_1 : \overline{\Omega} \rightarrow 2^X$ is an accretive mapping, $S_2 : \overline{\Omega} \rightarrow X$ is a continuous condensing mapping and $S_2(\overline{\Omega})$ is a fuzzy bounded set and for any $t \in (0, 1]$, $tS_2(\overline{\Omega}) \subset (I + tS_1)(\overline{\Omega})$. If for any $x \in \partial\Omega$ and any $\lambda \geq 1$, $\lambda x \notin (S_2 - S_1)(x)$, then the equation $\theta \in (I + S_1 - S_2)(x)$ has a solution in Ω .*

Proof. Since $\lambda x \notin (S_2 - S_1)(x)$ for any $x \in \partial\Omega$ and any $\lambda \geq 1$ and S_1 is accretive, we have

$$x \neq (I + tS_1)^{-1}.tS_2x, \quad x \in \partial\Omega.$$

Since $(I + tS_1)^{-1}.tS_2 : [0, 1] \times \overline{\Omega} \rightarrow X$ is continuous condensing, the topological degree $\deg(I - (I + S_1)^{-1}.tS_2, \Omega, \theta)$ is well-defined and it is independent of $t \in [0, 1]$. Hence we have

$$\deg(I - (I + S_1)^{-1}S_2, \Omega, \theta) = \deg(I - \theta, \Omega, \theta) = 1.$$

This implies that the equation $\theta \in (x + S_1x - S_2x)$ has a solution in Ω . This achieves the proof. \square

Corollary 3.3. *Let (X, N, T) , Ω be the same as in Theorem 3.2. Suppose that $S_1 : \overline{\Omega} \rightarrow 2^X$ is an m -accretive mapping, $S_2 : \overline{\Omega} \rightarrow X$ is a continuous condensing mapping and $S_2(\overline{\Omega})$ is fuzzy bounded. If for any $x \in \partial\Omega$ and for any $\lambda \geq 1$, $\lambda x \notin (S_2 - S_1)(x)$. Then the equation $\theta \in (I + S_1 - S_2)(x)$ has a solution in Ω .*

Corollary 3.4. *Let (X, N, T) , Ω be the same as in Theorem 3.2. Suppose that $S_1 : \overline{\Omega} \rightarrow 2^X$ is an accretive mapping, $S_2 : \overline{\Omega} \rightarrow X$ is a continuous condensing mapping and $S_2(\overline{\Omega})$ is fuzzy bounded and for any $t \in (0, 1]$, $tS_2(\overline{\Omega}) \subset (I + tS_1)(\overline{\Omega})$. If $N(S_2x - f, t) \geq N(x, t)$ for all $x \in \partial\Omega$, $f \in S_1x$, $t > 0$, then $\theta \in (I + S_1 - S_2)(\overline{\Omega})$.*

Proof. Without loss of generality, we can assume that $\theta \notin (I + S_1 - S_2)(\partial\Omega)$. if for some $x_0 \in \partial\Omega$ and some $\lambda > 1$ such that $\lambda x_0 \in S_2x_0 - S_1x_0$, then we have

$$N(\lambda x_0, t) \geq N(x_0, t), \quad t > 0,$$

and so we have $x_0 = \theta$, which is a contradiction. Hence for any $x \in \partial\Omega$ and $\lambda \geq 1$, $\lambda x \notin (I + S_1 - S_2)(x)$. The conclusion follows from Theorem 3.2 immediately. This achieves the proof. \square

Lemma 3.2. *Let (X, N, T) be a complete fuzzy normed space with $T(t, t) \geq t$ for all $t \in [0, 1]$. Let Ω be an open subset of X , $\theta \in \Omega$. Suppose that $S_2 : \overline{\Omega} \rightarrow X$ is a continuous mapping and $S_2(\overline{\Omega})$ is a compact set. Suppose that $S_1 : X \rightarrow X$ is a continuous dissipative mapping, $S_1(\partial\Omega)$ is a fuzzy bounded set and that $S_2(\overline{\Omega}) \subset (I - S_1)(X)$. If*

$$N(S_2x + S_1\mu x, t) \leq N(x, t), \quad t > 0, x \in \partial\Omega, \mu \in [0, 1],$$

and for any $x \in \partial\Omega$, $x \neq (S_1 + S_2)x$, then

$$\deg(I - (I - S_1)^{-1}S_2, \Omega, \theta) = 0.$$

Proof. Since S_1 is dissipative, $(-S_1)$ is accretive. Next, since for any $x \in \partial\Omega$, $x \neq (S_1 + S_2)(x)$, the topological degree $\deg(I - (I - S_1)^{-1}S_2, \Omega, \theta)$ is well-defined. Now we prove that

$$\theta \notin \bigcup_{\mu \in [0,1]} [\mu I - (I - S_1)^{-1}S_2](\partial\Omega). \tag{3.7}$$

Suppose that this is not the case. Then there exist $\mu_n \rightarrow \mu_0$, $x_n \in \partial\Omega$ such that

$$-y_n = \mu_n x_n - (I - S_1)^{-1} S_2 x_n \rightarrow \theta.$$

Since we have $N(x_n, t) \geq N(S_1 x_n + S_2 x_n, t)$ for all $t > 0$, $\{x_n\}$ is fuzzy bounded. In the sequel, we discuss two cases:

- (a) If $\mu_0 = 0$. Since $S_2 x_n = (I - S_1)(\mu_n x_n + y_n)$ and $y_n \rightarrow \theta$, $\mu_n x_n + y_n \rightarrow \theta$, by the continuity of S_1 and S_2 , we have $S_2 x_n + S_1 \mu_n x_n \rightarrow \theta$. Besides, since $N(x_n, t) \geq N(S_2 x_n + S_1 \mu_n x_n, t) \rightarrow 1$ for all $t > 0$, $x_n \rightarrow \theta \in \partial\Omega$, which is a contradiction.
- (b) If $\mu_0 \neq 0$. Since $\{(I - S_1)^{-1} S_2 x_n\}$ has a convergent subsequence, without loss of generality, we can assume that $(I - S_1)^{-1} S_2 x_n \rightarrow y_0$ and so $x_n \rightarrow \mu_0^{-1} y_0$. Hence we have

$$(I - S_1)^{-1} S_2 x_n \rightarrow y_0 = (I - S_1)^{-1} S_2 (\mu_0^{-1} y_0).$$

This shows that $y_0 = \mu_0(y_0/\mu_0) = S_1 \mu_0(y_0/\mu_0) + S_2(\mu_0)^{-1} y_0$. It is obvious that $\mu_0 \neq 1$. Again since we have

$$N(y_0/\mu_0, t) \geq N(S_2(\mu_0)^{-1} y_0 + S_1 \mu_0 \mu_0^{-1} y_0, t) = N(\mu_0 \cdot y_0/\mu_0, t)$$

for all $t \geq 0$, $N(y_0/\mu_0, t) = 1$ for all $t > 0$ and so we have $y_0 = \theta \in \Omega$, which is a contradiction.

Summing up the above discussion, we know that (3.7) is true. Hence by [15], we have $\deg(I - (I - S_1)^{-1} S_2, \Omega, \theta) = 0$. This achieves the proof. □

Theorem 3.3. *Let (X, N, T) be the same as in Lemma 3.2. Let Ω_1, Ω_2 be two open sets of X , $\theta \in \Omega_1 \subset \Omega_2$ and $\Omega_1 \neq \Omega_2$. Let $S_1 : X \rightarrow X$ be a continuous dissipative mapping, $S_2 : \overline{\Omega_2} \rightarrow X$ be a continuous mapping, $\overline{S_2(\overline{\Omega_2})}$ be a compact set and $tS_2(\overline{\Omega_2}) \subset (I - tS_1)(X)$ for all $t \in (0, 1]$. If one of the following conditions is satisfied:*

- (i) *For any $x \in \partial\Omega$, $N(x, t) \leq N(S_1 x + S_2 x, t)$ for all $t > 0$; for any $x \in \partial\Omega$, $\mu \in [0, 1]$, $N(S_2 x + S_1 \mu x, t) \leq N(x, t)$ for all $t > 0$ and $S_1(\partial\Omega_1)$ is fuzzy bounded,*
- (ii) *for any $x \in \partial\Omega_2$, $\mu \in [0, 1]$, $N(S_2 x + S_1 \mu x, t) \leq N(x, t)$ for all $t > 0$ and $S_1(\partial\Omega_2)$ is fuzzy bounded; for any $x \in \partial\Omega_1$, $N(x, t) \leq N(S_1 x + S_2 x, t)$ for all $t > 0$.*

Then $S_1 + S_2$ has a fixed point in $\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1$.

Proof. It suffices to prove that the conclusion is true under the condition (i). Without loss of generality, we can assume that $S_1 + S_2$ has no fixed point on $\partial\Omega_1$ and $\partial\Omega_2$ (otherwise, the conclusion has been proved). From $N(x, t) \leq N(S_1 + S_2 x, t)$ for all $x \in \partial\Omega_2$ and for all $t > 0$, it follows that for any $x \in \partial\Omega_1$, $\lambda \geq 1$, $\lambda x \neq (S_1 + S_2)(x)$. Hence we have

$$\deg(I - (I - S_1)^{-1} S_2, \Omega_2, \theta) = 1.$$

By Lemma 3.2, it follows that $\deg(I - (I - S_1)^{-1} S_2, \Omega_1, \theta) = 0$ and so

$$\deg(I - (I - S_1)^{-1} S_2, \Omega_2 \setminus \Omega_1, \theta) = 1.$$

This implies that $S_1 + S_2$ has a fixed point in $\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1$. This achieves the proof. □

References

- [1] Amann, H., *A note on degree theory for gradient maps*, Proc. Amer. Math. Soc. **85**, 591–595, 1982.
- [2] Amann, H. and Weiss, S., *On the uniqueness of the topological degree*, Math. Z. **130** (1), 39–54, 1973.
- [3] Bag, T. and Samanta, S.K., *Fuzzy bounded linear spaces*, Fuzzy Sets and Systems. **151**, 513–547, 2005.
- [4] Barbu, V., *Nonlinear semigroup and differential equations in Banach spaces*, Edut. Acad. R.S.R., Bucureesti, 1976.
- [5] Browder, F.E. and Nussbaum, R.D., *The topological degree for noncompact nonlinear mappings in Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **74**, 671–676, 1968.
- [6] Chang, S. S. and Chen, Y. Q., *On the existence of solutions for equations with accretive mappings in PN-spaces*, Appl. Math. Mech. **11**(9), 821–828, 1990.
- [7] Chang, S. S. and Chen, Y. Q., *Topological degree theory and fixed point theorems in probabilistic metric spaces*, Appl. Math. Mech. **10**(6), 495–505, 1989.
- [8] Chang, S. S. Cho, Y. J. and Kang, S. M., *Nonlinear Operator Theory in Probabilistic Metric Spaces*, Nova Science Publishers Inc, New York, 2001.
- [9] J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific J. Math. **1**, 353–367, 1951.
- [10] Ha, K. S., Shin, K. Y. and Cho, Y. J., *Accretive operators in probabilistic normed spaces*, Bull. Korean Math. Soc. **31** (1), 45–54, 1994.
- [11] Huang, X. Q., Wang, M. S. and Zhu, C. X., *The topological degree of A-proper mapping in the Menger PN-space (I)*, Bull. Aust. Math. Soc. **73**, 161–168, 2006.
- [12] Li, G. Z., Xu, S. Y. and Duan, H. G., *Fixed point theorems of 1-set-contractive operators in Banach spaces*, Appl. Math. Lett. **19**(5), 403–412, 2006.
- [13] Nădăban, S. and Dzitac, I., *Atomic Decomposition of fuzzy normed linear spaces for wavelet applications*, Informatica **25**(4), 643–662, 2014.
- [14] Schweizer, B. and Sklar, A., *Statistical metric spaces*, Pacific J. Math. **10**, 313–334, 1960.
- [15] Schweizer, B. and Sklar, A., *Probabilistical Metric Spaces*, Dover Publications, New York, 2005.
- [16] Sherwood, H., *On the completion of probabilistic metric spaces*, Wahrscheinlichkeitstheorie verw Gebiete **6**, 62–64, 1966.
- [17] Wardowski, D., *Fuzzy contractive mappings and fixed points in fuzzy metric spaces*, Fuzzy Sets and Systems, **222**, 108–114, 2013.
- [18] Wu, Z. Q. and Zhu, C. X., *Topological degree for 1-set-contractive fields in M-PN spaces and its applications*, Appl. Math. J. Chin. Univ. **25**(4), 463–474, 2010.

- [19] Xu, S. Y., *New fixed point theorems for 1-set-contractive operators in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **67**(3), 938–944, 2007.
- [20] C. X. Zhu, *Some new fixed point theorems in probabilistic metric spaces*, Appl. Math. Mech. **16**(2), 179–185, 1995.
- [21] Zhu, C. X., *Several nonlinear operator problems in the Menger PN space*, Nonlinear Anal. **65**, 1281–1284, 2006.
- [22] Zhu, C. X., *Research on some problems for nonlinear operators*, Nonlinear Anal. **71**(10), 4568– 4571, 2009.
- [23] Zhu, C. X. and Huang, X. Q., *The topological degree of A-proper mapping in the Menger PN-space (II)*, Bull. austral. math. Soc. **73**, 169–173, 2006.
- [24] Zeng, W. Z., *Probabilistic contractor and nonlinear equation in Menger PN-spaces*, J. Math. Research Expos. **11**, 47–51, 1991.
- [25] Zhu, C. X. and Xu, Z. B., *Inequalities and solution of an operator equation*, Appl. Math. Lett. **21** (6), 607–611, 2008.
- [26] Zhu, J., Wang Y. and Zhu, C. C., *Fixed point theorems for contractions in fuzzy normed spaces and intuitionistic fuzzy normed spaces*, Fixed Point Theory Appl. 2013 **2013**:79 DOI: 10.1186/1687-1812-2013-79.

Algoritmo para la solución numérica de la ecuación de Poisson usando diferencias finitas

Algorithm for the numerical solution of the Poisson's equation using the finite difference

Yohan Díaz Ferrer (ydferrer@uho.edu.cu)
Miguel Cruz Ramírez (mcruizr@uho.edu.cu)

Universidad de Holguín
Provincia Holguín
Cuba

Resumen

El algoritmo está diseñado a partir de un método que resulta una adaptación del método de diferencia finita para problemas de valor de frontera. En el procedimiento se utiliza el método iterativo de Gauss-Seidel para resolver el sistema lineal producido. En la estructura se permiten diferentes tamaños de red en los ejes. Para visualizar la ejecución del algoritmo se incluye la solución numérica de un problema particular.

Palabras y frases clave: algoritmo, ecuación de Poisson, ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, solución numérica, diferencias finitas.

Abstract

The algorithm is designed from a method that results in an adaptation of the finite difference method for boundary value problems. In the procedure, the iterative Gauss-Seidel method is used to solve the linear system produced. Different network sizes in the axes are allowed in the structure. To visualize the execution of the algorithm, the numerical solution of a particular problem is included.

Key words and phrases: algorithm, Poisson's equation, differential equations in partial derivatives, numerical solution, finite differences.

1 Introducción

Las situaciones físicas que involucran más de una variable se pueden expresar frecuentemente usando ecuaciones que contienen derivadas parciales [6]. En este trabajo presentamos un algoritmo que ejecuta una de las técnicas disponibles para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales parciales que involucran dos variables, mostrando cómo pueden aplicarse a ciertos problemas típicos [1].

2 Ecuaciones diferenciales parciales elípticas

La ecuación diferencial parcial elíptica que consideraremos es la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 u(x, y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \quad (1)$$

para $(x, y) \in \mathbf{R}$ y

$$u(x, y) = g(x, y) \text{ para } (x, y) \in \mathbf{S},$$

donde

$$\mathbf{R} = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\}$$

y \mathbf{S} denota la frontera de \mathbf{R} , véase [2]. Para esta discusión supondremos que f y g son continuas en sus dominios con lo que se asegura una solución única de la ecuación (1).

El método que usaremos es una adaptación del método de diferencia finita para problemas de valor de frontera [12]. El primer paso consiste en escoger dos enteros n y m , y en definir los tamaños de pasos h y k por $h = (b - a)/n$ y $k = (d - c)/m$.

Partiendo el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales de longitud h y el intervalo $[c, d]$ en m partes iguales de longitud k , ver la figura (1), da una manera de asociar la red al rectángulo \mathbf{R} pasando rectas verticales y horizontales por los puntos con coordenadas (x_i, y_j) donde

$$\begin{aligned} x_i &= a + ih & \text{para cada } i = 0, 1, \dots, n, \\ y_j &= c + jk & \text{para cada } j = 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

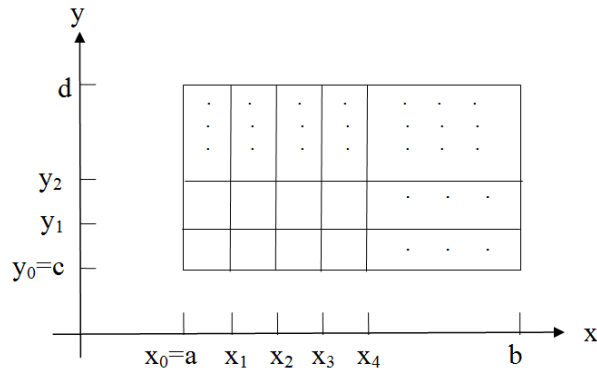


Figura 1. Líneas de red y puntos de red.

Las rectas $x = x_i$ y $y = y_j$ se llaman **líneas de red** y sus intersecciones se llaman **puntos de red** [10]. Por cada punto de red en el interior de la malla (x_i, y_j) , $i = 0, 1, \dots, n - 1$ y $j = 0, 1, \dots, m - 1$ usamos la serie de Taylor en la variable x alrededor de x_i para generar la fórmula de diferencia centrada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j)$$

donde $\xi \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ y la serie de Taylor en la variable y alrededor de y_j para generar la fórmula de diferencia centrada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_j),$$

donde $\eta_j \in (y_{i-1}, y_{i+1})$.

Usando estas fórmulas en la ecuación (1) podemos expresar la ecuación de Poisson en los puntos (x_i, y_j) como:

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2} = \\ & = f(x_i, y_j) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j) + \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_j) \end{aligned}$$

para cada $i = 0, 1, \dots, (n - 1)$ y $j = 0, 1, \dots, (m - 1)$, y las condiciones de frontera como

$$\begin{aligned} u(x_0, y_j) &= g(x_0, y_j) && \text{para cada } j = 0, 1, \dots, m, \\ u(x_n, y_j) &= g(x_n, y_j) && \text{para cada } j = 0, 1, \dots, m, \\ u(x_i, y_0) &= g(x_i, y_0) && \text{para cada } i = 0, 1, \dots, n - 1, \\ u(x_i, y_m) &= g(x_i, y_m) && \text{para cada } i = 0, 1, \dots, n - 1, \end{aligned}$$

En la forma de ecuación de diferencia, esto da lugar a un método llamado **diferencia centrada** con error de truncamiento local de orden $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$, que puede escribirse como:

$$2 \left[\left(\frac{h}{k} \right)^2 + 1 \right] w_{i,j} - (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - \left(\frac{h}{k} \right)^2 (w_{i,j} + w_{i,j-1}) = -h^2 f(x_i, y_j), \quad (2)$$

para cada $i = 0, 1, \dots, (n - 1)$ y $j = 0, 1, \dots, (m - 1)$,

$$\begin{aligned} w_{0,j} &= g(x_0, y_j) && \text{para cada } j = 0, 1, \dots, m, \\ w_{n,j} &= g(x_n, y_j) && \text{para cada } j = 0, 1, \dots, m, \\ w_{i,0} &= g(x_i, y_0) && \text{para cada } i = 0, 1, \dots, n - 1, \\ w_{i,m} &= g(x_i, y_m) && \text{para cada } i = 0, 1, \dots, n - 1, \end{aligned} \quad (3)$$

donde $w_{i,j}$ aproxima a $u(x_i, y_j)$.

La ecuación típica (2) involucra aproximaciones a $u(x, y)$ en los puntos

$$(x_{i-1}, y_j)(x_i, y_j)(x_{i+1}, y_j)(x_i, y_{j-1})(x_i, y_{j+1}).$$

Reproduciendo la porción de la red donde están localizados estos puntos, figura (2), vemos que cada ecuación contiene aproximaciones en una región en forma de estrella alrededor de (x_i, y_j) . Si usamos la información de las condiciones de frontera (3) donde sea apropiado en el sistema dado por (2), esto es, en todos los puntos (x, y) que están adyacentes a un punto de red en la frontera, tendremos un sistema de $(n - 1)(m - 1)$ ecuaciones lineales con $(n - 1)(m - 1)$ incógnitas, siendo las incógnitas las aproximaciones $w_{i,j}$ de $u(x_i, y_j)$ para los puntos interiores de la red.

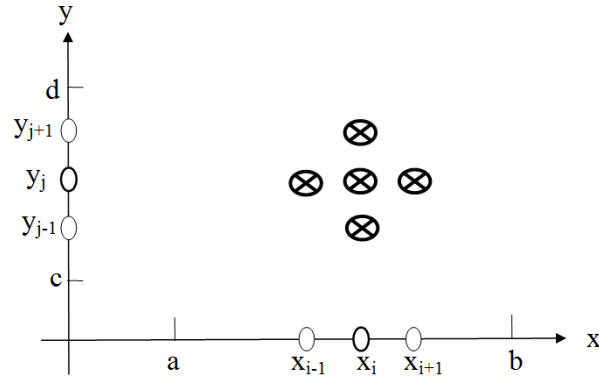


Figura 2. Porción de la red en forma de estrella.

El sistema lineal que contiene a estas incógnitas puede expresarse más eficientemente para los cálculos de la matriz si se introduce un renombramiento de los puntos interiores de la red [7]. Una manera recomendable de etiquetar estos puntos tomando $P_l = (x_i, y_j)$ y $w_l = w_{i,j}$, donde $l = i + (m - 1 - j)(n - 1)$ para cada $i = 0, 1, \dots, (n - 1)$ y $j = 0, 1, \dots, (m - 1)$ [4]. Esto, de hecho, reordena los puntos de red consecutivamente de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. Por ejemplo con $n = 4$ y $m = 5$ esta reordenación da por resultado una malla cuyos puntos se muestran en la figura (3). Marcando los puntos de esta manera asegura que el sistema necesario para determinar $w_{i,j}$ será una matriz banda con espesor de la banda lo más $2n - 1$, véase [11].

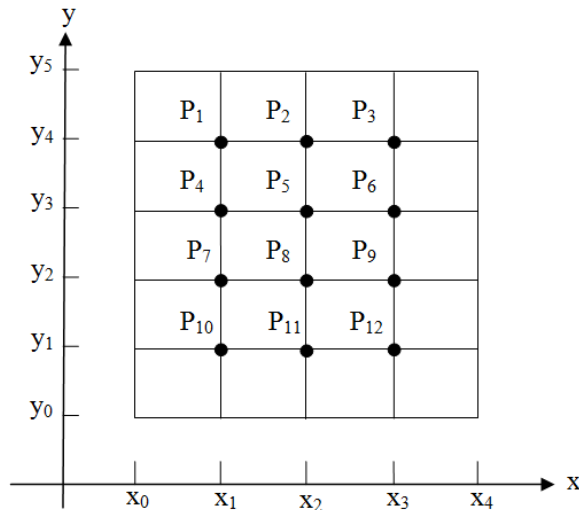


Figura 3. Puntos de una malla.

3 Problema particular

Considérese el problema de determinar la distribución estacionaria de calor en una lámina delgada de metal en forma de cuadrado con dimensiones de 0,5 metros por 0,5 metros, la cual se mantiene a 0°C en dos fronteras adyacentes mientras que el calor en las otras fronteras se va

incrementando linealmente de 0°C en una esquina a 100°C donde estos lados se encuentran Si ponemos los lados con condición de frontera cero a lo largo de los ejes x y y , el problema se expresará matemáticamente como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0,$$

para (x, y) en el conjunto $\mathbf{R} = \{(x, y) | 0 < x < 0,5, 0 < y < 0,5\}$ con las condiciones de frontera

$$u(0, y) = 0, u(x, 0) = 0, u(x, 0,5) = 200x, u(0,5, y) = 200y \tag{4}$$

Si $n = m = 4$, la malla del problema es la dada en la figura (4) y la ecuación de diferencia (2) es

$$4w_{i,j} - w_{i+1,j} - w_{i-1,j} - w_{i,j-1} - w_{i,j+1} = 0$$

para cada $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2, 3$,

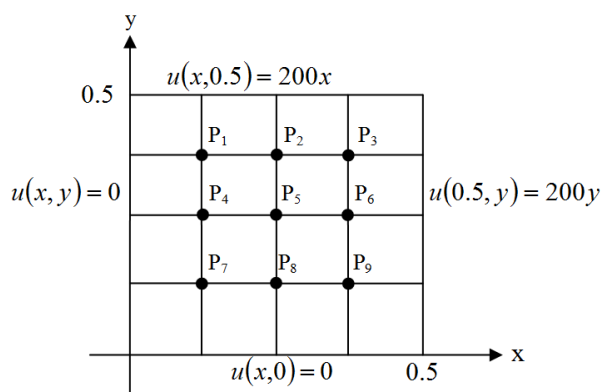


Figura 4. Malla del problema.

Expresando esto en términos de los puntos interiores de la red reetiquetados $w_i = u(P_i)$ implica que las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} 4w_1 - w_2 - w_4 &= w_{0,3} + w_{1,4}, \\ 4w_2 - w_3 - w_1 - w_5 &= w_{2,4}, \\ 4w_3 - w_2 - w_6 &= w_{4,3} + w_{3,4}, \\ 4w_4 - w_5 - w_1 - w_7 &= w_{0,2}, \\ 4w_5 - w_6 - w_4 - w_2 - w_8 &= 0, \\ 4w_6 - w_5 - w_3 - w_9 &= w_{4,2}, \\ 4w_7 - w_8 - w_4 &= w_{0,1} + w_{1,0}, \\ 4w_8 - w_9 - w_7 - w_5 &= w_{2,0}, \\ 4w_9 - w_8 - w_6 &= w_{3,0} + w_{4,1}, \end{aligned}$$

donde los lados de la derecha de las ecuaciones se obtienen de las condiciones de frontera [3]. De hecho, las condiciones dadas en (4) implican que

$$w_{1,0} = w_{2,0} = w_{3,0} = w_{0,1} = w_{0,2} = w_{0,3} = 0$$

$$w_{1,4} = w_{4,1} = 25, \quad w_{2,4} = w_{4,2} = 50 \quad \text{y}$$

$$w_{3,4} = w_{4,3} = 75.$$

El sistema lineal asociado con este problema tiene la forma

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 50 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix}$$

Los valores de w_1, w_2, \dots, w_9 que se encuentran aplicando el método de Gauss-Seidel a esta matriz, están dados como sigue:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$w_{i,j}$	18.75	37.50	56.25	12.50	25.00	37.50	6.25	12.50	18.75

Las respuestas son correctas, ya que la solución $u(x, y) = 400xy$ tiene

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, y) = \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y) \equiv 0,$$

así que el error de truncamiento es cero en cada paso.

El problema que consideramos tiene un tamaño de red de 0.125 en cada eje y requiere la solución de solamente un sistema lineal de 9×9 . Esto simplifica considerablemente la situación y no introduce los problemas computacionales que se presentan cuando el sistema es mucho más grande [4]. El algoritmo que se presenta a continuación utiliza el método de Gauss-Seidel para resolver el sistema lineal producido y permite diferentes tamaños de red en los ejes.

4 Algoritmo de diferencia finita para la ecuación de Poisson

Para aproximar la solución de la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y), \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d,$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u(x, y) &= g(x, y) && \text{si } x = a \text{ o } x = b \text{ y } c \leq y \leq d \\ y \quad u(x, y) &= g(x, y) && \text{si } y = c \text{ o } y = d \text{ y } a \leq x \leq b, \end{aligned}$$

se establece el siguiente algoritmo

Algoritmo

Entrada: puntos extremos a, b, c, d ;

$m, n \in \mathbb{Z}$;

tolerancia TOL ;

número máximo de iteraciones $LBOUND$.

Salida: aproximaciones $w_{i,j}$ a $u(x_i, y_j)$ para cada $i = 0, 1, \dots, n - 1$ y $j = 0, 1, \dots, m - 1$

o un mensaje de que el número de iteraciones fue excedido.

1. Calcular $h = (b - a)/n$;
 $k = (d - c)/m$.
 (Los pasos 2 y 3 construyen los puntos de red)
2. **para** $i = 1, 2, \dots, n - 1$ **hacer**
 calcular $x_i = a + ih$.
3. **para** $j = 1, 2, \dots, m - 1$ **hacer**
 calcular $y_j = c + jk$.
4. **para** $i = 1, 2, \dots, n - 1$ **hacer**
para $j = 1, 2, \dots, m - 1$ **hacer**
 calcular $w_{i,j} = 0$.
5. Calcular $\lambda = h^2/k^2$;
 $\mu = 2(1 + \lambda)$;
 $l = 1$.
6. (Los pasos del 7 al 20 realizan iteraciones de Gauss-Seidel)
mientras $l \leq LBOUND$ **hacer**
7. Calcular $z = (-h^2 f(x_1, y_{m-1}) + g(a, y_{m-1}) + \lambda g(x_1, d) + \lambda w_{1,m-2} + w_{2,m-1})/\mu$;
 $NORM = |z - w_{1,m-1}|$;
 $w_{1,m-1} = z$.
8. **para** $i = 2, \dots, n - 2$ **hacer**
 calcular $z = (-h^2 f(x_i, y_{m-1}) + \lambda g(x_i, d) + w_{i-1,m-1} + w_{i+1,m-1} + \lambda w_{i,m-2})/\mu$;
si $|w_{i,m-1} - z| > NORM$ **entonces**
 Calcular $NORM = |w_{i,m-1} - z|$;
 Calcular $w_{i,m-1} = z$.
9. Calcular $z = (-h^2 f(x_{n-1}, y_{m-1}) + g(b, y_{m-1}) + \lambda g(x_{n-1}, d) + w_{n-2,m-1} + \lambda w_{n-1,m-2})/\mu$;
si $|w_{n-1,m-1} - z| > NORM$ **entonces**
 Calcular $w_{n-1,m-1} = z$.
10. **para** $j = m - 2, \dots, 2$ **hacer** (Seguir los pasos 11, 12 y 13)
11. Calcular $z = (-h^2 f(x_1, y_j) + g(a, y_j) + \lambda w_{1,j+1} + \lambda w_{1,j-1} + w_{2,j})/\mu$;
si $|w_{1,j} - z| > NORM$ **entonces**
 Calcular $NORM = |w_{1,j} - z|$;
 Calcular $w_{1,j} = z$.

12. **para** $i = 2, \dots, n - 2$ **hacer**
 Calcular $z = (-h^2 f(x_i, y_j) + w_{i-1,j} + \lambda w_{i,j+1} + w_{i+1,j} + \lambda w_{i,j-1})/\mu$;
si $|w_{i,j} - z| > NORM$ **entonces**
 Calcular $NORM = |w_{i,j} - z|$;
 Calcular $w_{i,j} = z$.
13. Calcular $z = (-h^2 f(x_{n-1}, y_j) + g(b, y_j) + w_{n-2,j} + \lambda w_{n-1,j+1} + \lambda w_{n-1,j-1})/\mu$;
si $|w_{n-1,j} - z| > NORM$ **entonces**
 Calcular $NORM = |w_{n-1,j} - z|$;
 Calcular $w_{n-1,j} = z$.
14. Calcular $z = (-h^2 f(x_1, y_1) + g(a, y_1) + \lambda g(x_1, c) + \lambda w_{1,2} + w_{2,1})/\mu$;
si $|w_{1,1} - z| > NORM$ **entonces**
 Calcular $NORM = |w_{1,1} - z|$;
 Calcular $w_{1,1} = z$.
15. **para** $i = 2, \dots, n - 2$ **hacer**
 Calcular $z = (-h^2 f(x_i, y_1) + \lambda g(x_i, c) + w_{i-1,1} + \lambda w_{i,2} + w_{i+1,1})/\mu$;
si $|w_{i,1} - z| > NORM$ **entonces**
 Calcular $NORM = |w_{i,1} - z|$;
 Calcular $w_{i,1} = z$.
16. Calcular $z = (-h^2 f(x_{n-1}, y_1) + g(b, y_1) + \lambda g(x_{n-1}, c) + w_{n-2,1} + \lambda w_{n-1,2})/\mu$;
si $|w_{n-1,1} - z| > NORM$ **entonces**
 Calcular $NORM = |w_{n-1,1} - z|$;
 Calcular $w_{n-1,1} = z$.
17. **si** $NORM \leq TOL$ **entonces** (Seguir los pasos 18 y 19)
18. **para** $i = 1, \dots, n - 1$ **hacer**
para $j = 1, \dots, m - 1$ **hacer**
SALIDA $(x_i, y_j, w_{i,j})$.
19. **PARAR.** (Procedimiento completado satisfactoriamente.)
20. Calcular $l = l + 1$.
21. **SALIDA** ('Número máximo de iteraciones excedido');
PARAR.

5 Acerca de la estabilidad y convergencia

Aun cuando, por simplicidad, se ha incorporado el procedimiento iterativo de Gauss-Seidel en el algoritmo, es recomendable en general usar una técnica directa como la eliminación Gaussiana cuando el sistema es pequeño, del orden de 100 o menor, ya que la simetría y la propiedad de ser positiva definida asegurarán la estabilidad con respecto a errores de redondeo. En particular, la generalización del algoritmo de reducción de Crout, ver [5], es muy eficiente para resolver este sistema, ya que la matriz está en la forma tridiagonal simétrica por bloques

$$\begin{bmatrix} A_1 & C_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ C_1 & A_2 & C_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & C_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & C_{m-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & C_{m-1} & A_{m-1} \end{bmatrix}$$

con bloques cuadrados de tamaño $(n - 1)$ por $(n - 1)$.

Para sistemas muy grandes se recomienda usar un método iterativo, específicamente, el método SOR. El valor de w que es óptimo en esta situación viene del hecho de que cuando A se descompone en sus partes diagonal D y triangulares superior e inferior U y L ,

$$A = D - L - U,$$

y B es la matriz de Jacobi,

$$B = D^{-1}(L + U),$$

entonces el radio espectral de B es (ver [9])

$$\rho(B) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) + \left(\frac{\pi}{n}\right) \right].$$

El valor de w a usar es consecuentemente

$$w = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(B)]^2}} = \frac{4}{2 + \sqrt{4 - [\cos(\frac{\pi}{m}) + (\frac{\pi}{n})]^2}}.$$

Para una convergencia más rápida del procedimiento SOR, se puede incorporar una técnica de bloques en el algoritmo. Para una presentación de la técnica involucrada, ver [9].

6 Ejemplo

Considere la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = xe^y, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1,$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u(2, y) &= 2e^y, & 0 \leq y \leq 1 \\ u(x, 0) &= x, & u(x, 1) &= ex, & 0 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

Usaremos el algoritmo para aproximar la solución exacta $u(x, y) = xe^y$ con $n = 6$ y $m = 5$. El criterio de paro requerido en el paso 17 fue

$$|w_{i,j}^{(l)} - w_{i,j}^{(l-1)}| \leq 10^{-10},$$

para cada $i = 1, \dots, 5$, y $j = 1, \dots, 4$; así, la solución de la ecuación de diferencia se obtuvo con precisión y el procedimiento fue parado en $l = 61$. Los resultados, junto con los valores correctos, se presentan en la siguiente tabla

i	j	x_i	y_j	$w_{i,j}^{(61)}$	$u(x_i, y_j)$	$ u(x_i, y_j) - w_{i,j}^{(61)} $
1	1	0,3333	0,2000	0,40726	0,40713	$1,30 \times 10^{-4}$
1	2	0,3333	0,4000	0,49748	0,49727	$2,08 \times 10^{-4}$
1	3	0,3333	0,6000	0,60760	0,60737	$2,23 \times 10^{-4}$
1	4	0,3333	0,8000	0,74201	0,74185	$1,60 \times 10^{-4}$
2	1	0,6667	0,2000	0,81452	0,81427	$2,55 \times 10^{-4}$
2	2	0,6667	0,4000	0,99496	0,99455	$4,08 \times 10^{-4}$
2	3	0,6667	0,6000	1,2152	1,2147	$4,37 \times 10^{-4}$
2	4	0,6667	0,8000	1,4840	1,4837	$3,15 \times 10^{-4}$
3	1	1,0000	0,2000	1,2218	1,2214	$3,64 \times 10^{-4}$
3	2	1,0000	0,4000	1,4924	1,4918	$5,80 \times 10^{-4}$
3	3	1,0000	0,6000	1,8227	1,8221	$6,24 \times 10^{-4}$
3	4	1,0000	0,8000	2,2260	2,2255	$4,51 \times 10^{-4}$
4	1	1,3333	0,2000	1,6290	1,6285	$4,27 \times 10^{-4}$
4	2	1,3333	0,4000	1,9898	1,9891	$6,79 \times 10^{-4}$
4	3	1,3333	0,6000	2,4302	2,4295	$7,35 \times 10^{-4}$
4	4	1,3333	0,8000	2,9679	2,9674	$5,40 \times 10^{-4}$
5	1	1,6667	0,2000	2,0360	2,0357	$3,71 \times 10^{-4}$
5	2	1,6667	0,4000	2,4870	2,4864	$5,84 \times 10^{-4}$
5	3	1,6667	0,6000	3,0375	3,0369	$6,41 \times 10^{-4}$
5	4	1,6667	0,8000	3,7097	3,7092	$4,89 \times 10^{-4}$

Referencias

- [1] Antonietti, P. , Verani, M. & Zikatanov, L. *A two level method for mimetic finite difference discretizations of elliptic problems*, Computer and Matematics with applications, (2015), doi: 10.1016/j.camwa.2015.06.010.
- [2] Al-Jawary, M. & Hatif, S. *A semi-analitical iterative method for solving differential algebraic equations*, Ain Chams Engineering Journal, (1989), doi: 10.1016/j.asej.2017. 07.004.
- [3] Beiro da Veiga, L., Lopez, L. & Vacca, G. *Mimetic finite difference methods for Hamiltonian wave equations in 2D*, Computer and Matematics with applications, (2017), doi: 10.1016/j.camwa.2017.05.022.

- [4] Cacasús Acevedo, A. *Aplicación del método de diferencias finitas generalizadas a problemas de elasto-dinámica. (Tesis inédita de doctorado)*, E.T.S. de Ingenieros Industriales UNED, Madrid, España, 2011.
- [5] De la Fuente, J.L. *Técnicas de cálculo para sistemas de ecuaciones, programación lineal y programación entera: códigos en FORTRAN y C con aplicaciones de sistemas de energía eléctrica.*, Reverté, Madrid, España, 1997.
- [6] Fernández, L. A. *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*, Universidad de Cantabria, Cantabria, España, 2016.
- [7] Gosse, L. *Dirichlet-to-neumann mapping and finite-differences for anisotropic diffusion*, Computers and Fluids, **156**(2017), 58–65.
- [8] Quintanilla Murillo, J. *Métodos numéricos en diferencias finitas para la resolución de ecuaciones difusivas fraccionarias. (Tesis inédita de doctorado)*, Universidad de Extremadura, Badajoz, España, 2016.
- [9] Varga, R.S. *Matrix iterative analysis.*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, United State of America, 1962.
- [10] Wang, H., Liang, H., & Chai, Z. *Finite-difference lattice Boltzmann model for nonlinear convection-diffusion equations*, Applied Mathematics and Computation, **309**(2017), 334–349, doi: 10.1016/j.amc.2017.04.015.
- [11] Xue, G. & Zhang, L. *A new finite difference schemes for generalized Rosenau-Burgers equation*, Applied Mathematics and Computation, **222**(2013), 490–496, doi: 10.1016/j.amc.2013.07.052.
- [12] Zapata, M. U. & Itzá, R. *High-order implicit finite difference schemes for the two dimensional Poisson equation*, Applied Mathematics and Computation, **309**(2017), 222–244, doi: 10.1016/j.amc.2017.04.006.

Los números de Ramsey con componentes H -buena y secuencias simétricas

The Ramsey numbers with components H -good and simultaneous sequences

José Figueroa (jose3765@gmail.com)

Departamento de Química
Universidad Clodosbaldo Russián
Cumaná, Venezuela.

Felicia Villarroel (feliciavillarroel@gmail.com)

Departamento de Matemática
Universidad de Oriente
Cumaná, Venezuela.

Henry Ramírez (hlramirez6@hotmail.com)

Departamento de Higiene y Seguridad Laboral
Universidad Clodosbaldo Russián
Cumaná, Venezuela.

Juan Otero (jmotero746@gmail.com)

Departamento de Informática
Universidad Clodosbaldo Russián
Cumaná, Venezuela.

Resumen

Dado dos grafos G y H no vacío. El número de Ramsey $R(G, H)$ se define como el menor entero positivo n , tal que para algún grafo F que contiene una copia monocromática G' isomorfo a G o el complemento de F , contiene una copia monocromática H' isomorfo a H . En este trabajo, se presenta un método basado en la teoría combinatoria, y la definición de bosque lineal, para determinar un conjunto W de secuencias con $m + 1$ elementos de tamaño m cada una, con cada secuencias s_i se colorean los lados del menor de los grafos completo, $K_n = F \cup \overline{F}$. En segundo lugar, se realiza la demostración del teorema que resulta de la combinación de los grafos: rueda W_n para $n \geq 5$ y diamante. En este caso, se prueba que el número de Ramsey es $R(G, H) = n + 1$, además se demuestra la simetría y la k -baricentricidad monocromática del conjunto de secuencias.

Palabras y frases clave: teoría combinatoria, conjunto de secuencias simétricas, secuencias k -baricéntrica.

Abstract

Given two graphs G and H do not empty. The number of Ramsey $R(G, H)$ is defined as the minor positive integer n , such that for some graph F wich containing a monochromatic

Recibido 05/04/2019. Revisado 20/04/2019. Aceptado 28/08/2019.

MSC (2010): Primary 05C55; Secondary 05C15.

Autor de correspondencia: José Figueroa

copy G' isomorphic to G or the complement of F , contains a monochromatic copy H' isomorphic to H . In this work, we present a method based on the combinatorial theory, and the definition of linear forest, to determine a set W of sequences with $m + 1$ elements of size m each one, with each sequence s_i the sides of the minor complete graphs $K_n = F \cup \overline{F}$ are colored. In second place, the demonstration of the theorem wich result of the combination of the graphs: wheel W_n for $n \geq 5$ and diamond is done. In this case, we prove that the Ramsey number is $R(G; H) = n + 1$, furthermore we prove the symmetry and k -baricentricity monochromatic of the set of sequences.

Key words and phrases: combinatory theory, set of symmetric sequences, sequences k -baricentric sequences.

1 Introducción

En este artículo se consideran todos los grafos simples, finitos y sin dirección. Un grafo G , es un par de conjuntos (V, E) , denotado por $G = (V, E)$, donde V es un conjunto no vacío de elementos llamados vértices o nodos y E es un conjunto de pares no ordenado de elementos de V , llamados lados o aristas; si G no posee lazos ni lados múltiples es un grafo simple, el orden se denota por $|G|$. Un árbol, es un grafo conexo (para cualquier par de vértices diferentes existe un camino que los une) que no contiene ciclos y un bosque es un grafo no conexo cuyas componentes son árboles. Un camino P de longitud n que va desde un vértice u hasta un vértice v es una sucesión de vértices $(u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n = v)$ tal que $u_{i-1}u_i \in E(P)$, para cada i y se denota por P . Los vértices u y v son llamados los vértices extremos del camino P si todos los vértices restantes de P son vértices interiores. Se denotará el interior de un camino por $int(p)$, la longitud de un camino por $long(P)$, un árbol por T_n . Un grafo rueda (W_n), es un grafo con n vértices que se forma conectando un único vértice a todos los vértices de un ciclo $(n - 1)$. El grafo diamante es un grafo plano con 4 vértices y 5 lados y se denotará por $K_4 - l$, y el subgrafo de G inducido por lados de F , se denotará por $G[F]$. Un grafo F es un bosque lineal, si cada componente forma un camino. Un grafo completo es un grafo simple donde cada par de vértices está conectado por lados y se denotará por K_n . Un grafo G' es un subgrafo propio de F y el cual se denota por $G' \Delta F$. Un grafo F se llama independiente del par (G, H) si F no contiene un subgrafo isomorfo a G o su complemento \overline{F} no contiene un subgrafo isomorfo a H .

En 1994 Radziszowski y Xia [5], dieron un método sencillo y unificado para mostrar resultados más generales del número de Ramsey $R(C_3, G)$, donde G es un camino, ciclo o rueda. Zhou [9] da la prueba de $R(C_n, W_m) = 2m + 1$, para n impar y $m \geq 5n - 7$. Recientemente, Surahmat y Baskoro [6] demostraron, para cada $n \geq 3$, $R(P_n, W_4) = 2n - 1$ y $R(P_n, W_5) = 3n - 2$. Baskoro et. al. [1] y Chen et. al. [2] dieron la prueba para $R(P_n, W_6) = 2n - 1$, para todo $n \geq 6$, $R(P_n, W_7) = 3n - 2$, para todo $n \geq 7$ y en [7] Villaroel et. al. estudia un método algorítmico para el cálculo del número baricéntrico de Ramsey para el grafo estrella. En este artículo se presenta un método que permite calcular el menor de los grafos completos K_n , que contiene copias monocromáticas isomorfas a G o a H , es decir, los números de Ramsey $R(G, H)$, con G el grafo rueda W_n , para $n \geq 5$ y H el grafo diamante. En particular, se demostrará que G es bueno con respecto a H , además se probará la simetría y la k -baricentricidad monocromática.

2 Definiciones

En esta sección se presentan varias definiciones que se utilizarán para el desarrollo de este manuscrito.

Definición 1. Sea $s = \{a_i\}_{i=1}^{m-r} \cup \{b_j\}_{j=m-r+1}^m$ una secuencia finita, con $|s| = m$, $m > r$ y $r \geq 1$. Sean $\{a_i\}_{i=1}^{m-r}$ y $\{b_j\}_{j=m-r+1}^m$ dos subsecuencias finitas de s , donde $\{a_i\}_{i=1}^{m-r}$ representa un color y $\{b_j\}_{j=m-r+1}^m$ representa otro color, entonces se dice que s es una secuencia bicromática finita.

Definición 2. Sean dos secuencias monocromáticas $s = \{a_i\}_{i=1}^m$ y $w = \{b_j\}_{j=1}^m$ tal que $a_i \neq b_j$ en coloraciones. Se dice que s y w son simétricas, con respecto a las coloraciones $\{a_i\}_{i=1}^m$ y $\{b_j\}_{j=1}^m$, si $|s| = |w| = m$ y se denotará por $s \Delta w$.

Nótese, que $s \cap w = \phi$.

Definición 3. Sean $s_p = \{a_{pi}\}_{i=1}^{m-r} \cup \{b_{pj}\}_{j=m-r+1}^m$ y $s_u = \{a_{ui}\}_{i=1}^{m-l} \cup \{b_{uj}\}_{j=m-l+1}^m$, dos secuencias bicromáticas, tal que $s_p \neq s_u$, con $r = p - 1$ y $l = u - 1$, donde $\{a_{pi}\}_{i=1}^{m-r}$ y $\{a_{ui}\}_{i=1}^{m-l}$ representan el mismo color, con $|\{a_{pi}\}_{i=1}^{m-r}| > |\{a_{ui}\}_{i=1}^{m-l}|$ y $\{b_{pj}\}_{j=m-r+1}^m$ y $\{b_{uj}\}_{j=m-l+1}^m$ representa el otro color, con $|\{b_{uj}\}_{j=m-l+1}^m| > |\{b_{pj}\}_{j=m-r+1}^m|$. Decimos que s_p y s_u son simétricas con respecto a las coloraciones respectivas si satisface:

- 1) $|s_p| = |s_u|$
- 2) $|\{a_{pi}\}_{i=1}^{m-r}| = |\{b_{uj}\}_{j=m-l+1}^m|$
- 3) $|\{b_{pj}\}_{j=m-r+1}^m| = |\{a_{ui}\}_{i=1}^{m-l}|$

y se denotan por $s_p \Delta^2 s_u$.

Definición 4. Sea $s_p = \{a_{pi}\}_{i=1}^{m-r} \cup \{b_{pj}\}_{j=m-r+1}^m$ una secuencia bicromática, con $r = p - 1$. Se dice que s_p es simétrica sobre sí misma, con respecto a las coloraciones $\{a_{pi}\}_{i=1}^{m-r}$ y $\{b_{pj}\}_{j=m-r+1}^m$, si $|\{a_{pi}\}_{i=1}^{m-r}| = |\{b_{pj}\}_{j=m-r+1}^m|$ y se denotará por s_p^Δ .

Definición 5. Sea $s_k = \{a_{ki}\}_{i=1}^{m-k+1} \cup \{b_{kj}\}_{j=m-k+2}^m$ para todo $k \geq 2$, una colección de secuencias finitas, con cada $|s_k| = m$. Sean $\{a_{ki}\}_{i=1}^{m-k+1}$ y $\{b_{kj}\}_{j=m-k+2}^m$, para $k = \overline{2, m}$, dos subsecuencias finitas, donde $\{a_{ki}\}_{i=1}^{m-k+1}$ representa un color y $\{b_{kj}\}_{j=m-k+2}^m$ representa otro color, entonces se dice que s_k es una colección finita de secuencias bicromáticas internas.

Definición 6. Sea $W = \{s_1, s_2, \dots, s_{\alpha-1}, s_\alpha, s_{\alpha+1}, \dots, s_m, s_{m+1}\}$ un conjunto de secuencias, donde s_1 y s_{m+1} son secuencias monocromáticas y cada una de las secuencias $s_2, \dots, s_{\alpha-1}, s_\alpha, s_{\alpha+1}, \dots, s_m$ son secuencias bicromáticas internas. Decimos que:

- 1) W es un conjunto de secuencias simétricas con $|W|$ impar, si satisface las siguientes condiciones:
 - i) $W = \{s_1, s_2, \dots, s_{\alpha-1}, \} \cup \{s_\alpha\} \cup \{s_{\alpha+1}, \dots, s_m, s_{m+1}\}$
 - ii) $|\{s_1, s_2, \dots, s_{\alpha-1}, \}| = |\{s_{\alpha+1}, \dots, s_m, s_{m+1}\}|$
 - iii) $s_1 \Delta s_{m+1}$

$$\text{iv) } s_2 \Delta^2 s_m, \dots, s_{\alpha-1} \Delta^2 s_{\alpha+1}$$

$$\text{v) } s_p^\Delta$$

y se denota por $W \Delta_I$

2) W es un conjunto de secuencias simétrica con $|W|$ par, sí satisface las siguientes condiciones:

$$\text{i) } W = \{s_1, s_2, \dots, s_\alpha\} \cup \{s_{\alpha+1}, \dots, s_m, s_{m+1}\}$$

$$\text{ii) } |\{s_1, s_2, \dots, s_\alpha\}| = |\{s_{\alpha+1}, \dots, s_m, s_{m+1}\}|$$

$$\text{iii) } s_1 \Delta s_{m+1}$$

$$\text{iv) } s_2 \Delta^2 s_m, s_3 \Delta^2 s_{m-1}, \dots, s_\alpha \Delta^2 s_{\alpha+1}.$$

y se denota por $W \Delta_P$.

Definición 7. Sean G y H dos grafos distintos del vacío. Se dice que el grafo completo K_n contiene k -baricentricidad monocromática, si G es bueno con respecto a H y satisface la siguiente igualdad: $k = \frac{n(n-1)+2}{4}$, con n el número de vértices del grafo completo K_n resultante. Y además, se cumplen las siguientes condiciones:

1) Si, $|w|$ es un entero par, la k -baricentricidad puede ser par o impar.

2) Si, $|w|$ es un entero impar, seleccionemos el nuevo k' que es el mayor entero que sea menor que o igual a k , en este caso se considera k' como la parte entera o el piso de simetría.

Definición 8. Sean G y H dos grafos distintos del vacío. Sí para cada secuencia $s_i, \forall i = \overline{1, m+1}$ que colorean los lados del grafo completo K_n , se pueden extraer una copia $G' \Delta F$ isomorfa a G o una copia $H' \Delta \overline{F}$ isomorfa a H , entonces se dice que el grafo completo K_n contiene k -baricentricidad monocromática.

3 Método

En esta sección se dará un método que determina alguna clase de los números de Ramsey con componentes H -buena, basado en la Teoría de Grafo y la Teoría Combinatoria. Es oportuno señalar, que ya existen una gran cantidad de métodos en este estilo. Por ejemplo, en [8] se presenta un método que articula la Teoría de Órbitas con las constantes baricéntricas. En [3] se da un método matricial que relaciona a las constantes baricéntricas y la Teoría de Matrices, este método se implementó en el lenguaje de computación conocido como MatLab y recientemente en [4], se muestra un método que representa a los grafos divisores de cero.

Con el siguiente método, se determina alguna clase de los números de Ramsey con componentes H -bueno.

1) Considérese $n = \text{máx}\{|G|, |H|\}$, para formar el menor de los grafos completo de cardinalidad n , con este n se calcula la talla del K_n , con el valor m y dos colores diferentes $\{0, 1\}$ se calcula la cantidad de secuencias con repetición, es decir, $CR_m^2 = m + 1$, este número indica la cantidad de elementos del conjunto W formados por secuencias, s_i , para todo $i = \overline{1, m+1}$.

Sea $W = \{s_1, s_2, \dots, s_{\alpha-1}, s_\alpha, s_{\alpha+1}, \dots, s_{m+1}\}$, el conjunto de todas las posibles secuencias finitas formada con los dos colores, donde $|W|$ es de tamaño $m + 1$, y se usan para colorear

los lados del grafo completo K_n , y la longitud de cada s_i es igual a m . Luego se descompone el grafo completo K_n de acuerdo a la coloración que se haga con cada secuencia s_i , en dos subgrafos monocromáticos $K_n = F \cup \bar{F}$, donde el subgrafo F está coloreado por el cero o el complemento de F por el uno. En tal caso, si se colorea el grafo completo K_n con cada una de las secuencias s_i y no se logra encontrar en alguna de ella una copia monocromática $G' \Delta F$ isomorfa a G o una copia monocromática $H' \Delta \bar{F}$ isomorfa a H , entonces se debe incrementar el número de vértices en uno, es decir, $n \rightarrow n' = n + 1$ con este nuevo n' se buscará la nueva talla m' del nuevo grafo completo $K_{n'}$ y con un procedimiento similar se sigue el proceso, hasta que el grafo completo $K_{n'}$, coloreado con cada secuencia s_i para todo $i = \bar{1}, \bar{m} + \bar{1}$, se pueda extraer al menos una copia monocromática $G' \Delta F$ isomorfa a G o una copia monocromática $H' \Delta \bar{F}$ isomorfa a H . Luego, se procede a determinar la simetría y la k -baricentricidad monocromática del conjunto W , nótese que:

- 2) Sí, $|W|$ es impar. Considérese el conjunto de secuencias W , separadas en tres subconjuntos de secuencias, $W_1 = \{s_1, s_2, \dots, s_{\alpha-1}\}$, $W_2 = \{s_\alpha\}$ y $W_3 = \{s_{\alpha+1}, \dots, s_{m+1}\}$. Para los subconjuntos de secuencias W_1 y W_3 se tiene que, las secuencias s_1 y s_{m+1} son monocromáticas y simétricas dos a dos con respecto al tamaño de las coloraciones, donde $s_1 \cap s_{m+1} = \phi$. Cada uno de los subconjuntos de secuencias restantes de W_1 y W_3 , son secuencias bicromáticas internas, para cada $i \neq j$, ahora separando las secuencias bicromáticas internas de W_1 y W_3 en dos subsecuencias $\{a_{\alpha_i}\}$ y $\{b_{\alpha_j}\}$, se observa que $|\{a_{\alpha_i}\}|$ y $|\{b_{\alpha_j}\}|$ son distintas en tamaño. Para $i > j$, se tiene $|\{a_{\alpha_i}\}| > |\{b_{\alpha_j}\}|$ y para $j > i$, se tiene $|\{a_{\alpha_i}\}| < |\{b_{\alpha_j}\}|$, en tal caso, para $i \neq j$, se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\{a_{m_i}\}| = |\{b_{2_j}\}| \\ |\{a_{(m-1)_i}\}| = |\{b_{3_j}\}| \\ \vdots \\ |\{a_{(\alpha+1)_i}\}| = |\{b_{(\alpha-1)_j}\}| \\ \vdots \\ |\{a_{3_i}\}| = |\{b_{(m-1)_j}\}| \\ |\{a_{2_i}\}| = |\{b_{m_j}\}|. \end{array} \right.$$

Para la secuencia bicromática $W_2 = \{s_\alpha\} = \{a_{\alpha_i}\} \cup \{b_{\alpha_j}\}$, se separa en dos subsecuencias monocromáticas, se tiene $|W_2| = |\{a_{\alpha_i}\}| + |\{b_{\alpha_j}\}|$, para $i = j$. Las cardinalidades o los tamaños de coloraciones son iguales, es decir; $|\{a_{\alpha_i}\}| = |\{b_{\alpha_j}\}|$, luego W_2 , es simétrica en sí misma con respecto a las coloraciones.

$$\begin{array}{l} |\{0\}| = |\{1\}| \\ |\{0, 0\}| = |\{1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0\}| = |\{1, 1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, 0\}| = |\{1, 1, 1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, 0, 0\}| = |\{1, 1, 1, 1, 1\}| \\ \vdots \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0\}| = |\{1, 1, 1, \dots, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0\}| = |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0\}| = |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1\}| \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{aligned} |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots, 1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1\}|. \end{aligned}$$

Se puede concluir que todos los subconjuntos de secuencias W_1, W_2 y W_3 son simétricas dos a dos en tamaño con respecto a las coloraciones $\forall \alpha = \overline{1, m+1}$.

- 3) Sí $|W|$ es par. El conjunto de secuencias W , se separa en dos subconjuntos de secuencias, $W_1 = \{s_1, s_2, \dots, s_\alpha\}$ y $W_2 = \{s_{\alpha+1}, \dots, s_{m+1}\}$, en el cual los elementos de W_1 y W_2 satisfacen el caso 2), donde se señala que todas las secuencias son simétricas dos a dos con respecto a las coloraciones.
- 4) Por último la k -baricentricidad monocromática de cada secuencia s_i de W , está dada por $k = \frac{w_1+w_2}{2} = \frac{m+1}{2}$, para $m+1$ par, va a depender del número de vértices del grafo completo $K_{n'}$. Si $|W|$ es par o impar, tómesese k -elementos monocromáticos de cada secuencia s_i para todo $i = \overline{1, m+1}$ que contienen m elementos cada uno, estos k -elementos se pueden expresar como una suma k -baricéntrica, es decir, $0_1 + 0_2 + \dots + 0_k = k \cdot 0$ o $1_1 + 1_2 + \dots + 1_k = k \cdot 1$, donde el baricentro es 0 o 1. Por lo tanto, $K_{n'}$ contiene k -baricentricidad monocromática.

4 Ejemplo de aplicación del método

Ejemplo 1. Sean G el grafo rueda, para $n = 5$, con $|W_5| = 6$ y H el grafo diamante. Sea $n = \max\{|G|, |H|\} = \max\{6, 4\} = 6$ y $m = \frac{6(6-1)}{2} = 15$.

Cantidad de secuencias con repetición.

$$CR_{15}^2 = 16.$$

Conjunto de secuencias (s_i).

$$W = \begin{cases} s_1 = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\} \\ s_2 = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1\} \\ s_3 = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1\} \\ s_4 = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1\} \\ \vdots \\ s_{13} = \{0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} \\ s_{14} = \{0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} \\ s_{15} = \{0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} \\ s_{16} = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} \end{cases}$$

Se colorean los lados del K_6 con cada secuencia $s_i \forall i = \overline{1, 16}$, y de cada coloración que se realice a los lados del K_6 , siempre se puede extraer una copia monocromática $G' \Delta F$ isomorfa a G o una copia monocromática $H' \Delta \overline{F}$ isomorfa a H . Si se considera la secuencia s_{10} , para colorear los lados del K_6 , como se observa en la Figura 1.

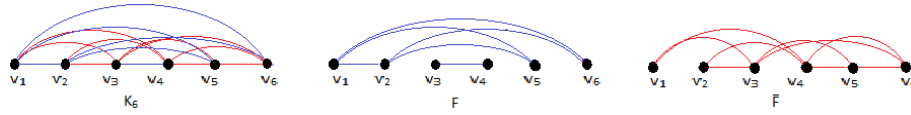


Figura 1: El K_6 coloreado con s_{10} , a F de color azul \bar{F} de color rojo.

Observe, que es posible extraer una copia $H' \Delta \bar{F}$ isomorfa a H , ver Figura 2.

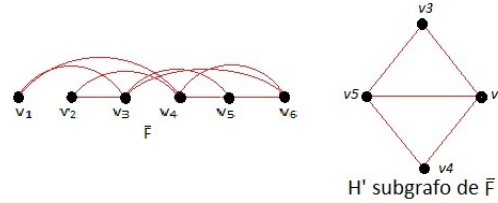


Figura 2: Los grafos \bar{F} y una copia monocromática $H' \Delta \bar{F}$ isomorfa a H .

Por lo tanto, $R(G, H) = 6$.

Como $|W|$ es par. Para $i > j$, se tiene $|\{a_{\alpha_i}\}| > |\{b_{\alpha_j}\}|$ y para $j > i$, se tiene $|\{a_{\alpha_i}\}| < |\{b_{\alpha_j}\}|$. En tal caso, para $i \neq j$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 |\{0\}| &= |\{1\}| \\
 |\{0, 0\}| &= |\{1, 1\}| \\
 |\{0, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1\}| \\
 |\{0, 0, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, 1\}| \\
 |\{0, 0, 0, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, 1, 1\}| \\
 &\vdots \\
 |\{0, 0, 0, \dots, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1\}| \\
 |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1\}| \\
 |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1\}|
 \end{aligned}$$

se puede decir que todos los subconjuntos de secuencias W_1 y W_2 son simétricas dos a dos en tamaño con respecto a las coloraciones $\forall \alpha = \overline{1, 16}$.

La k -baricentricidad $k = \frac{6(6-1)+2}{4} = 8$, luego $0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 8 \star 0$ y $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8 \star 1$, el conjunto de secuencias es 8-baricéntico monocromático.

En el siguiente teorema es suficiente probar que el complemento de F contiene al menos una copia monocromática $H' \Delta \bar{F}$ isomorfa a H , es decir, lo que se prueba es que G es bueno con respecto a H , además se prueba la simetría del conjunto W de secuencias y la k -baricentricidad monocromática.

Teorema 1. Sean $G = W_n$ el grafo rueda, para $n \geq 5$ y H el grafo diamante. Si F contiene una copia isomorfa a G o el complemento de F contiene una copia isomorfa a H , entonces

$R(G, H) = n + 1$. Además, el conjunto de secuencias W es simétrico dos a dos y contiene k -baricentricidad monocromática dada por $k = \frac{n(n-1)+2}{4}$.

Demostración. Sea un grafo F con $n + 1$ vértices y supóngase que la rueda W_n contiene un camino P_n de longitud n , que no está contenido en F . Sea P un camino con k vértices de máxima longitud en F , con a_1 y a_2 vértices extremos de P en F . Observe que $|V(P)| \leq k$, con $n \geq k$. Sea $X = V(F) \setminus V(P)$, y supóngase que el subgrafo inducido generado por X , denotado por $F[X] = F[V(F) \setminus V(P)]$ contiene un camino M de máxima longitud, con vértices extremos b_1 y b_2 .

Considérese los vértices extremos de los caminos $P\Delta F$ y $M\Delta F[X]$ respectivamente, es claro que los lados que se forman con los extremos $\{a_1a_2\} \notin E(F)$ y $\{b_1b_2\} \notin E(F[X])$.

Para ver la prueba de esto, supóngase que el lado $\{a_1a_2\} \in E(F)$, luego se forma el camino cerrado $A = \{a_1a_2\} \cup P$, de $long(A) = k$ y $|A| = k$, esto implica que, $long(A) > long(P)$, esto contradice el hecho que P es el camino de máxima longitud en F , luego el lado $\{a_1a_2\} \notin E(F) \Rightarrow \{a_1a_2\} \in E(\overline{F})$. Un razonamiento similar ocurre, si supone que el lado $\{b_1b_2\} \in E(F[X])$, entonces $long(B) > long(M)$ es una contradicción, luego $\{b_1b_2\} \in E(\overline{F[X]})$. Como M es el camino de máxima longitud en $F[X]$, P es el camino de máxima longitud en F , entonces $P\Delta F$, $M\Delta F[X]$ y $F[X]\Delta F$ indican que $long(M) \leq long(P)$. Como $|V(F)| = n + 1$ y la longitud del camino P en F es $\leq k$, entonces existe al menos un vértice $z = w \notin V(P) \cup V(M) \Rightarrow w \in V(F) \setminus (V(P) \cup V(M))$. Evidentemente los lados que se forman con z , y los extremos de $P\Delta F$ y $M\Delta F[X]$, no, están en $E(F)$, para cada $z \in V(F) \setminus (V(P) \cup V(M))$, de no ser así, P y M dejarían de ser los caminos de máxima longitud en F y $F[X]$, esto indica que w no puede ser adyacente a los vértices extremos de P y M , lo que implica que cualquier lado que se forme con w esta en \overline{F} . Se presentan los siguientes casos:

1) $long(P) \geq 3$ y $long(M) \geq 1$.

En este caso $int(P) \geq 2$. Supóngase lo contrario que $|int(P)| < 2 \Rightarrow |int(P)| = 1 \Rightarrow long(P) = 2$, esto contradice el hecho que $long(P) \geq 3$. Por lo tanto, $|int(P)| \geq 2$. Luego, X debe tener al menos dos vértices, como $X = F \setminus P \Rightarrow V(X) = V(F) \setminus V(P)$ y de la teoría de conjunto se tiene,

$$V(F) = (V(F) \setminus V(P)) \cup V(P)$$

$$|V(F)| = |(V(F) \setminus V(P))| + |V(P)| - |(V(F) \setminus V(P)) \cap V(P)|,$$

pero como $(V(F) \setminus V(P)) \cap V(P) = \emptyset \Rightarrow |(V(F) \setminus V(P)) \cap V(P)| = |\emptyset| = 0$. Así, que $V(X) = |V(F)| - |V(P)|$. Por otro lado, se tiene que $|V(F)| = n + 1$ y $|V(P)| \leq k$, donde $k = n - 1$, con $n \geq 5$.

$$|V(X)| = |V(F)| - |V(P)|, \text{ pues } |V(P)| \leq k \Rightarrow -|V(P)| \geq -k$$

luego $|V(X)| \geq 2$, contiene al menos dos vértices, esto idica que Y debe tener al menos cero vértices y pueden presentarse tres posibilidades:

- Si, $|V(X)| = |V(M)|$, lo que implica

$$\begin{aligned} |V(Y)| &= |V(X)| - |V(M)| \\ &= |V(M)| - |V(M)| \\ &= 0, \text{ así } Y = \emptyset. \end{aligned}$$

- Si, $|V(X)| > |V(M)|$.

$$\begin{aligned} |V(Y)| &= |V(X)| - |V(M)| \\ &> |V(M)| - |V(M)| \\ &> 0, \text{ en consecuencia } |V(Y)| > 0 \Rightarrow Y \neq \emptyset. \end{aligned}$$

- Si, $|V(X)| < |V(M)|$.

$$\begin{aligned} |V(Y)| &= |V[X]| - |V(M)| \\ &< |V(M)| - |V(M)| \\ &= 0, \end{aligned}$$

$|V(X)| < 0$, contradicción, pues no puede existir ningún subgrafo con cardinalidad de sus vértices negativa, lo cual contradice que M es el camino de máxima longitud en $F[X]$.

1.1) $long(M) = 1$.

- Si, $long(M) = 1$ y $|V(M)| = 2$.

Luego, con los vértices extremos de P y los vértices extremos de X se forman los lados $\{a_1a_2\}, \{a_1b_1\}, \{a_1b_2\}, \{a_2b_1\}, \{a_2b_2\}$, lo cual resulta el diamante en el complemento de \bar{F} .

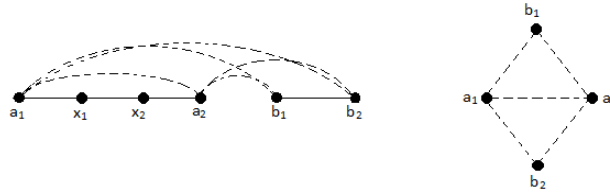


Figura 3: Los grafos: F y una copia $H' \Delta \bar{F}$ isomorfa a H .

1.2) $long(M) = 0$.

- Si, $log(M) = 0$ y $|V(M)| = 2$.

sea $x_1, x_2 \in int(P)$ tales que los lados $\{a_1x_1\}, \{x_1x_2\}, \{x_2a_2\} \in E(F)$, no pueden ser adyacentes a los vértices extremos M , porque no se cumpliría la regla y M dejaría de ser el camino de máxima longitud en $F[X]$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, con los vértices interiores de P y los extremos de M se forman los lados $\{x_1b_1\}, \{x_1b_2\}, \{x_2b_1\}, \{x_2b_2\}, \{b_1b_2\}$, resulta el diamante en el complemento de F .

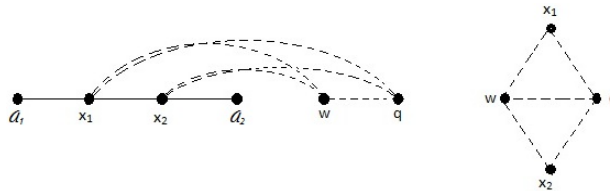


Figura 4: Los grafos: F y una copia $H' \Delta \bar{F}$ isomorfa a H .

- Si, $\log(M) = 0$ y $|V(M)| = 1$, entonces debe existir al menos un vértice w en Y .

$$\begin{aligned} |V(Y)| &= |V(F)| - |V(P)| - |V(M)| \\ |V(Y)| &\geq n + 1 - n + 1 - 1 = 1, \end{aligned}$$

en consecuencia $|V(Y)| \geq 1$, Y contiene al menos un vértice, sea w el vértice en Y . Por lo tanto, con el vértice w en Y , el vértice q en M , un vértice extremo en P y un vértice en el interior de P , se forma el diamante en el complemento de F .

Los demás casos se prueban análogos a el caso: 1.

2) $\log(P) \geq 2$ y $\log(M) \leq 2$.

3) $\log(P) \leq 1$.

- 4) Si, $\log(P) = 0 \Rightarrow |V(P)| = 1$, entonces F está formado unicamente por vértices aislados. Luego, X debe tener al menos cinco vértices.

$$\begin{aligned} |V(X)| &= |V(F)| - |V(P)| \\ |V(X)| &\geq n + 1 - 1 = n, \text{ para } n \geq 5 \\ |V(X)| &\geq 5 \end{aligned}$$

Por tanto, X tiene al menos cinco vértices aislados, con los vértices de X se forma el $K_4 - l$ en \overline{F} .

Se ha probado que G es buena con respecto a H .

Ahora, se probará que el conjunto W de secuencias es simétrico dos a dos. Suelen presentarse dos casos:

- a) Sí, $|W|$ es impar.

De la primera parte de la Definición 7, se separa el conjunto de secuencias W en tres subconjuntos de secuencias, $W_1 = \{s_1, s_2, \dots, s_{\alpha-1}\}$, $W_2 = \{s_\alpha\}$ y $W_3 = \{s_{\alpha+1}, \dots, s_{m+1}\}$. Por la Definición 2, los subconjuntos de secuencias W_1 y W_3 , se tiene que las secuencias s_1 y s_{m+1} son monocromáticas y simétricas dos a dos con respecto a el tamaño de las coloraciones. Por la Definición 3, el resto de los elementos de los subconjuntos de secuencias W_1 y W_3 , son bicromáticas, para cada $i \neq j$, observe que las cardinalidades de las subsecuencias $|\{a_{\alpha_i}\}|$ y $|\{b_{\alpha_j}\}|$ son distintas en tamaños de coloraciones. Para $i > j$, se tiene $|\{a_{\alpha_i}\}| > |\{b_{\alpha_j}\}|$ y para $j > i$, se tiene $|\{a_{\alpha_i}\}| < |\{b_{\alpha_j}\}|$, en tal caso, para $i \neq j$, se tiene la Definición 5 una colección finita de secuencias bicromáticas $s_k = \{a_{k_i}\}_{i=1}^{m-k+1} \cup \{b_{k_j}\}_{j=m-k+2}^m$, para todo $k = \overline{2, m}$, resulta:

$$\left\{ \begin{aligned} s_2 &= \{a_{2_i}\}_{i=1}^{m-1} \cup \{b_{2_j}\}_{j=m}^m \\ s_3 &= \{a_{3_i}\}_{i=1}^{m-2} \cup \{b_{3_j}\}_{j=m-1}^m \\ &\vdots \\ s_{\alpha-1} &= \{a_{(\alpha-1)_i}\}_{i=1}^{m-\alpha+2} \cup \{b_{(\alpha-1)_j}\}_{j=m-\alpha+3}^m \\ s_\alpha &= \{a_{(\alpha)_i}\}_{i=1}^{m-\alpha+1} \cup \{b_{(\alpha)_j}\}_{j=m-\alpha+2}^m \\ s_{\alpha+1} &= \{a_{(\alpha+1)_i}\}_{i=1}^{m-\alpha} \cup \{b_{(\alpha+1)_j}\}_{j=m-\alpha+1}^m \\ &\vdots \\ s_{m-1} &= \{a_{(m-1)_i}\}_{i=1}^2 \cup \{b_{(m-1)_j}\}_{j=3}^m \\ s_m &= \{a_{m_i}\}_{i=1}^1 \cup \{b_{m_j}\}_{j=2}^m. \end{aligned} \right.$$

Luego de la teoría de conjunto se tiene que

$$|s_k| = |\{a_{k_i}\}_{i=1}^{m-k+1}| + |\{b_{k_j}\}_{j=m-k+2}^m| - |\{a_{k_i}\}_{i=1}^{m-k+1} \cap \{b_{k_j}\}_{j=m-k+2}^m|$$

como $\{a_{k_i}\}_{i=1}^{m-k+1} \cap \{b_{k_j}\}_{j=m-k+2}^m = \emptyset \Rightarrow |\{a_{k_i}\}_{i=1}^{m-k+1} \cap \{b_{k_j}\}_{j=m-k+2}^m| = 0$, para todo $k = \overline{2, m}$, resulta: $|s_k| = |\{a_{k_i}\}_{i=1}^{m-k+1}| + |\{b_{k_j}\}_{j=m-k+2}^m|$.

Por tanto, se tiene para todo $k = \overline{2, m}$ que:

$$\left\{ \begin{array}{l} |s_2| = |\{a_{2_i}\}_{i=1}^{m-1}| + |\{b_{2_j}\}_{j=m}^m| \\ |s_3| = |\{a_{3_i}\}_{i=1}^{m-2}| + |\{b_{3_j}\}_{j=m-1}^m| \\ \vdots \\ |s_{\alpha-1}| = |\{a_{(\alpha-1)_i}\}_{i=1}^{m-\alpha+2}| + |\{b_{(\alpha-1)_j}\}_{j=m-\alpha+3}^m| \\ |s_\alpha| = |\{a_{(\alpha)_i}\}_{i=1}^{m-\alpha+1}| + |\{b_{(\alpha)_j}\}_{j=m-\alpha+2}^m| \\ |s_{\alpha+1}| = |\{a_{(\alpha+1)_i}\}_{i=1}^{m-\alpha}| + |\{b_{(\alpha+1)_j}\}_{j=m-\alpha+1}^m| \\ \vdots \\ |s_{m-1}| = |\{a_{(m-1)_i}\}_{i=1}^2| + |\{b_{(m-1)_j}\}_{j=3}^m| \\ |s_m| = |\{a_{m_i}\}_{i=1}^1| + |\{b_{m_j}\}_{j=2}^m|. \end{array} \right.$$

Resulta:

$$\begin{aligned} |\{a_{m_i}\}_{i=1}^1| &= |\{b_{2_j}\}_{j=m}^m|, |\{a_{(m-1)_i}\}_{i=1}^2| = |\{b_{3_j}\}_{j=m-1}^m|, \dots, \\ |\{a_{(\alpha+1)_i}\}_{i=1}^{m-\alpha}| &= |\{b_{(\alpha-1)_j}\}_{j=m-\alpha+3}^m|, \dots, |\{a_{3_i}\}_{i=1}^{m-2}| = |\{b_{(m-1)_j}\}_{j=3}^m|, \\ |\{a_{2_i}\}_{i=1}^{m-1}| &= |\{b_{m_j}\}_{j=2}^m|. \end{aligned}$$

Por la Definición 4 el subconjunto W_2 de secuencia es simétrica en si misma con respecto a las coloraciones. Observe que.

$$\begin{aligned} |\{0\}| &= |\{1\}| \\ |\{0, 0\}| &= |\{1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, 1, 1\}| \\ &\vdots \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1\}| \\ &\vdots \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots, 1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1\}| \end{aligned}$$

Con este resultado, se deduce que todas las secuencias son simétricas dos a dos en tamaño con respecto a las coloraciones.

Ahora, considérese las secuencias desde s_1 hasta s_m , y desde s_2 hasta s_{m+1} , todas de longitud m , para formar las matrices W' y W'' ambas de orden $m \times m$. Nótese, que las matrices W' y W'' son simétricas en el sentido usual de matrices, es decir, $(W')^t = W'$ y $(W'')^t = W''$. Como W' y W'' son matrices simétricas, evidentemente la suma es simétrica, es decir, $(W' + W'')^t = W' + W''$.

Por otro lado, el producto de W' por W'' también resulta una matriz simétrica. En efecto, sean $W' = [a_{ik}]$ y $W'' = [b_{kj}]$ simétricas. Nótese, que $W' \neq W''$ y $W' \cdot W'' \neq W'' \cdot W'$, luego $W' \cdot W'' = [a_{ik}] \cdot [b_{kj}] = [c_{ij}]$, donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{im}b_{mj}$, entonces

$$\begin{aligned} ([c_{ij}]^t &= (\sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj})^t \\ &= (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{im}b_{mj})^t \\ &= (a_{i1}b_{1j})^t + (a_{i2}b_{2j})^t + (a_{i3}b_{3j})^t + \dots + (a_{im}b_{mj})^t \\ &= (b_{1j})^t(a_{i1})^t + (b_{2j})^t(a_{i2})^t + (b_{3j})^t(a_{i3})^t + \dots + (b_{mj})^t(a_{im})^t \\ &= b_{j1}a_{1i} + b_{j2}a_{2i} + b_{j3}a_{3i} + \dots + b_{jm}a_{mi}, \\ &= [c_{ji}] \end{aligned}$$

Por tanto, el producto es simétrico.

b) Sí, $|W|$ es par.

Por el ítem 2) de la Definición 7, el conjunto de secuencias W , se separa en dos subconjuntos de secuencias, de la forma $W_1 = \{s_1, s_2, \dots, s_\alpha\}$ y $W_2 = \{s_{\alpha+1}, \dots, s_{m+1}\}$, con un razonamiento similar a los casos 1.1) y 1.2), cuando $|W|$ es impar, los elementos de los subconjuntos W_1 y W_2 satisfacen las mismas condiciones cuando $|W|$ es par. Así todas las secuencias son simétricas dos a dos con respecto a las coloraciones.

Ahora, se probará la k -baricentricidad.

- Sí, $|W|$ es impar, es válida la condición presente en el ítem 2, de la Definición 8, o lo que equivale al piso de simetría, es decir.

$$\begin{aligned} k &= \frac{|W_1| + |W_2| + |W_3|}{2} \\ &= \frac{\alpha - 1 + 1 + m + 1 - \alpha}{2} \\ &= \frac{m + 1}{2} \\ &= \frac{\frac{n(n-1)}{2} + 1}{2} \\ &= \frac{n(n-1) + 2}{4}. \end{aligned}$$

- Sí, $|W|$ es par, y del ítem 1 de la Definición 8.

$$k = \frac{|w_1| + |w_2|}{2} = \frac{\alpha + m + 1 - \alpha}{2} = \frac{m + 1}{2} = \frac{n(n-1) + 2}{4}.$$

Por tanto, se ha demostrado que el grafo completo K_n contiene k -baricentricidad monocromática. Por lo tanto, con este último resultado se ha demostrado el teorema. \square

Referencias

- [1] Baskoro, E.T. *The Ramsey number of paths and small wheels*. J. Indones. Math. Soc. (MIH-MI). **1** (2007), 13–16
- [2] Chen, Y.; Zhang, Y.; and Zhang, K. *The Ramsey number paths, versus wheels*. Discret Mathematics. **290** (2005), 85–87.
- [3] Otero, J. *Un método matricial para el cálculo de las constantes de Davenport y Olson k -baricéntricas*. Tesis de Maestría. Universidad de Oriente. Venezuela. 2011
- [4] Otero, J; Salazar, J; and Villarroel, F. *Representación de grafos divisores de cero para anillos*. Divulgaciones Matemáticas. **19**(2) (2018), 44–51.
- [5] Radziszowski, S. P.; and Xia, J. *Paths, cycles and wheels in graphs without antitriangles*. Australasian Journal of Combinatorics. **9** (1994), 221–232.
- [6] Surahmat and Baskoro, E.T. *On the Ramsey number of path or star versus W_4 or W_5* . Proc. Twelfth Australsian Workshop on Combinatorial Algorithms, Bandung, Indonesia. **14-17** (2001). 174–179.
- [7] Villarroel, F.; Figueroa, J.; Márquez, H. and Anselmi, A. *Un método algorítmico para el cálculo del número baricéntrico de Ramsey para el grafo estrella*. Bol.soc. Paran. Mat.3s. **36** (2018) 169–183.
- [8] Villarroel, F. *La constante de olson k -baricéntrica y un teorema inverso de Erds-Ginzburg-Ziv*. Tesis Doctoral. Universidad Central de Venezuela. 2008.
- [9] Zhou, H. L. *The Ramsey number of an odd cycles with respect to a wheel in chinese*. Journal of Mathematics, Shuxu Zazhi. **15** (1995), 119–120.

An application of an inequality of J. M. Aldaz

Una aplicación de una desigualdad de J. M. Aldaz

Mohamed Akkouchi (akkm555@yahoo.fr)

Department of Mathematics, Cadi Ayyad University
Faculty of Sciences-Semlalia, Av. Prince my Abdellah, B.P. 2390
Marrakech - MAROC (Morocco)

Abstract

The aim of this paper is to give a new proof that Hölder inequality is implied by the Cauchy-Schwarz inequality. Our proof is short and is based on the use of an inequality obtained by J. M. Aldaz in the paper: A stability version of Hölder's inequality, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 343, 2(2008), 842–852.

Key words and phrases: Inequalities, Young's inequality, Cauchy-Schwarz inequality, Hölder's inequality.

Resumen

La finalidad de este artículo es dar una nueva demostración de que la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica las desigualdades de Hölder. Para establecer nuestro resultado, utilizamos una desigualdad obtenida por J. M. Aldaz en su artículo: A stability version of Hölder's inequality, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 343, 2 (2008), 842–852.

Palabras y frases clave: Desigualdades, desigualdad de Young, desigualdad de Cauchy-Schwarz, desigualdad de Hölder.

1 Introduction

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ be a measure space (μ is a positive measure). For all measurable functions $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ on Ω , we recall the Hölder's inequality:

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \forall p, q \geq 1 \text{ with } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (H)$$

If $p = q = 2$ then we obtain the Cauchy-Schwarz inequality:

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |g|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (C.S)$$

Their discrete versions are respectively, given by:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right]^{\frac{1}{q}} := \|x\|_p \|y\|_q, \quad (H)_d$$

and

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}} := \|x\|_2 \|y\|_2, \quad (C.S)_d$$

for all positive integer n and all vectors $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, where the field \mathbb{K} is real or complex.

Easily, we have $(H) \implies (C.S)$.

It is natural to raise the question: is the converse true?

Many connections between classical discrete inequalities were investigated in the book [8], where in particular the equivalence $(H)_d \iff (C.S)_d$ was deduced through several intermediate results.

Also, we notice that A. W. Marshall and I. Olkin pointed out in their book [7] that the Cauchy-Schwarz inequality implies Lyapunov's inequality which itself implies the arithmetic-geometric mean inequality. Their discussions led to the conclusions that, in a sense, the arithmetic-geometric mean inequality, Hölder's inequality, the Cauchy-Schwarz inequality, and Lyapunov's inequality are all equivalent [7, p. 457].

In 2006, Y-C Li and S-Y Shaw [6] gave a proof of Hölder's inequality by using the Cauchy-Schwarz inequality. Their method lies on the fact that the convexity of a function on an open and finite interval is equivalent to continuity and midconvexity.

In 2007, the equivalence between the integral inequalities (H) and $(C - S)$ was studied by C. Finol and M. Wójtowicz in [4]. They gave a proof that $(C - S)$ implies (H) by using density arguments, induction and the conclusions were obtained after three steps of proof.

For many other results concerning to the implication $(C - S) \implies (H)$ in the discrete case, the reader is invited to see for instance [4, 5, 6, 7, 8].

Recently (see [1]), the author gave a proof of the implication $(C - S) \implies (H)$ by using an improvement of Young's inequality.

The aim of this paper is to provide a new (and short) proof of the implication $(H) \implies (C.S)$. Our method is quite different from those used in [6] and [4]. Our method is based on the following result of J. M. Aldaz (see [2]).

Theorem 1.1. *Let $1 < p < \infty$ and let $q = \frac{p}{p-1}$ be its conjugate exponent. If $f \in L^p$, $g \in L^q$, $\|f\|_p, \|g\|_q > 0$, and $1 < p \leq 2$, then*

$$\|f\|_p \|g\|_q \left(1 - \frac{1}{p} \left\| \frac{|f|^{p/2}}{\|f\|_p^{p/2}} - \frac{|g|^{q/2}}{\|g\|_q^{q/2}} \right\|_2^2 \right)_+ \leq \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \left(1 - \frac{1}{q} \left\| \frac{|f|^{p/2}}{\|f\|_p^{p/2}} - \frac{|g|^{q/2}}{\|g\|_q^{q/2}} \right\|_2^2 \right),$$

while if $2 \leq p < \infty$, the terms $\frac{1}{p}$ and $\frac{1}{q}$ exchange their positions in the preceding inequalities.

In Theorem 1.1, $t_+ = \max\{t, 0\}$ for any real number t . As a consequence of Theorem 1.1, we conclude the following inequality:

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q \left(1 - \frac{1}{\max\{p, q\}} \left\| \frac{|f|^{\frac{p}{2}}}{\|f\|_p^{\frac{p}{2}}} - \frac{|g|^{\frac{q}{2}}}{\|g\|_q^{\frac{q}{2}}} \right\|_2^2 \right), \quad (1)$$

for all $f \in L^p$, $g \in L^q$, $\|f\|_p, \|g\|_q > 0$, and for all $1 < p < \infty$ with $q = \frac{p}{p-1}$ is its conjugate exponent.

2 Proof of the implication: $(C - S) \implies (H)$

We avoid the trivial cases, so we suppose that $1 < p, q$ with $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. We suppose also that $\|f\|_p \neq 0$ and $\|g\|_q \neq 0$.

We set $u = \frac{|f|^{\frac{p}{2}}}{\|f\|_p^{\frac{p}{2}}}$ and $v = \frac{|g|^{\frac{q}{2}}}{\|g\|_q^{\frac{q}{2}}}$, then u and v are unit vectors in the real Hilbert space $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. We recall that the inner product of $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ is given by

$$\langle f | g \rangle := \int_{\Omega} f(x)g(x)d\mu(x),$$

for all $f, g \in L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

According to the inequality (1) and the usual Cauchy-Schwarz inequality in the real Hilbert space $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, we have successively,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)g(x)|d\mu(x) &\leq \|f\|_p \|g\|_q \left(1 - \frac{1}{\max\{p, q\}} \|u - v\|^2\right) \\ &= \|f\|_p \|g\|_q \left(1 - \frac{1}{\max\{p, q\}} (\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2 \langle u | v \rangle)\right) \\ &= \|f\|_p \|g\|_q \left(1 - \frac{2}{\max\{p, q\}} \langle u | v \rangle\right) \\ &\leq \|f\|_p \|g\|_q \left(1 - \frac{2}{\max\{p, q\}}\right) = \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned} \tag{2}$$

This end the proof.

Remark 2.1. 1. The inequality (2) shows that the equality in Holder's inequality holds if and only if

$$\frac{|f|^{\frac{p}{2}}}{\|f\|_p^{\frac{p}{2}}} = \frac{|g|^{\frac{q}{2}}}{\|g\|_q^{\frac{q}{2}}} \quad \mu - \text{a.e.}$$

That is $|f|^p |g|^q = |g|^q |f|^p$, μ -a.e. on Ω .

2. In [1], for all $f \in L^p \setminus \{0\}$ and all $g \in L^q \setminus \{0\}$, the following inequality was obtained by using certain improvements to Young's inequality:

$$\int_{\Omega} |fg|d\mu \leq \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right) \|f\|_p \|g\|_q + \frac{2}{pq} \|f\|_p^{1-\frac{p}{2}} \|g\|_q^{1-\frac{q}{2}} \int_{\Omega} |f|^{p/2} |g|^{q/2} d\mu. \tag{3}$$

It is easy to see that the inequality (3) is equivalent to the following inequality:

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q \left(1 - \frac{1}{pq} \left\| \frac{|f|^{\frac{p}{2}}}{\|f\|_p^{\frac{p}{2}}} - \frac{|g|^{\frac{q}{2}}}{\|g\|_q^{\frac{q}{2}}} \right\|_2^2\right), \tag{4}$$

for all $f \in L^p \setminus \{0\}$ and all $g \in L^q \setminus \{0\}$.

The inequality (4) is a variant of the inequality (1). It was obtained by J. M. Aldaz [3] in a different manner.

References

- [1] M. Akkouchi. *Cauchy-Schwarz inequality implies Hölder's inequality*, RGMIA Res. Rep. Coll. **21** (2018), Art. 48, 3pp.
- [2] J. M. Aldaz. *A stability version of Hölder's inequality*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. **343** 2(2008), 842–852. doi:10.1016/j.jmaa.2008.01.104. Also available at the Mathematics ArXiv: [arXiv:math.CA/0710.2307](https://arxiv.org/abs/math/0710.2307).
- [3] J. M. Aldaz. *Self improvement of the inequality between arithmetic and geometric means*. Journal of Mathematical Inequalities. **3** 2(2009), 213–216.
- [4] C. Finol and M. Wojtowicz. *Cauchy-Schwarz and Hölder's inequalities are equivalent*, Divulgaciones Matemáticas. **15**(2) (2007), 143–147.
- [5] C. A. Infanzos. *An introduction to relations among inequalities*. Amer. Math. Soc. Meeting 700, Cleveland, Ohio 1972; Notices Amer. Math. Soc. **14** (1972), A819-A820, 121–122.
- [6] Yuan-Chuan Li and Sen-Yen Shaw. *A proof of Hölder's inequality using the Cauchy-Schwarz inequality*. J. Inequal. Pure and Appl. Math., **7** 2(2006), Art. 62.
- [7] A. W. Marshall and I. Olkin. *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*. Academic Press, New York-London, 1979.
- [8] D. S. Mitrinovic, J. E. Picaric and A. M. Fink. *Classical and New Inequalities in Analysis*. Kluwer Academic Publishers, 1993.

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@gmail.com)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor por correo electrónico, en español o inglés, a la dirección arriba indicada (preferiblemente como un archivo fuente en \LaTeX). Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editor, in Spanish or English, to the address given above (preferably as a \LaTeX source file). Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

1 Problemas propuestos

El problema propuesto a continuación se planteó en la 32^a Olimpiada Centroamericana y del Caribe celebrada en Santo Domingo, República Dominicana, en junio del 2019.

145. Un *triminó* es una ficha rectangular de 1×3 . ¿Es posible cubrir un tablero cuadrado de 8×8 con 21 triminós, de modo que quede exactamente un cuadradito de 1×1 sin cubrir? En caso afirmativo, determine todas las posiciones posibles en el tablero del cuadradito que queda sin cubrir.

2 Soluciones

Recordamos que no se han recibido soluciones a los problemas 24–25, 27–28, 44, 51, 54, 59, 69, 79, 82–91, 94–100, 103–106, 108–113, 116, 118–123, 126, 128–129 y 133–143. Invitamos a los lectores a enviarnos sus soluciones para esos problemas.

26. [8(1) (2000) p. 89.] *Propuesto por Ángel Oneto, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela*

Probar que existe una y sólo una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que, para todo $m, n \in \mathbb{N}$, se verifica:

- (a) $f(mn) = f(m)f(n)$.
(b) $m \neq n$ y $m^n = n^m \implies f(m) = n$ ó $f(n) = m$.
(c) $m, n \geq 3$ y $m^n < n^m \implies f(n) < f(m)$.

Solución del editor: Sea f una función que cumple (a), (b) y (c). De (a) se sigue que $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1)$, de donde $f(1) = 1$. Como $2^4 = 16 = 4^2$, de (b) se sigue que $f(2) = 4$ o $f(4) = 2$. Pero $f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2)^2$ es un cuadrado, luego no puede ser igual a 2. Es decir que $f(2) = 4$, y por (a) $f(2^k) = f(2)^k = 4^k = (2^k)^2$.

Si $n \geq 3$ entonces $(1 + \frac{1}{n})^n < e < 3 \leq n$, de donde $(n+1)^n < 3n^n \leq n^{n+1}$, y por (c) resulta $f(n) < f(n+1)$. Es decir que f es creciente para $n \geq 3$.

Sea ahora $n \in \mathbb{N}$ que no sea potencia de 2. Para cualquier natural $t > 1$ existe un $k(t) \in \mathbb{N}$ tal que $2^{k(t)} < n^t < 2^{k(t)+1}$. Elevando a la $\frac{2}{t}$ resulta $4^{\frac{k(t)}{t}} < n^2 < 4^{\frac{k(t)+1}{t}}$. Pero por ser f creciente también se tiene $f(2^{k(t)}) < f(n^t) < f(2^{k(t)+1})$, es decir $4^{k(t)} < f(n)^t < 4^{k(t)+1}$, de donde $4^{\frac{k(t)}{t}} < f(n) < 4^{\frac{k(t)+1}{t}}$. Pero $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^{\frac{1}{t}} = 1$, luego existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 4^{\frac{1}{t}} - 1 < \frac{1}{n^2}$, con lo cual

$$4^{\frac{k(t)+1}{t}} - 4^{\frac{k(t)}{t}} = 4^{\frac{k(t)}{t}} (4^{\frac{1}{t}} - 1) < n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1,$$

es decir, que n^2 y $f(n)$ están ambos en el intervalo $(4^{\frac{k(t)}{t}}, 4^{\frac{k(t)+1}{t}})$, que tiene longitud menor que 1, por lo tanto $f(n) = n^2$.

Hemos probado que si f cumple (a), (b) y (c) entonces $f(n) = n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora probaremos que $f(n) = n^2$ efectivamente cumple (a), (b) y (c), y por lo tanto es la única función que cumple las condiciones.

(a) es inmediato pues $f(mn) = (mn)^2 = m^2n^2 = f(m)f(n)$.

Estudiando la función $g(x) = x^{\frac{1}{x}}$ para $x > 0$ se ve que es creciente en $(0, e)$ y decreciente en $(e, +\infty)$. Como $1 < g(e) < 2$ resulta que los únicos naturales $m \neq n$ tales que $m^n = n^m$ son $m = 2$ y $n = 4$ (o $m = 4$ y $n = 2$), y como $f(2) = 4$ vemos que f cumple (b).

Finalmente si $m, n \geq 3$ y $m^n < n^m$ entonces $m^{\frac{1}{m}} < n^{\frac{1}{n}}$, es decir $g(m) < g(n)$, y como g es decreciente en $(e, +\infty)$ resulta que $m > n$.

101. [13(1) (2005) p. 79.] ¿De los números positivos que pueden ser expresados como suma de 2005 enteros consecutivos, no necesariamente positivos, cuál ocupa la posición 2005?

Solución del editor: Dados 2005 enteros consecutivos, sea n el término central. Entonces la suma de todos ellos es $(n-1002) + (n-1001) + \dots + (n+1002) = 2005n$, que es positiva si y sólo si $n > 0$. Por lo tanto estos números son $2005, 2005 \cdot 2, \dots$ y el que ocupa la posición 2005 es $2005^2 = 4020025$.

102. [13(1) (2005) p. 79.] Demuestre que la ecuación $a^2b^2 + b^2c^2 + 3b^2 - a^2 - c^2 = 2005$ no tiene soluciones enteras.

Solución del editor: Como $a^2b^2 + b^2c^2 + 3b^2 - a^2 - c^2 - 3 = (a^2 + c^2 + 3)(b^2 - 1)$, la ecuación planteada es equivalente a

$$(a^2 + c^2 + 3)(b^2 - 1) = 2002.$$

Ahora bien, $2002 \equiv 2 \pmod{4}$, y como los cuadrados son congruentes con 0 ó 1 módulo 4, el primer factor de la izquierda es congruente con $-1, 0$ ó 1 , y el segundo factor con -1 ó 0 , por lo cual su producto es congruente con $-1, 0$ ó 1 , y nunca con 2.

130. [15(1) (2007) p. 79.] (IX OMCC, Problema 6.) Desde un punto P exterior a una circunferencia S se trazan tangentes que tocan en A y B . Sea M el punto medio de AB . La mediatriz de AM corta a S en C (interior al ΔABP), la recta AC corta a la recta PM en G , y la recta PM corta a S en el punto D exterior al triángulo ΔABP . Si BD es paralelo a AC , demuestre que G es el punto donde concurren las medianas del ΔABP .

Solución por Wilson Pacheco Redondo (wpachecoredondo@gmail.com), Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

Para este problema se tiene lo siguiente:

- (a) Como el triángulo APB es isósceles entonces PM es la mediatriz de AB y por tanto paralela a la mediatriz de AM , de este hecho se deduce que C es el punto medio de AG y tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \overline{CG} \\ \overline{AG} &= \overline{BG} \\ \overline{AD} &= \overline{BD} \end{aligned}$$

- (b) El paralelismo de las cuerdas AC y BD implica que en la simetría de centro M , se tenga $S_M(\overrightarrow{AC}) = \overleftarrow{BD}$, como $S_M(\overrightarrow{PM}) = \overleftarrow{PM}$, entonces

$$S_M(G) = S_M(\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{PM}) = \overleftarrow{BD} \cap \overleftarrow{PM} = D$$

con lo que $\overline{AG} = \overline{BD}$. Así, el cuadrilátero $AGBD$ es un rombo.

- (c) El paralelismo de las cuerdas AC y BD implica también que las mediatrices de una es también la mediatriz de la otra y en la simetría con respecto a dicha recta se correspondan los segmentos \overline{AD} y \overline{BC} , es decir, $\overline{AD} = \overline{CB}$.

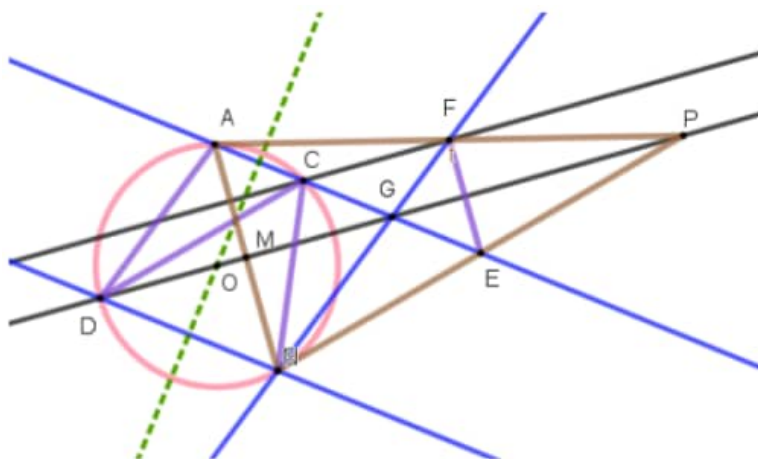


Figura 1: Construcción

Sean E y F son los puntos de intersección de AG con PB y BG con PA respectivamente. Notar que como \overline{PM} es mediana del triángulo ABP , entonces para probar que G es la intersección de las medianas basta ver que \overline{AF} es mediana del triángulo ABP .

Si consideramos los triángulos ECB y CBD tenemos; por 1. y 3. que $\overline{CB} = \overline{AD} = \overline{BD}$, los ángulos $\angle EBC$ y $\angle CDB$ son iguales, ya que ambos ángulos subtienden a la cuerda BC el primero es semi-inscrito y el segundo inscrito a la circunferencia dada y los ángulos $\angle ECB$ y $\angle CBD$ son iguales, ya que son alternos internos entre rectas paralelas.

Luego, por el criterio ángulo-lado-ángulo, los triángulos ECB y CBD son congruentes con lo que $\overline{CE} = \overline{CB} = \overline{AD} = \overline{AG}$. También tenemos que el cuadrilátero $CFBD$ tiene dos lados paralelos e iguales por lo que es un paralelogramo y en consecuencia \overline{CD} es paralela a $\overline{BF} = \overline{BP}$ y $\overline{CD} = \overline{BF}$. Como C es punto medio de \overline{AG} se deduce entonces que G es el punto medio de \overline{CE} .

Ahora en los triángulos GFP y GCD , tenemos $\overline{GF} = \overline{GC}$, los ángulos $\angle GFP$ y $\angle GCD$ son iguales por ser alternos internos entre rectas paralelas y los ángulos $\angle FGP$ y $\angle CGD$ son iguales por ser opuestos por el vértice. Luego, por el criterio ángulo-lado-ángulo, los triángulos ECB y CBD son congruentes con lo que $\overline{FP} = \overline{CD} = \overline{BF}$. Así, F es el punto medio de \overline{BP} y \overline{AF} es mediana del triángulo ABP , con lo que G , satisface lo requerido en el problema.

144. [19(2) (2018) p. 95.] Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que los tres números

$$x - y, \quad x^2 - y^2, \quad x^3 - y^3$$

son positivos y números primos. Demuestre que $x - y = 3$.

Solución por Tobías Rosas Soto (tjrosas@gmail.com), Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

Para comenzar recuérdese que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \tag{1}$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) \tag{2}$$

Ahora supóngase ahora que $x - y = p$, con p primo. Tomando en cuenta la ecuación (1) y el hecho de que $x^2 - y^2$ es un número primo, se tiene que

$$x + y = \frac{q}{p} \tag{3}$$

con q un número primo. De igual forma tomando en cuenta la ecuación (2), y el hecho de que $x^3 - y^3$ es un número positivo y primo, se tiene que

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{w}{p} \tag{4}$$

con w un número primo. Así,

$$\begin{cases} x - y = p \\ x + y = \frac{q}{p} \end{cases}$$

cuya solución es $x = \frac{q+p^2}{2p}$, $y = \frac{q-p^2}{2p}$. De manera que

$$x^2 + xy + y^2 = \left(\frac{q+p^2}{2p}\right)^2 + \left(\frac{q+p^2}{2p}\right)\left(\frac{q-p^2}{2p}\right) + \left(\frac{q-p^2}{2p}\right)^2 = \frac{3q^2+p^4}{4p^2}.$$

Luego, tomando en cuenta la ecuación (4) se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{3q^2+p^4}{4p^2} &= \frac{w}{p} \\ 3q^2+p^4 &= 4pw \\ 3q^2 &= p(4w-p^3)\end{aligned}\tag{5}$$

Por el *Teorema de Factorización Única* se tiene que $p|3$ o $p|q^2$. Como 3, p y q son números primos, entonces $p = 3$ o $p = q$.

- Si $p = q$, usando la ecuación (5), entonces $3q = 4w - q^3$. De manera que $q|w$ o $q|4$, es decir, $q = w$ o $q = 2$.

- Si $p = q = 2$, entonces $6 = 4w - 8$. Por tanto $w = \frac{7}{2}$, lo cual es absurdo pues w es un número primo.
- Si $p = q = w$, entonces

$$3p = 4p - p^3 \implies p(p^2 - 1) = 0,$$

de donde $p = 0$ o $p = \pm 1$, lo cual es absurdo pues p es un número primo.

Así, se tiene que $p = 3$.

Guía para los Autores

Divulgaciones Matemáticas es una revista arbitrada que considera para su publicación trabajos inéditos de investigación, en todas las áreas de la Matemática y sus aplicaciones, historia o enseñanza. Contribuciones adecuadas trabajos de investigación, de divulgación e históricos y de enseñanza matemática. Se presta especial atención a los temas tratados en la reunión anual e itinerante de las **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** celebradas en Venezuela. Además, contempla una sección de problemas y soluciones, la cual presenta problemas que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado, sin conocimientos especializados.

El primer requisito para que un artículo sea publicable es su corrección matemática. En segundo lugar, el estilo expositivo debe ser atractivo y lo más fluido y organizado que sea posible. En los trabajos de investigación se tomarán en cuenta la relevancia y originalidad de los resultados obtenidos. El tercer requisito para que el cuerpo editorial de la revista acepte un artículo, para someterlo a evaluación y posible publicación, es que el mismo debe estar elaborado en LaTeX, utilizando una plantilla predefinida por la revista, se le pide a los autores respetar las instrucciones internas indicadas en la plantilla mencionada. El archivo fuente (.tex) y una versión en formato .dvi, .pdf o .ps (imprimible) debe enviarse por correo electrónico a divulgaciones@demat-fecluz.org. Si el artículo contiene figuras, éstas deben adjuntarse como archivos separados en formatos .png o .jpg.

Los lenguajes aceptados por la revista son español e inglés. Al someter un artículo, el autor debe remitir una carta en la que se haga constar que el artículo que se está sometiendo no ha sido publicado o sometido a otra revista de forma total o parcial. Dicha carta debe contener los siguientes datos: Nombre completo del autor o autores, título del artículo, firma del autor que somete el artículo (autor de correspondencia), y declaración expresa de conformidad de los demás autores (cuando exista más de un autor).

El autor, o autores, en el mensaje de sometimiento del manuscrito deben indicar la sección de la revista en la que sugiera debe ser incluido su trabajo, a saber: artículo de investigación, artículo de divulgación e histórico, artículo de enseñanza matemática. Los artículos deben organizarse en las siguientes secciones: Identificación, Resumen, Abstract, Introducción, Desarrollo, Agradecimiento (opcional), y Referencias bibliográficas (usar el estilo ejemplificado en la plantilla).

Identificación. Esta debe incluir: Título completo del trabajo en castellano e inglés; Título corto para el trabajo; Nombre completo y dirección completa del autor o autores; Afiliación institucional; Dirección electrónica; Dos clasificaciones, una primaria y otra secundaria, de cinco caracteres de la AMS (MSC 2010).

Resumen: Texto de no más de doscientas palabras que simplifique en esencia lo que se presenta a lo largo del trabajo. Debe tomar en cuenta aspectos como: Objetivos del trabajo; Metodología utilizada; Resultado. A continuación del resumen se deben incluir de tres a seis palabras o frases claves.

Abstract: Una traducción al idioma inglés de todo lo expuesto en el resumen.

Cabe resaltar que **LA REVISTA SOLO PROCESARÁ LOS ARTÍCULOS QUE CUMPLAN CON TODOS LOS REQUISITOS ANTES EXPUESTOS.**

Guide for Authors

Divulgaciones Matemáticas is a refereed journal, which considers for publication, unpublished research papers in all branches of mathematics and its applications, history or teaching. Suitable contributions can be research papers, historical and/or teaching papers and bibliographical reviews. Special attention is paid to those topics covered by the annual itinerant meeting **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** held in Venezuela. In addition, the journal contemplates a section of problems and solutions, which contains problems that can be addressed by undergraduate students of mathematics without expertise.

Mathematical correctness is the first requirement for an article to be published. In second place, the exposition style should be attractive and most fluid and organized as possible. For research works the relevance and originality of the results will be taken into account. The third requirement to agree on the evaluation and possible publication of an article is its preparation in LaTeX using a predefined template by the journal. We ask the authors to respect the internal instructions given in the provided template. The source file (.tex) and a version .dvi, .pdf or .ps (printable) should be sent by email to divulgaciones@demat-fecluz.org. If the article contains figures, these should be attached as separate files in .jpg or .png formats.

The languages accepted by the journal are Spanish and English. When submitting an article, the author must include a separate letter stating that the article has not been published or submitted to another journal in total or partial way. The letter should contain the following information: Full name of author or authors, article title, signature of the author who submits the article (corresponding author), and a declaration of conformity of the other authors.

When submitting a manuscript, the author or authors, should suggest the section of the journal in which the work should be included, namely research papers, expository and historical papers, mathematics teaching papers. Articles should be organized into the following sections: Identification, Abstract, Resumen, Introduction, Development, Acknowledgment (optional), and References (use the style exemplified in the template).

Identification. This should include: Full title in Spanish and English; short title for the article; Full name and full address of author or authors; Institutional affiliation; Electronic address; Two classifications, one primary and one secondary, of five characters of the AMS (MSC 2010).

Abstract: Text of not more than two hundred words simplify essentially what is presented throughout the work. You should take into account aspects such as work objectives; Methodology used; Result. Following the abstract should include three to six key words or phrases.

Resumen: A Spanish language translation of the above in the abstract.

Should be noted that **THE JOURNAL WILL ONLY PROCESS ARTICLES THAT MEET ALL THE REQUIREMENTS MENTIONED ABOVE.**

DIVULGACIONES MATEMÁTICAS, Vol. 20, No. 1
Se terminó de editar en Octubre del 2019
en el Departamento de Matemática (DEMAT)
Maracaibo - Venezuela.

La Universidad del Zulia

AUTORIDADES

Judith Aular de Durán
Rectora (E)

María Artigas
Vicerrectora Académica (E)

Marlene Primera Galué
Vicerrectora Administrativa (E)

Ixora Gómez
Secretaria de LUZ (E)

Facultad Experimental de Ciencias

Beatríz González
Decana (E)

Neida Murcia
Directora del Departamento de Matemáticas

Divulgaciones Matemáticas

Vol. 20, No. 1, 2019

Contenido (Contents):

Artículos de Investigación (Research papers)

- Mimetic methods to Helmholtz equation: numerical dispersion.**
Métodos miméticos para la ecuación de Helmholtz: dispersión numérica.
Carlos E. Cadenas R., Livia J. Quiñonez T. 1-15
- Condición de suma de grados y ciclo que contiene cada vértice de un subconjunto balanceado dado en grafos bipartitos balanceados.**
Degree sum conditions and cycle that contains every vertex of a balanced subset given in balanced bipartite graphs.
Daniel Brito, Lope Mata Marín, Henry Ramírez 16-38
- Insertion of a contra-Baire-1 (Baire-.5) function.**
Inserción de una función Contra-Baire-1 (Baire-.5).
Majid Mirmiran, Binesh Naderi 39-48
- Perturbations and zero points for equations with accretive mappings in fuzzy normed spaces.**
Perturbación y puntos cero para ecuaciones con mapeo acumulativo en espacios normados difusos.
M. H. M. Rashid, Faisal Al-kasasbeh 49-66
- Algoritmo para la solución numérica de la ecuación de Poisson usando diferencias finitas.**
Algorithm for the numerical solution of the Poisson's equation using the finite difference.
Yohan Díaz Ferrer, Miguel Cruz Ramírez 67-77
- Los números de Ramsey con componentes H-buena y secuencias simétricas.**
The Ramsey numbers with components H-good and simultaneous sequences.
José Figueroa, Felicia Villarroel, Henry Ramírez, Juan Otero 78-90

Artículos de Divulgación e Históricas (Expository and historical papers)

- An application of an inequality of J. M. Aldaz.**
Una aplicación de una desigualdad de J. M. Aldaz.
Mohamed Akkouchi 91-94

Problemas y Soluciones (Problems and Solutions)

- José H. Nieto S.* (Editor). 95-99