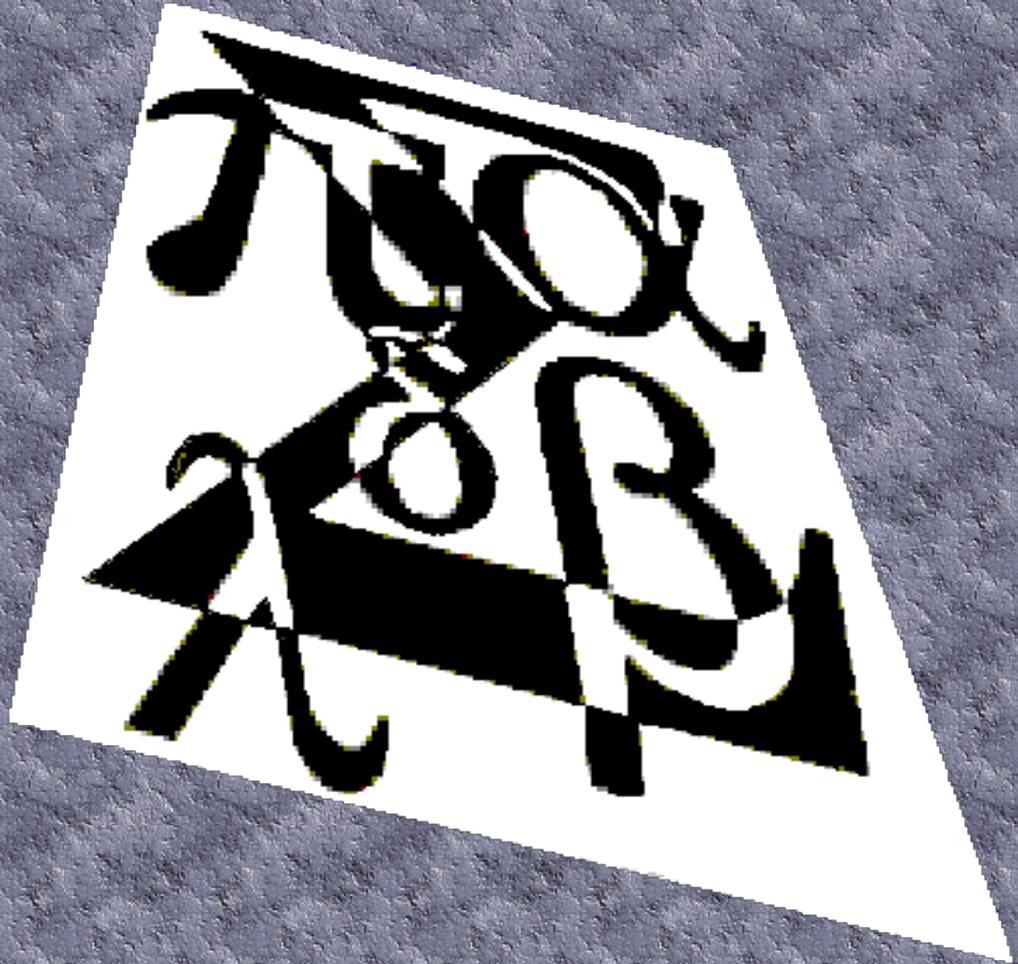




Universidad  
del Zulia

# Divulgaciones Matemáticas



Departamento de Matemática

Depósito legal: pp 199302ZU392

ISSN 1315-2068

Maracaibo - Venezuela

Facultad  
Experimental  
de Ciencias



Vol. 19 - No. 2 - 2018

# Divulgaciones Matemáticas

Revista Matemática de la Universidad del Zulia  
Facultad Experimental de Ciencias  
Departamento de Matemática

Revista arbitrada, publicada de forma digital, de libre acceso, indizada en Mathematical Reviews, MathSci online/CD-ROM, Zentralblatt für Mathematik y Revencyt. Se publica un volumen anual compuesto por dos números, que aparecen en junio y diciembre.

## Comité Eitorial

Dr. Vinicio Ríos (LUZ)      Dr. Wilson Pacheco (LUZ)  
Dr. Deivi Luzardo (LUZ)    MSc. Edixo Balzán (LUZ)

**Editor Jefe:** Dr. Tobías Rosas Soto ([trosas@demat-fecluz.org](mailto:trosas@demat-fecluz.org))

**Editores Asociados:** Dr. Vinicio Ríos, Dr. Wilson Pacheco

**Editores Eméritos:** Dr. Alirio J. Peña P., MSc. Ángel V. Oneto R., Dr. José H. Nieto S., Dr. Genaro González, Dr. Daniel Núñez.

**Editore Fundadores:** Dr. Alirio J. Peña P., MSc. Ángel V. Oneto R.

Portada diseñada por Tobías Rosas Soto, basada en un diseño de Javier Adolfo Ortiz.

## Dirección Postal:

Revista Divulgaciones Matemáticas  
Departamento de Matemática  
Facultad Experimental de Ciencias  
La Universidad del Zulia - Apartado Postal 526  
Maracaibo, Estado Zulia  
Venezuela

Correo electrónico: [divulgaciones@demat-fecluz.org](mailto:divulgaciones@demat-fecluz.org)

URL: [divmat.demat-fecluz.org](http://divmat.demat-fecluz.org)

Depósito Legal pp 199302ZU392

Compuesta con L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X y A<sub>M</sub>S-L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X en el Departamento de Matemática de la Facultad Experimental de ciencias, Universidad del Zulia.

©1993 La Universidad del Zulia.

Universidad del Zulia  
Maracaibo, Venezuela



DIVULGACIONES  
MATEMÁTICAS

---

---

Vol. 19

2018

No. 2

---

---



# Presentación

El Comité Editorial de *Divulgaciones Matemáticas* se complace en presentar el **Vol. 19, No. 2, 2018**. En el presente número están contenidos algunos artículos recibidos en el primer semestre del año 2018, pero procesados en el segundo semestre, y otros tantos recibidos y procesados en el segundo semestre del año **2018** que fueron evaluados y aceptados para su publicación.

Es importante resaltar que el presente número de la revista muestra artículos en cada una de las secciones que presenta *Divulgaciones Matemáticas*, a saber: cinco (5) Artículos de Investigación, un (1) Artículo de Divulgación e Histórico, dos (2) Artículos sobre Enseñanza Matemática y un manuscrito con la solución de tres (3) problemas presentados en la sección de Problemas y Soluciones.

El trabajo editorial relacionado con este número es el resultado del esfuerzo de algunos miembros del Departamento de Matemática de la Facultad Experimental de Ciencias. Los Editores queremos expresar nuestro agradecimiento a todos aquellos que hicieron posible este número: a los autores de los trabajos que se presentan, que dieron su voto de confianza a la revista; a los árbitros que evaluaron los artículos, cuya labor desinteresada permitió satisfacer los estándares de calidad de la revista y mejorar sensiblemente la forma de los trabajos; al equipo editorial de *Divulgaciones Matemáticas*; y en especial al Prof. José Heber Nieto por su aporte para la sección de *Problemas y Soluciones*. A todos, mil gracias.

Por último, el Comité Editorial de *Divulgaciones Matemáticas* invita a la comunidad matemática venezolana e internacional a seguir dándonos su voto de confianza sometiendo sus trabajos en la revista para evaluación y posible publicación.

<sup>1</sup> Dr. Tobías Rosas Soto.

---

<sup>1</sup>Editor en Jefe de *Divulgaciones Matemáticas* y editor del presente número

# Presentation

The Editorial Board of *Divulgaciones Matemáticas* is pleased to present the **Vol. 19, No. 2, 2018**. Articles contained in this issue are those processed during the first semester of the year **2018** and were evaluated and accepted for publication.

It is important to stand out that the present issue of the journal shows articles on each of the sections that *Divulgaciones Matemáticas* present, i.e.: five (5) Research Papers, one (1) Expository and historical papers, two (2) Mathematical teaching papers, and one manuscript with the solution of three (3) problems presented in the section of Problems and Solutions.

The editorial work related to this issue is the result of the efforts of some members of the Department of Mathematics of the Experimental Faculty of Sciences. The Editors want to express their gratitude to all of those who made this issue possible: to the authors of the presented works, who gave their vote of confidence to the journal; to the referees, who evaluated the articles with selfless work, guaranteeing the quality standards of the journal and significantly improving the way of working; to the editorial team of *Divulgaciones Matemáticas*; and especially to Professor José Heber Nieto, for his contribution to the *Problems and Solutions* section. To all of them, thanks a lot.

Finally, the Editorial Board of *Divulgaciones Matemáticas* invite the Venezuelan and international mathematical community to continue giving their support by submitting their articles to our journal for evaluation and possible publication.

<sup>2</sup> Dr. Tobías Rosas Soto.

---

<sup>2</sup>Chief Editor of *Divulgaciones Matemáticas* and editor of the present issue

# DIVULGACIONES MATEMÁTICAS

Vol. 19, No. 2, 2018

## Contenido (Contents):

### Artículos de Investigación

(Research papers)

**Medidor y graficador de voltaje, corriente y potencia aparente con monitor en tiempo real por Internet y local usando Arduino y Raspberry PI**

Measurer and plotter of voltage, current and apparent power with real-time monitor by Internet and local using Arduino and Raspberry PI

*Yemala Castillo Brito, Gerardo Herrera Roldan, Jesús Gómez* 1–15

**Coincidences in the Padovan and Tribonacci sequences.**

Coincidencias en las sucesiones de Padovan y Tribonacci.

*Santos Hernández Hernández* 16–22

**On contra  $e^*\theta$ -continuous functions.**

En funciones contra  $e^*\theta$ -continuas.

*Burcu Sünbül Ayhan, Murad Özkoç* 23–35

**Some new sequence spaces of interval number based on Zweier sequences and Fibonacci numbers.**

Algunos nuevos espacios de secuencia de número de intervalo basados en secuencias de Zweier y números de Fibonacci.

*Shyamal Debnath, Ayhan Esi, Subrata Saha* 36–43

**Representación de grafos divisores de cero para anillos.**

Representation of graphs zero divisores for rings.

*Juan Otero, José Salazar, Felicia Villarroel* 44–51

### Artículos de Divulgación e Históricos

(Expository and historical papers)

**Propiedad multiplicativa, simultánea, de la derivada y la integral en funciones de clase  $C^1$ .**

Simultaneous multiplicative property of the derivative and integral in functions of  $C^1$  class.

*Tobías Rosas Soto, Irma Abrigo Córdoba, Mayra García Calle, Eduardo Suárez Vinuesa* 52–64

### Artículos de Enseñanza Matemática

(Mathematical teaching papers)

**Geoplano circular trigonométrico: Un recurso didáctico para la enseñanza de la Geometría.**

Trigonometric circular geoplany: A didactic resource for the teaching of Geometry.

*Derling José Mendoza Velazco* 65–81

**Optimización lineal como estrategia de aprendizaje desarrollador de la investigación operativa en administración de empresas.**

Linear optimization as a learning strategy developer of operational research in business administration.

*Yoandry Rivero Padrón, Ernesto Fernández Rivero*

82–94

**Problemas y Soluciones**  
(Problems and Solutions)

*José H. Nieto S.* (Editor)

95–97

# Medidor y graficador de voltaje, corriente y potencia aparente con monitor en tiempo real por Internet y local usando Arduino y Raspberry PI

*Measurer and plotter of voltage, current and apparent power with real-time monitor by Internet and local using Arduino and Raspberry PI*

Yemala Castillo Brito (ycastillo@unibe.edu.ec)

Facultad de Tecnologías de la Información y Comunicación.  
Universidad Iberoamericana del Ecuador  
Quito, Ecuador

Gerardo Herrera Roldan (gherrera2k1@gmail.com)

Coordinación de Carrera Tecnología Superior en Automatización e Instrumentación  
Tecnológico Superior “El Pacifico”  
Quito, Ecuador

Jesús Gómez (jgomez@unibe.edu.ec)

Facultad de Hotelería y Turismo  
Universidad Iberoamericana del Ecuador  
Quito, Ecuador

## Resumen

Actualmente hay muchos requisitos de soluciones de telemetría configurables. El objetivo general de este trabajo es construir un multímetro de variables eléctricas con monitor gráfico en tiempo real y en red (usando una página web) usando Arduino y Raspberry PI. El método y el procedimiento: Linux, Apache, programado con  $C^{++}$ , Python, aproximaciones con series de Taylor, anotaciones con residuos de LaGrange Cauchy. Se trazaron 7 ciclos de onda instantáneos de voltaje, corriente, potencia aparente y voltaje teórico sin problemas. Se tomaron medidas de voltaje, corriente y potencia aparente, que coincidieron con los valores de las cargas, en casos de carga resistiva pura y el otro tipo de carga fue una lámpara fluorescente. La comparación de la tensión medida con la teórica, que coincidió en el período, más la fase, no se sincronizó. La función resultante puede tener una función más precisa si tiene una gran cantidad de términos de Taylor. La clase de medidas indirectas y directas fue 1.5.

**Palabras y frases clave:** Multímetro, graficador, voltaje, corriente, potencia, Arduino; Raspberry.

## Abstract

---

Recibido 30/07/2018. Revisado 04/08/2018. Aceptado 04/09/2018.  
MSC (2010): Primary 68U20; Secondary 68N99.  
Autor de correspondencia: Jesús Gómez

Currently there are many requirements for configurable telemetry solutions. The general objective of this work is to build a multimeter of electrical variables with graphic monitor in real time and in network (using a web page) using Arduino and Raspberry PI. The method and procedure: Linux, Apache, programmed with  $C^{++}$ , Python, approximations with Taylor series, annotations with Lagrange Cauchy residues. 7 instantaneous wave cycles of voltage, current, apparent power and theoretical voltage were drawn without problems. Measures of voltage, current and apparent power were taken, which coincided with the values of the loads, in cases of pure resistive load and the other type of load was a fluorescent lamp. The comparison of the voltage measured with the teorical, which coincided in the period, plus the phase, was not synchronized. The resulting function can have a more precise function if it has a large number of Taylor terms. The class of indirect and direct measures was 1.5.

**Key words and phrases:** Multimeter, plotter, voltage, current, power, Arduino, Raspberry.

## 1 Introducción

En la actualidad, existen nuevos desafíos gerenciales y requerimientos de data en tiempo real (Telemetría o lo más cercano a ella), debido al crecimiento del internet de las cosas (IoT). Además, se incorpora el uso de tecnologías libres para tener una opción libre de los costos de patentes.

Equipos como osciloscopios, vatímetros, de buena precisión y clase baja son sumamente costosos, y sus servicios de mantenimientos también. Por tales motivos, se busca una nueva opción que resuelva estas problemáticas.

Este trabajo tuvo como objetivo general construir un medidor de variables eléctricas (voltaje y potencia aparente) con monitor graficador en tiempo real y por red (usando una página web) empleando Arduino y Raspberry PI.

## 2 Marco Teórico

Para el desarrollo de la investigación se utilizaron las fórmulas matemáticas descritas a continuación:

- Voltaje alterno, según Alexander en [1].

$$V(t) = v_o \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

- Voltaje Eficaz (RMS), ver [1].

$$V_{rms}(t) = \sqrt{\frac{\int_{t_0}^{t_0+T} V^2(t) dt}{T}}$$

- Aproximación de Taylor del Seno, según Rivera en [10]

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Potencia aparente, ver [1]

$$S(t) = V(t)I(t)$$

- Velocidad angular y frecuencia, según Valkerbug en [12]

$$w = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

### 3 Método y procedimiento

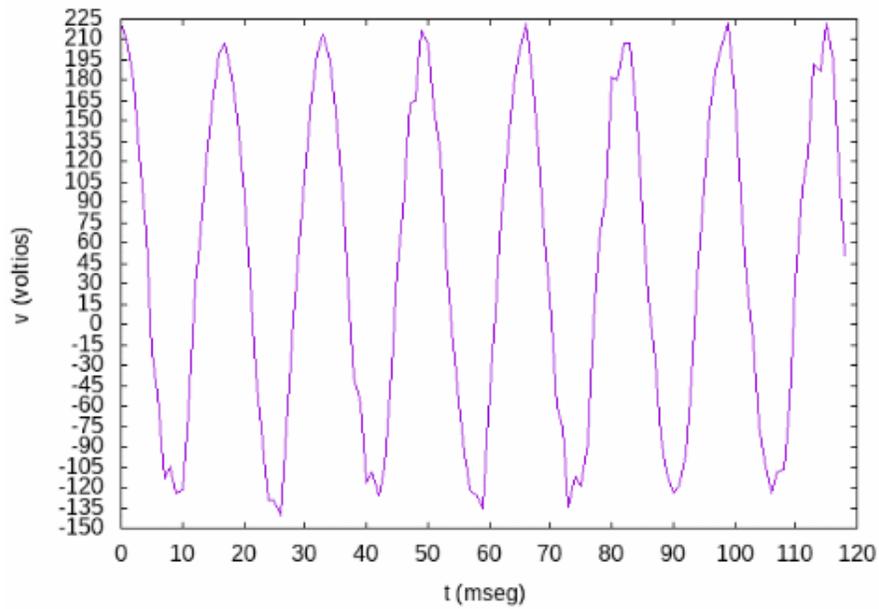
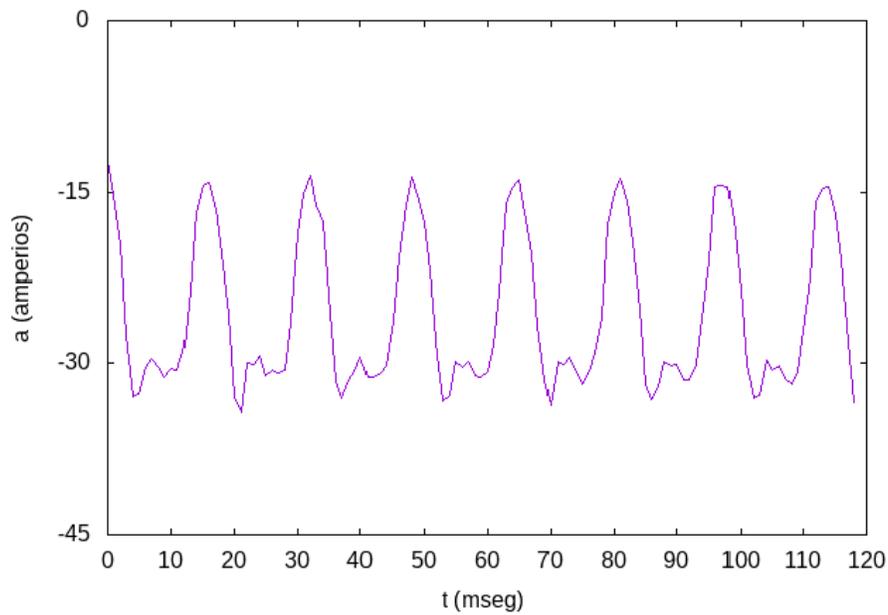
El procedimiento para calcular los datos se realizó a través de la elaboración de un programa de Python con las características necesarias para ser una herramienta aceptable y funcional. Este se crea resolviendo las ecuaciones que se requieren para llegar al resultado. Para ensamblar el circuito eléctrico se realizaron los siguientes pasos:

1. Armar en el Arduino los medidores de voltaje (para voltaje hay que conectar un transformador para poder aumentar el rango de voltaje) y corriente.
2. Conectar ya ensamblado por USB al Raspberry pi, como se indica en Ray en [9].
3. En el Raspberry se realiza un programa ó “script” en Python (es lo más rápido), éste Importa la librería grafica “Gnuplot” y se adjuntó el código Python (Ver Programa 2).
4. Analizar el código, realizando:
  - Leer del puerto USB las mediciones de voltaje y corriente del Arduino.
  - Llenar una lista con estos datos en Python.
  - Tomar los datos y calcular la potencia aparente y el error (opcional).
  - Tomar como argumento estos datos para la herramienta graficadora “Gnuplot”.
  - Configurar cada gráfica, ejes, títulos y escalas.
  - Exportar en fichero jpg o png cada grafica en cada 12 segundos.
5. Al mismo tiempo el servidor web (servicio apache de linux) tiene en la página principal un código que actualiza la página donde se muestra gráficas cada 15 segundos.

## 4 Resultados

### 4.1 Adquisición de datos

Se inició trabajando con el muestreo de 300 datos por segundo de voltaje, corriente y potencia con respecto al tiempo, pero para no sobrecargar el Arduino se bajó el muestreo a 150 muestras por segundo, graficando Voltaje Vs. Tiempo (ver Figura 1), Corriente (ver Figura 2), Potencia Aparente Vs. Tiempo (ver Figura 3).

Figura 1: *Voltaje Vs. Tiempo*Figura 2: *Corriente Vs. Tiempo*

En la Figura 1 se presenta la gráfica que identifica la resolución del sensor de voltaje=  $0,00488 V$ , según especificaciones de su Datasheet en Dealextrème (ver [14]), pero como se le agregó un transformador de relación 19,17; queda, la nueva resolución=  $0,0935 V$ , es decir, cualquier valor de la gráfica tiene un error (Error=  $\pm 0,0935 V$ ).

En la gráfica presente en la Figura 2 se encontró el error total del sensor de corriente es=  $1,5 \% A$ , según especificaciones de su Datasheet en Allegro (ver [13]), entonces la gráfica tiene un error (Error=  $\pm 1,5 \%$ ). Es decir, si toma un valor de la gráfica de  $20 A$ . El valor real=  $20 \pm 20 \cdot 0,015 = (20 \pm 0,3) A$ .

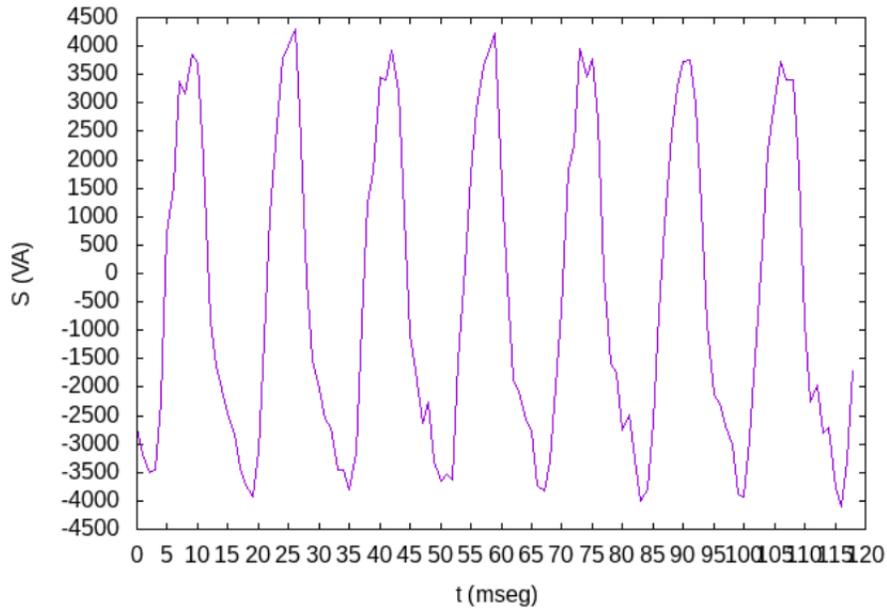


Figura 3: *Potencia aparente Vs. Tiempo*

La carga usada en la gráfica de la Figura 3 fue un bombillo fluorescente. La medición de esta magnitud es indirecta,  $S = V \cdot A$ , el error de  $S$ , según Helfrick en [5].

$$\frac{\Delta S}{S} = \sqrt{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2}$$

Con los datos de  $V = 105 v$ ;  $I = -35 A$ ;  $\Delta V = 0,0935$ ;  $\Delta I = 1,5 \% I$ ;  $S = 3515,5 W$ . Sustituyendo  $\frac{\Delta S}{S} = 0,0015$ ;  $\Delta s = 0,0015 \cdot S = 52,86 w$ ; El valor real de  $S = (3515,5 \pm 52,86) w$ , porcentualmente este error=  $1,504 \%$ .

A continuación se presenta la Figura 4, una captura de pantalla del monitor web del graficador. Como se puede observar, una vez graficado se obtuvo el resultado esperado, aunque se encontró inconveniente con la gráfica teórica de la aproximación de Taylor. (ver Figura 5).

**Trabajo de investigación de telemetría y aproximación usando modelo matemáticos de Series de Taylor !**

Este equipo es un **osciloscopio** que grafica el voltaje, la corriente, y la potencia aparente y el voltaje teórico.

**Grafica del Voltaje**

Grafica instantanea Voltaje vs Tiempo:

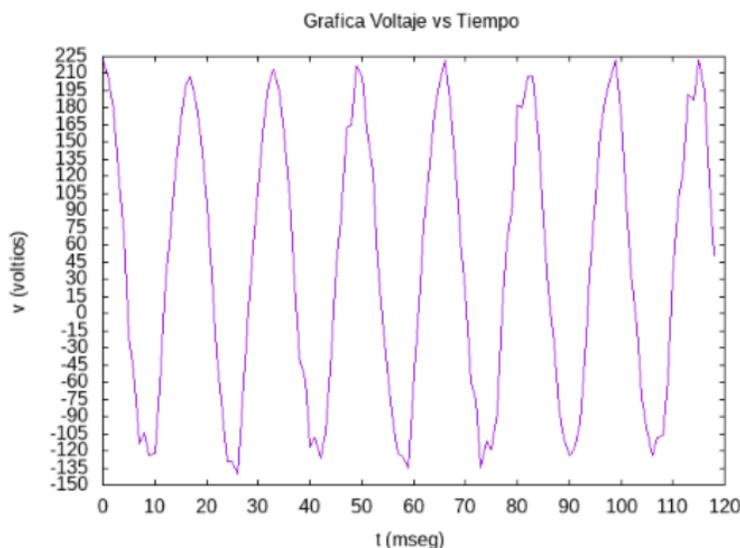


Figura 4: Pantalla de la página web del monitor de red

## 5 Diseño de un medidor y graficador de voltaje, corriente y potencia aparente.

Para la programación se usó lineamientos de lectura de puerto serie de ejemplos de Banzi (ver [3]), cofundador del proyecto Arduino. A continuación se presenta el código de medidor en Arduino mega. (Programa 1).

### 5.1 Programa 1.

El lenguaje de este programa en  $C^{++}$  para Arduino

```
#define_muestras_300//_200_muestras_equivale_n_a
Int_voltaje[muestras];_//_10_ciclos_completos_de_la_señal.
Int_intensidad[muestras];
Unsigned_long_tiempo[muestras];_//_se_utiliza_el_mismo_formato_que_millis().
Unsigned_int_voltaje_max;Int_voltios[muestras];_Int_inten[muestras];
Float_sumaaparente=0;_Float_voltaje=0;_Float_rms_corriente=0;
Int_aparente[muestras];_Float_amperios[muestras];
```

```

Float_p=0;_Long_suma=0;_Float_sumaa=0;_Float_s=0;Float_fp=0;Float_phi=0;
Float_reactiva=0;
Void_setup(){
//_inicialización_del_puerto_serie.
Serial.begin(230400);
}
Void_loop(){
Suma=0;Sumaa=0;Sumaaparente=0;
Muestreo();Calculos();Envio();Delay(16000);
Reset();
}
Void_reset(){
For(int_i=0;_i<muestras;_i++){
Voltios[i]=0;Amperios[i]=0;Aparente[i]=0;Sumaaparente=0;P=0;Suma=0;Sumaa=0;
}
}
Void_calculos(){
For(int_i=0;_i<muestras;_i++){
Voltio[i]=(voltios[i]-107)*2.44;_Amperios[i]=(inten[i]-510)*0.07;
Aparente[i]=voltios[i]*amperios[i];_Sumaaparente=sumaaparente+aparente[i];
P=sumaparente/muestras;
Suma=suma+pow(voltios[i],2);Sumaa=sumaa+pow(amperios[i],2);
}
Voltajee=sqrt((suma/muestras));Rms_corriente=sqrt((sumaa/muestras));
S=voltajee*rms_corriente;Fp=p/s;Phi=acos(fp);Reactiva=s*sin(phi);
}Void_muestreo(){
Unsigned_long_tiempo_objetivo;Unsigned_long_cuenta;
For(int_i=0;_i<muestra;_i++){
Tiempo_objetivo=_millis()+1;_//sumando_un_milisegundo
Voltios[i]=_analogread(a0)*0.85;_//se_muestrea_a_1_khz.
Inten[i]=_analogreads(a_1);Tiempo[i]=_millis();Cuenta=_millis();
While_(cuenta<_tiempo_objetivo){
Cuenta=_millis();
}}
}Void_envio(){
Serial.print(rms_corriente);_Serial.print(",");Serial.print(voltaje);
Serial.print(",");Serial.print(p);Serial.print(",");Serial.print(fp);
Serial.print(",");Serial.print(reactiva);Serial.print(",");Serial.println(s);
For(int_i=0;_i<muestras;_i++){
Serial.print_(voltios[i]);Serial.print(",");}
For(int_i=0;_i<muestras;_i++){
Serial.print_(amperio[i]);Serial.print(",");}
For(int_i=0;_i<muestras;_i++){
Serial.print_(aparente[i]);Serial.print(",");}
For(int_i=0;_i<muestras;_i++){
Serial.print_(i);Serial.print(",");}
}

```

Así mismo, se realizó el Código graficador (Programa 2) en Raspberry PI 3 plus, en lenguaje Python. Utilizando rutinas de ejemplos y referencias de Pilgrim presentes en [7] y para ajustar los comandos de Gnuplot se usaron ejemplos y referencias de Jarnet expuestas en [6].

## 5.2 Programa 2.

### El lenguaje de este programa en Python 3

```
#_**-_coding:_utf-8_**-
Import_httplib2_#_librería_para_clientes_http_(si_no_la_tienes_tienes_que
bajartela_e_instalarla_antes)
Import_serial_#_librería_del_puerto_serie_para_Arduino_(si_no_la_tienes,
tienes_que_bajartela_e_instalarla_antes)
Import_timeImport_gnuplot
Gplot_=gnuplot.gnuplot(debug_=1)
G2_=gnuplot.gnuplot(debug_=1)
G3_=gnuplot.gnuplot(debug_=1)
Gplot.title("grafica_voltaje_vs_tiempo")
G2.title("grafica_corriente_vs_tiempo")
G3.title("grafica_potencia_aparente_(s)_vs_tiempo")
Gplot.xlabel("t_(mseg)")
G2.xlabel("t_(mseg)")
G3.xlabel("t_(mseg)")
Gplot.ylabel("v_(voltios)")
G2.ylabel("a_(amperio)")
G3.ylabel("s_(va)")
#_set_style_of_plot._We_want_lines
GplotG1("set_style_data_lines")_#pone_el_grafico_de_tipo_lineas_gh2018,
gherrera2k1@gmail.com
G2("set_style_data_lines")_#pone_el_grafico_de_tipo_lineas_gh2018,
gherrera2k1@gmail.com
G3("set_style_data_lines")_#pone_el_grafico_de_tipo_lineas_gh2018,
gherrera2k1@gmail.com
#_gplot("set_grid")_#pone_la_cuadrícula_gh2018,gherrera2k1@gmail.com
Gplot("set_xtic_10")
G2("set_xtic_10")
G3("set_xtic_5")
Gplot("set_ytic_15")
G2("set_ytic_15")
G3("set_ytic_500")
Ser_=serial.serial('/dev/ttyacm0',_230400)#abrimos_puerto_serie_para_ardu_mega
Ser.readline()_#_esperamos_a_que_el_Arduino_envíe_una_línea_para_evitar_leer
luego_una_corrupta.
Conn_=httplib2.http()_#_creamos_la_conexión_http.
While_true:
c_=0
data_=[]
```

```

data2=[]
data3=[]
while(c<1):datostring=ser.readline()#leemos una nueva línea enviada por
el Arduino
datos=string(datostring).split(",")#separamos los datos recibidos
rms_corriente=(datos[0])#guardamos el valor de voltaje de la luz
voltajee=(datos[1])
p=(datos[2])
fp=(datos[3])
reactiva=(datos[4])
s=(datos[5])
c=c+1
#data.append(s)#
for gh in range(1,120):
data.append(datos[gh])
for gh in range(301,420):
data2.append(datos[gh])
for gh in range(601,720):
data3.append(datos[gh])
#time.sleep(31)
#data=[datos[1], datos[0], 1.0, 0.73, datos[1], -0.7]#the data to plot
gplot("set terminal svg")
g2("set terminal svg")
g3("set terminal svg")
gplot.hardcopy(filename='/var/www/html/imagenes/grafica1.png', terminal='png')
#write
g2a.hardcopy(filename='/var/www/html/imagenes/grafica2.png', terminal='png')
#write
g3.hardcopy(filename='/var/www/html/imagenes/grafica3.png', terminal='png')
#write
gplot.plot(data)#plot the data
g2.plot(data2)#plot the data
g3.plot(data3)#plot the data
time.sleep(15)

```

## 6 Diseño de un graficador de voltaje teórico usando aproximación de Taylor.

### 6.1 Programa 3.

El lenguaje de este programa son comandos internos de Gnuplot

```

f(x)=x-(x**3)/gamma(4)+(x**5)/gamma(6)-(x**7)/gamma(8)+(x**9)/gamma(10)-
(x**11)/gamma(12)+(x**13)/gamma(14)-(x**15)/gamma(16)
plot[-5:5][-2:2]f(x)

```

Como se puede apreciar, para el polinomio de Taylor, se usa la función Gamma como susti-

tución del factorial, porque es la opción disponible para “Gnuplot”, la relación entre el factorial y Gamma, está descrita por Casteleiro en [4], dada por:

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

Este código presentado genera la Figura 5, encontrada a continuación:

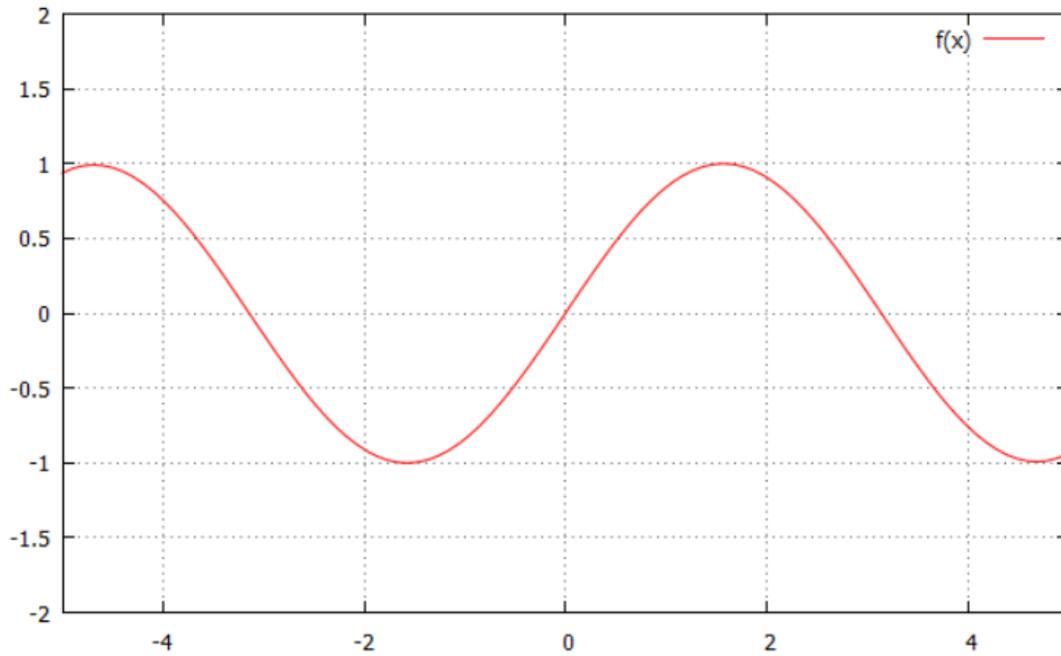


Figura 5: Gráficas de aproximación de Taylor del Voltaje

Con este análisis se obtuvo la gráfica voltaje teórico,  $V_{teórico}(x)$ , la cual se identifica simplemente  $V(t)$  de ahora en adelante y, para el tratamiento práctico del error simplemente, se restó el valor de la función  $\sin(x)$ , menos el valor del polinomio de Taylor,  $P_{Taylor}(\sin(x))$ . Así, según Apostol en [2]

$$Error(x) = \sin(x) - P_{Taylor}(\sin(x))$$

Pero, mejor aún es usar, el término complementario de una serie de Taylor, según la ecuación Lagrange y Cauchy del residuo presentada en [2]. Siendo operativamente imposible trabajar con infinitos términos, se hace

$$V(t) = V_o \sin(\omega t + \phi) = V_o \sin(x) = V_o \left( x - \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \right)$$

Luego, para un Taylor de grado 15, queda  $V(t) = V_o \sin(\omega t + \phi)$ , es decir,

$$V_o \sin(x) = V_o \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!} + \sum_{i=8}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \right),$$

es decir,

$$V(t) = V_o \sin(\omega t + \phi) = V_o \sin(x) = V_o \left( x - \sum_{i=1}^7 (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + \sum_{i=8}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \right)$$

Ahora, se considera el primer término de la segunda serie y despreciamos los siguientes infinitésimos de esa segunda serie, usando la cota  $M$ , se resuelve

$$V(t) = V_o \sin(\omega t + \phi) = V_o \sin(x) = V_o \left( x - \sum_{i=1}^7 (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + M \sum_{i=8}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \right)$$

El término acotado se denomina  $Error(x)$  o término complementario de un polinomio de Taylor, así

$$Error(x) = M \sum_{i=8}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

En este caso el término complementario de polinomio de grado 15 ( $T_{15}$ ), con  $x = -5$  y  $M$  la cota máxima del  $\sin(x) = 1$

$$E(-5) = \left| \frac{x^{17}}{(17)!} M \right|$$

Evaluando  $Error(x)$  en  $x = -5$  se tiene queda

$$Error(x) = -0,002144972,$$

si el error porcentual o clase es igual a  $\frac{0,002144972}{\sin(-5)}$ . Clase= 0,22 (Con un Taylor de un grado menor la clase es mayor a 2, y el patrón de medición no puede ser menos exacto).

## 6.2 Ensamblaje del medidor y graficador de voltaje, corriente y potencia aparente.

Adicionalmente se realizó el diagrama de conexión eléctrica del prototipo del medidor de variables presentado en Figura 6.

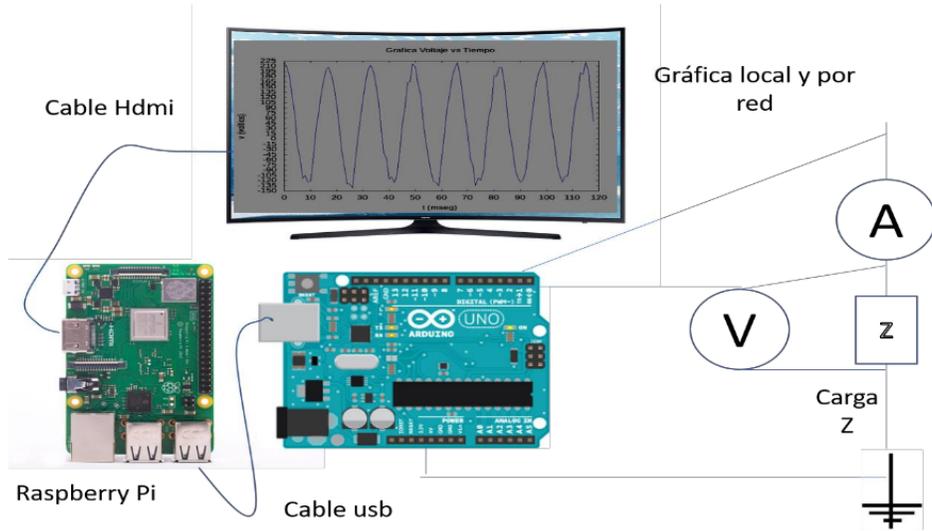


Figura 6: *Circuito eléctrico prototipo*

Así mismo, se presenta la conexión usada para aumentar el alcance del sensor de 25V a 357V, según Trujillo en [11], la cual traslada la señal 9V, por tal motivo se agrega una batería de 9v para cancelar esa traslación, adicional se usa un transformador de medidas para alimentar la bobina voltimétrica, indica Ras en [8]. La cual se observa en la Figura 7.

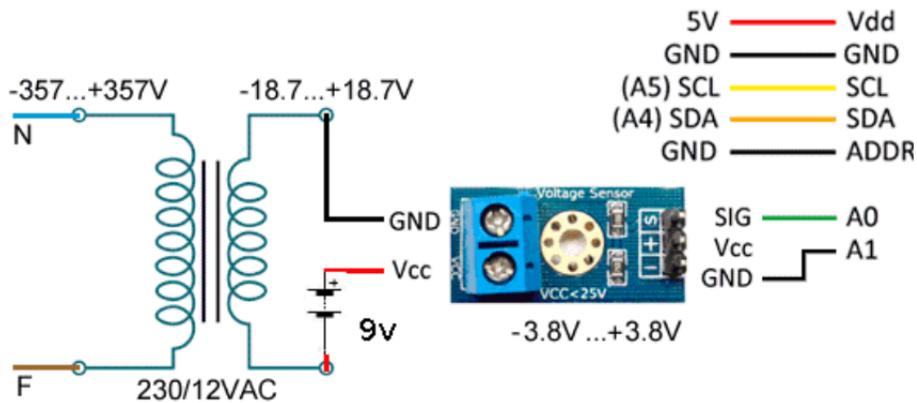


Figura 7: *Circuito y conexión eléctrica del sensor de voltaje*



Figura 8: *Circuito eléctrico ensamblado*

## 7 Conclusiones

Una vez realizada y culminado el proceso de graficación, se puede decir que se concluye que:

- Se pudo graficar 7 ciclos o períodos de onda del voltaje instantáneo, corriente instantánea, potencia aparente instantánea y voltaje teórico instantáneo sin inconvenientes.
- Se graficó la potencia aparente, la cual coincidió con los valores de las cargas, en los casos de carga resistiva pura y el otro tipo de carga fue un bombillo o foco fluorescente.
- Se observó remotamente desde el computador conectado a la red LAN las gráficas de los distintos parámetros eléctricos característicos.
- Comparando el voltaje medido con el teórico, se observa que coinciden en período, mas no en fase. La función resultante de voltaje teórico será una función más exacta en la medida que tenga un gran número de términos.
- Comparando el voltaje medido con el teórico, se observa que coinciden en periodo, mas no en fase. La función resultante de voltaje teórico será una función más exacta en la medida que tenga un gran número de términos.
- Referente a la potencia aparente  $S$ , el error = 1,504%, prácticamente, la clase= 1,5; lo cual es muy bueno para ser una medición indirecta.
- Se necesitó un Polinomio de Taylor de grado 15, para que la clase del voltaje teórico fuera menor que la clase de las demás mediciones.

## 8 Recomendaciones

Para ver por internet las gráficas hay que hacer un reenvío (forwarding) del tráfico de red del puerto 80 del Raspberry en el router conectado al ISP (Internet Server Provider) de la red.

Agregar botones en el monitor de página web, que permitan cambiar el rango del eje X, del eje Y, y poder moverse por la gráfica.

Aumentar los términos de Taylor, para tener mayor precisión, como tal falta sincronizar la gráfica de voltaje medido con el voltaje teórico, por algún método.

## Referencias

- [1] Alexander, C. y Sadiku M. *Fundamentos de circuitos eléctricos*. 3ª Edición . México: McGraw-Hill, 370-468. 2006.
- [2] Apostol, T. *Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. 2ª Edición. Barcelona. España: Editorial Reverte, 341-368. 2001.
- [3] Banzi, M. y Shiloh, M. *Introducción a Arduino*. California, USA. Anaya Editores, 68-69. 2016.
- [4] Casteleiro, J. y Paniagua R. *Cálculo integral*. Madrid, España. ESIC Editorial, 473-478. 2002.
- [5] Helfrick, A. y Cooper W. *Instrumentación electrónica moderna y técnicas de medición*. Barcelona, México. Prentice-Hall Hispoamericana, 1-8. 1991
- [6] Jarnet , P. *GnuPlot in Action*. New York, USA. Manning Publications, 7-299. 2010.
- [7] Pilgrim, M. *Dive into Python 3*. New York, USA. Apress Press, 1-344. 2009.
- [8] Ras, E. *Transformadores de potencia, de medida y de protección*. Barcelona, España. Marcombo Boixareu Editores, 7ª Edición, 179-180. 1998.
- [9] Ray, R. *Raspberry Pi: Guía paso a paso para dominar el Hardware y Software de Raspberry PI 3*. New York, USA. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2018s, 7-299. 2010.
- [10] Rivera, A. *Cálculo integral. Sucesiones y series de funciones*. México, México, Editorial Patria, 1ª Edición, 228-232. 1998.
- [11] Trujillo, E. *Analizador de consumo de potencia eléctrica con arduino*. Madrid, España. Universidad Carlos III de Madrid, 1ª Edición, 24-25. 2015. Documento on line disponible en: <https://e-archivo.uc3m.es/handle/10016/23628>.
- [12] Valkerbug, V. *Análisis de redes*. Editorial Limusa. ISBN: 9789681801786, 3ª Edición, 35-36. 1999.
- [13] ACS712 Datasheet. *AllDatasheet.es*. Allegro Microsystems, n.d. Documento on line disponible en: <http://www.alldatasheet.es/datasheet-pdf/pdf/168326/ALLE-GRO/ACS712.html>.

- [14] B25 Modulo de tablero voltaje del Sensor para Arduino – azul. *DealExtreme.com*. N.p., n.d. Documento on line disponible en: [http://www.dx.com/es/p/b25-voltage-sensor-board-module-for-arduino-blue-379810?tc=EUR&gclid=CjwKEAju3uWuBRD\\_s-3a8-\\_h6j0SJA-CqgtH3p0Yo6N5hhX5qfkr8gDnND2X14jsGRk6rmQvFHBBuRoCiTbw\\_wcB#.VdodYZR\\_v1s](http://www.dx.com/es/p/b25-voltage-sensor-board-module-for-arduino-blue-379810?tc=EUR&gclid=CjwKEAju3uWuBRD_s-3a8-_h6j0SJA-CqgtH3p0Yo6N5hhX5qfkr8gDnND2X14jsGRk6rmQvFHBBuRoCiTbw_wcB#.VdodYZR_v1s)

# Coincidences in the Padovan and Tribonacci sequences

*Coincidencias en las sucesiones de Padovan y Tribonacci*

Santos Hernández Hernández (shh@uaz.edu.mx)

Unidad Académica de Matemáticas  
Universidad Autónoma de Zacatecas, Campus II  
Calzada Solidaridad esquina Camino a la Bufa S/N  
C.P. 98000  
Zacatecas, Zac.  
Mexico

## Abstract

Let  $(P_n)_{n \geq 0}$  be the *Padovan sequence* given by  $P_0 = 0, P_1 = P_2 = 1$  and the recurrence formula  $P_{n+3} = P_{n+1} + P_n$  for all  $n \geq 0$ . Let  $(T_n)_{n \geq 0}$  be the *Tribonacci sequence* given by  $T_0 = 0, T_1 = T_2 = 1$  and the recurrence formula  $T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$  for all  $n \geq 0$ . In this note we solve the Diophantine equation

$$P_n = T_m$$

in non-negative integers  $n, m$ . In particular, we find all the elements in the intersection of the Padovan and Tribonacci sequences.

**Key words and phrases:** Padovan, Tribonacci sequences, Linear forms in logarithms, reduction method.

## Resumen

Sea  $(P_n)_{n \geq 0}$  la *sucesión de Padovan* definida mediante  $P_0 = 0, P_1 = P_2 = 1$  y la fórmula de recurrencia  $P_{n+3} = P_{n+1} + P_n$  para todo  $n \geq 0$ . Sea  $(T_n)_{n \geq 0}$  la *sucesión de Tribonacci* definida mediante  $T_0 = 0, T_1 = T_2 = 1$  y la fórmula de recurrencia  $T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$  para todo  $n \geq 0$ . En este escrito resolvemos la ecuación Diofántica

$$P_n = T_m$$

en enteros no negativos  $n, m$ . En particular, encontramos todos los elementos en la intersección de las sucesiones de Padovan y Tribonacci.

**Palabras y frases clave:** Sucesiones de Padovan y Tribonacci, Formas lineales en logaritmos, Método de reducción.

## 1 Introduction

Let  $(P_n)_{n \geq 0}$  be the *Padovan sequence*, named after the architect R. Padovan, given by  $P_0 = 0$ ,  $P_1 = P_2 = 1$  and the recurrence formula

$$P_{n+3} = P_{n+1} + P_n, \quad \text{for all } n \geq 0. \quad (1.1)$$

This is sequence A000931 in [12]. The first few terms of this sequence are

$$0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, \dots$$

Recently, some arithmetic properties of the Padovan sequence have been studied. Indeed, let  $(F_n)_{n \geq 0}$  be the *Fibonacci sequence* given by the initial conditions  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  and the recurrence formula  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  for all  $n \geq 0$ . In [13], Stewart asks for the intersection of the Fibonacci and the Padovan sequences. In [14] De Weger solves this problem. He actually proves that the distance between Fibonacci and Padovan numbers grows exponentially. In [7] it is solved the problem of the intersection of the Padovan sequence and the powers of 2 and also the powers of 2 which can be written as sum of two terms of the Padovan sequence.

Now, let  $(T_n)_{n \geq 0}$  be the *Tribonacci sequence* defined by  $T_0 = 0$ ,  $T_1 = T_2 = 1$  and the recurrence formula

$$T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n \quad (1.2)$$

holds for all  $n \geq 0$ . The first few terms of this sequence are

$$0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, \dots$$

In this note, as a natural generalization of Stewart problem, we shall study the problem of the intersection of the Padovan and the Tribonacci sequences. More precisely, we will study the Diophantine equation

$$P_n = T_m \quad (1.3)$$

in non-negative integers  $n, m$ . Since  $P_1 = P_2 = P_3 = 1$ ,  $P_4 = P_5 = 2$  we assume that  $n \neq 1, 2, 4$ . That is, whenever we think of 1 and 2 as members of the Padovan sequence, we think of them as being  $P_3$  and  $P_5$ , respectively. In the same way, as  $T_1 = T_2 = 1$  we assume that  $m \neq 1$ . With these conventions, we prove the following result:

**Theorem 1.1.** *All non-negative solutions  $(n, m)$  of equation (1.3) belong to the set*

$$\{(0, 0), (3, 2), (5, 3), (7, 4), (9, 5)\}.$$

The intersection of the Tribonacci sequence with the Fibonacci one is studied in [9] and, it is a particular case in [3]. There are general results concerning the intersection of two linear recurrence sequences, see for example [11] and [2].

## 2 Tools

In this section, we gather the tools we need to prove Theorem 1.1. Let  $\alpha$  be an algebraic number of degree  $d$ . Let  $a$  be the leading coefficient of its minimal polynomial over  $\mathbb{Z}$  and let  $\alpha^{(1)} = \alpha, \dots, \alpha^{(d)}$  denote the conjugates of  $\alpha$ . The *logarithmic height* of  $\alpha$  is defined as

$$h(\alpha) = \frac{1}{d} \left( \log a + \sum_{i=1}^d \log \max\{|\alpha^{(i)}|, 1\} \right).$$

This height has the following basic properties. For  $\alpha, \beta$  algebraic numbers and  $m \in \mathbb{Z}$ , we have:

- $h(\alpha + \beta) \leq h(\alpha) + h(\beta) + \log 2$ .
- $h(\alpha\beta) \leq h(\alpha) + h(\beta)$ .
- $h(\alpha^m) = |m|h(\alpha)$ .

Now let  $\mathbb{L}$  be a real number field of degree  $d_{\mathbb{L}}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell} \in \mathbb{L}$  with  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , and  $b_1, \dots, b_{\ell} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Let  $B \geq \max\{|b_1|, \dots, |b_{\ell}|\}$  and

$$\Lambda = \alpha_1^{b_1} \cdots \alpha_{\ell}^{b_{\ell}} - 1.$$

Let  $A_1, \dots, A_{\ell}$  be real numbers such that

$$A_i \geq \max\{d_{\mathbb{L}}h(\alpha_i), |\log \alpha_i|, 0.16\} \quad \text{for all } i = 1, \dots, \ell.$$

The first tool we need is the following result due to Matveev in [10] (see also Theorem 9.4 in [5]).

**Theorem 2.1.** *Assume that  $\Lambda \neq 0$ . Then*

$$\log |\Lambda| > -1.4 \times 30^{\ell+3} \times \ell^{4.5} \times d_{\mathbb{L}}^2 (1 + \log d_{\mathbb{L}})(1 + \log B)A_1 \cdots A_{\ell}.$$

The second one, is a version of a reduction method of Baker-Davenport based on Lemma in [1]. We shall use the one given by Bravo, Gómez and Luca in [4]. For a real number  $x$ , we write

$$\|x\| = \min\{|x - n| : n \in \mathbb{Z}\}.$$

**Lemma 2.1.** *Let  $M$  be a positive integer. Let  $\tau, \mu, A > 0, B > 1$  be given real numbers. Assume that the convergent  $p/q$  of  $\tau$  is such that  $q > 6M$  and  $\varepsilon := \|q\mu\| - M\|q\tau\| > 0$ . Then the inequality*

$$0 < |n\tau - m + \mu| < \frac{A}{B^w}$$

*does not has a solution in positive integers  $n, m$  and  $w$  in the ranges*

$$n \leq M \quad \text{and} \quad w \geq \frac{\log(Aq/\varepsilon)}{\log B}.$$

This lemma is a slightly variation of the one given by Dujella and Pethő in [6]. Finally, the following lemma is also useful. It is Lemma 6 in [8].

**Lemma 2.2.** *If  $T > 3$  and  $T > x/(\log x)$ , then*

$$x < 2T \log T.$$

### 3 Proof of Theorem 1.1

We start with some properties of our sequences. For a complex number  $z$  we write  $\bar{z}$  for its complex conjugate. Let  $\omega \neq 1$  be a cubic root of 1. Put

$$\gamma := \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{69}}{18}}, \quad \delta := \omega \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{69}}{18}} + \bar{\omega} \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{69}}{18}},$$

and

$$\alpha := \frac{1}{3} \left( 1 + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} \right),$$

$$\beta := \frac{1}{3} \left( 1 + \omega \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \bar{\omega} \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} \right).$$

It is clear that  $\gamma, \delta, \bar{\delta}$  are the roots of  $X^3 - X - 1$  and, that  $\alpha, \beta, \bar{\beta}$  are the roots of  $X^3 - X^2 - X - 1$ . These polynomials are both irreducible over  $\mathbb{Q}$ . It can be proved, by induction for example, the Binet formulas

$$P_n = c_1 \gamma^n + c_2 \delta^n + c_3 \bar{\delta}^n, \quad \text{and} \quad T_n = d_1 \alpha^n + d_2 \beta^n + d_3 \bar{\beta}^n \quad (3.1)$$

which hold for all  $n \geq 0$ , where

$$c_1 = \frac{\gamma(\gamma + 1)}{2\gamma + 3}, \quad c_2 = \frac{\delta(\delta + 1)}{2\delta + 3}, \quad c_3 = \bar{c}_2 \quad (3.2)$$

and

$$d_1 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 2\alpha + 3}, \quad d_2 = \frac{\beta^2}{\beta^2 + 2\beta + 3}, \quad d_3 = \bar{d}_2. \quad (3.3)$$

The formulas (3.1) follows from the general theorem on linear recurrence sequences since the above polynomials are the characteristic polynomials of the Padovan and the Tribonacci sequences, respectively. We note that

$$\gamma = 1.32471\dots, \quad |\delta| = 0.86883\dots, \quad c_1 = 0.54511\dots, \quad |c_2| = 0.28241\dots$$

and

$$\alpha = 1.83928\dots, \quad |\beta| = 0.73735\dots, \quad d_1 = 0.33622\dots, \quad |d_2| = 0.25999\dots$$

Further, the inequalities

$$\gamma^{n-3} \leq P_n \leq \gamma^{n-1}, \quad \alpha^{n-2} \leq T_n \leq \alpha^{n-1} \quad (3.4)$$

also hold for all  $n \geq 1$ . These can be proved by induction.

Now we begin with the study of equation (1.3). If  $n = 0$  then  $0 = T_m$  implies  $m = 0$ . Thus we assume that  $n \geq 1$  and  $m \geq 1$ . By combining inequalities (3.4) we have

$$\gamma^{n-3} \leq P_n = T_m \leq \alpha^{m-1} \quad \text{and} \quad \gamma^{n-1} \geq P_n = T_m \geq \alpha^{m-2}. \quad (3.5)$$

From these we obtain

$$(n-3) \frac{\log \gamma}{\log \alpha} \leq (m-1) \quad \text{and} \quad (n-1) \frac{\log \gamma}{\log \alpha} \geq (m-2). \quad (3.6)$$

Since  $\log \gamma / \log \alpha = 0.461453\dots$  we have that if  $n \leq 200$  then  $m \leq 93$ . A quick search with *Mathematica* in the range  $0 \leq n \leq 200$ ,  $0 \leq m \leq 93$  and, with our conventions, we obtain all solutions listed in Theorem 1.1.

From now on we assume that  $n > 200$ . Further, from (3.6) we obtain  $m > 91$  and also  $n > m$ . From the Binet formulas (3.1) we rewrite our equation as

$$c_1 \gamma^n - d_1 \alpha^m = d_2 \beta^m + d_3 \bar{\beta}^m - c_2 \delta^n - c_3 \bar{\delta}^n.$$

By taking absolute values, we get

$$|c_1\gamma^n - d_1\alpha^m| < 1,$$

from our assumption on  $m$  and  $n$ . Thus, dividing through by  $d_1\alpha^m$  and from (3.5) we obtain

$$\left| \frac{c_1}{d_1}\gamma^n\alpha^{-m} - 1 \right| < \frac{1}{d_1\alpha^m} \leq \frac{1}{d_1\alpha\gamma^{n-3}} < \frac{2}{\gamma^{n-3}} < \frac{1}{\gamma^{n-6}}. \quad (3.7)$$

Let  $\Lambda$  be the expression inside the absolute value. We claim that  $\Lambda \neq 0$ . To see this, we consider the  $\mathbb{Q}$ -automorphism  $\sigma$  of the Galois extension  $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  of  $\mathbb{Q}$  given by  $\sigma(\alpha) = \alpha$ ,  $\sigma(\beta) = \beta$ ,  $\sigma(\gamma) = \delta$ ,  $\sigma(\delta) = \alpha$ . Thus,  $\sigma(\bar{\beta}) = \bar{\beta}$  and  $\sigma(\bar{\delta}) = \bar{\delta}$ . If  $\Lambda = 0$  then  $\sigma(\Lambda) = 0$ . Thus

$$c_2\delta^n = \sigma(c_1\gamma^n) = \sigma(d_1\alpha^m) = d_1\alpha^m.$$

By taking absolute values we get

$$1 > |c_2||\delta|^n = d_1\alpha^m > 1,$$

where the left-hand side inequality is because  $1 > |c_2|, |\delta|$  and the right-hand side inequality is because  $\alpha > 1$  and  $m > 91$ , which is absurd.

Now, we shall apply Matveev's inequality to  $\Lambda$ . To do this we consider the real number field  $\mathbb{L} := \mathbb{Q}(\alpha, \gamma)$  which is of degree  $d_{\mathbb{L}} = 9$  and

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{d_1}, \alpha_2 = \gamma, \alpha_3 = \alpha, \quad b_1 = 1, b_2 = n, b_3 = -m.$$

Thus we take  $B = n$ . Further,  $h(\alpha_2) = \log \gamma/3$ , and  $h(\alpha_3) = \log \alpha/3$ . For  $h(\alpha_1)$  we use the properties of the height and conclude that

$$h(\alpha_1) \leq \log \gamma + \frac{5}{3} \log \alpha + 10 \log 2.$$

Thus we take  $A_1 = 74.1$ ,  $A_2 = 0.85$ ,  $A_3 = 1.9$ . Now, from Theorem 2 we have

$$\log |\Lambda| > -1.4 \cdot 30^6 \cdot 3^{4.5} \cdot 9^2 \cdot (1 + \log 9) \cdot (1 + \log n) \cdot 74.1 \cdot 0.85 \cdot 1.9$$

which compared with (3.7) we get

$$(n - 6) \log \gamma < 4.43763 \times 10^{15} (2 \log n),$$

where we use  $1 + \log n < 2 \log n$  since  $n > 200$ . Thus  $n < 3.15623 \times 10^{16} \log n$  and, from Lemma 2.2 we conclude that

$$n < 2.39815 \times 10^{18}. \quad (3.8)$$

Now we reduce this upper bound on  $n$ . To do this, let  $\Gamma$  be defined as

$$\Gamma = n \log \gamma - m \log \alpha + \log \frac{c_1}{d_1},$$

and we go to (3.7). Observe that  $e^\Gamma - 1 = \Lambda \neq 0$ . Thus  $\Gamma \neq 0$ . If  $\Gamma > 0$  we obtain

$$0 < \Gamma < e^\Gamma - 1 = \Lambda = |\Lambda| < \frac{1}{\gamma^{n-6}}.$$

If  $\Gamma < 0$ , we then have  $1 - e^\Gamma = |e^\Gamma - 1| = |\Lambda| < 1/2$  since  $n > 200$ . This implies that  $e^{|\Gamma|} < 2$ . Thus,

$$0 < |\Gamma| < e^{|\Gamma|} - 1 = e^{|\Gamma|} |\Lambda| < \frac{2}{\gamma^{n-6}}.$$

So, in both cases we have

$$0 < |\Gamma| < \frac{2}{\gamma^{n-6}}.$$

Dividing through by  $\log \alpha$  we obtain

$$0 < |n\tau - m + \mu| < \frac{2\gamma^6}{\log \alpha} \frac{1}{\gamma^n} < \frac{18}{\gamma^n} \quad (3.9)$$

where

$$\tau := \frac{\log \gamma}{\log \alpha}, \quad \mu := \frac{\log(c_1/d_1)}{\log \alpha}.$$

Now we will apply Lemma 2.1. To do this, we take  $M := 2.39815 \times 10^{18}$  which is the upper bound on  $n$  by (3.8). With the help of *Mathematica* we found that the convergent

$$\frac{p_{31}}{q_{31}} = \frac{6879714423060542181}{14908790976189525844}$$

of  $\tau$  is such that  $q_{31} > 6M$  and  $\varepsilon = \|q_{31}\mu\| - M\|q_{31}\tau\| = 0.400051 > 0$ . Thus, from Lemma 2.1 with  $A := 18$ ,  $B := \gamma$  we get

$$n < \frac{\log(18q_{31}/\varepsilon)}{\log \gamma} < 171,$$

which contradicts our assumption on  $n$ . This completes the proof of Theorem 1.1.

## References

- [1] A. Baker, H. Davenport, *The equations  $3X^2 - 2 = Y^2$  and  $8X^2 - 7 = Z^2$* , Quart. J. Math. Oxford **20**(2)(1969), 129–137.
- [2] M. Bennett, A. Pintér, *Intersections of recurrence sequences*, Proc. Amer. Math. Society, **143**(2015), 2347–2353.
- [3] J.J. Bravo, F. Luca, *Coincidences in generalized Fibonacci sequences*, J. Number Theory, **133**(2013), 2121–2137.
- [4] J.J. Bravo, C. A. Gomez, F. Luca, *Powers of two as sums of two  $k$ -Fibonacci numbers*, Miskolc Math. Notes, **17**(1)(2016), 85–100.
- [5] Y. Bugeaud, M. Mignotte, S. Siksek, *Classical and modular approaches to exponential diophantine equations I: Fibonacci and Lucas perfect powers*, Ann. of Math. **163**(2006), 969–1018.
- [6] A. Dujella, A. Pethő, *A generalization of a theorem of Baker and Davenport*, Quart. J. Math. Oxford, **49** (3)(1998), 291–306.

- [7] A.C. García Lomelí, S. Hernández Hernández, *Powers of two as sums of to Padovan numbers*, submitted.
- [8] S. Guzmán Sánchez, F. Luca, *Linear combinations of factorials and S-units in a binary recurrence sequence*, Ann. Math. Québec, **38**(2014), 169–188.
- [9] D. Marques, *On the intersection of two distinct k-generalized Fibonacci sequences*, Mat. Bohemica, **137**(4)(2012), 403–413.
- [10] E. M. Matveev, *An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in the logarithms of algebraic numbers II*, Izv. Math **64**(6)(2000), 1217–1269.
- [11] M. Mignotte, *Intersection des images de certaines suites récurrentes linéaires*, Theoret. Comput. Science, **7**(1978), 117-122.
- [12] N. J. A. SLOANE, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, <https://oeis.org/>
- [13] I. Stewart, *Mathematical recreations: Tales of a neglected number*, Sci. American, **274**(1996), 92–93.
- [14] B.M.M. de Weger, *Padua and Pisa are exponentially far apart*, Pub. Matemàtiques, **41**(1997), 631–651.

# On contra $e^*\theta$ -continuous functions

*En funciones contra  $e^*\theta$ -continuas*

Burcu Sünbül Ayhan (brcyhn@gmail.com)

Murad Özkoç (murad.ozkoc@mu.edu.tr)

Muğla Sıtkı Koçman University  
Faculty of Science Department of Mathematics  
48000 Menteşe-Muğla/TURKEY

## Abstract

The main goal of this paper is to introduce and study a new type of contra continuity called contra  $e^*\theta$ -continuity. Also, we obtain fundamental properties and several characterizations of contra  $e^*\theta$ -continuous functions via  $e^*$ - $\theta$ -closed sets which are defined by Farhan and Yang [11]. Moreover, we investigate the relationships between contra  $e^*\theta$ -continuous functions and other related generalized forms of contra continuity.

**Key words and phrases:**  $e^*$ - $\theta$ -open set,  $e^*$ - $\theta$ -closed set, contra  $e^*\theta$ -continuity,  $e^*\theta$ -continuity, contra  $e^*\theta$ -closed graph.

## Resumen

El objetivo principal de este documento es presentar y estudiar un nuevo tipo de contra continuidad llamada contra  $e^*\theta$ -continuidad. Además, obtenemos propiedades fundamentales y varias caracterizaciones de funciones contra  $e^*\theta$ -continuas a través de conjuntos  $e^*$ - $\theta$  cerrados que están definidos por Farhan y Yang [11]. Además, investigamos las relaciones entre las funciones contra continuas y otras formas generalizadas relacionadas de  $e^*\theta$ -continuidad de contra.

**Palabras y frases clave:**  $e^*$ - $\theta$ -conjunto abierto,  $e^*$ - $\theta$ -conjunto cerrado, contra  $e^*\theta$ -continuidad,  $e^*\theta$ -continuidad, contra  $e^*\theta$ -gráfico cerrado.

## 1 Introduction

In 1996, the concept of contra continuity [6], which is stronger than contra  $\alpha$ -continuity [12], contra precontinuity [13], contra semicontinuity [7], contra  $b$ -continuity [17], contra  $\beta$ -continuity [5], is defined by Dontchev. Many results have been obtained related to the notions mentioned above recently. In this paper, we define and study the notion of contra  $e^*\theta$ -continuity which is stronger than contra  $e^*$ -continuity [10] and weaker than contra  $\beta\theta$ -continuity [4]. Also, we obtain several characterizations of contra  $e^*\theta$ -continuous functions and investigate their some fundamental properties. Moreover, we investigate the relationships between contra  $e^*\theta$ -continuous functions and separation axioms and contra  $e^*\theta$ -closedness of graphs of functions.

---

Received 28/05/2018. Revised 15/08/2019. Accepted 25/11/2018.

MSC (2000): Primary 54C08, 54C10; Secondary 54C05.

Corresponding author: Murad Özkoç

## 2 Preliminaries

Throughout this present paper,  $X$  and  $Y$  represent topological spaces. For a subset  $A$  of a space  $X$ ,  $cl(A)$  and  $int(A)$  denote the closure of  $A$  and the interior of  $A$ , respectively. The family of all closed (resp. open, clopen) sets of  $X$  is denoted  $C(X)$  (resp.  $O(X), CO(X)$ ). A subset  $A$  is said to be regular open [23] (resp. regular closed [23]) if  $A = int(cl(A))$  (resp.  $A = cl(int(A))$ ). A point  $x \in X$  is said to be  $\delta$ -cluster point [24] of  $A$  if  $int(cl(U)) \cap A \neq \emptyset$  for each open neighbourhood  $U$  of  $x$ . The set of all  $\delta$ -cluster points of  $A$  is called the  $\delta$ -closure [24] of  $A$  and is denoted by  $cl_\delta(A)$ . If  $A = cl_\delta(A)$ , then  $A$  is called  $\delta$ -closed [24], and the complement of a  $\delta$ -closed set is called  $\delta$ -open [24]. The set  $\{x | (U \in O(X, x))(int(cl(U)) \subseteq A)\}$  is called the  $\delta$ -interior of  $A$  and is denoted by  $int_\delta(A)$ .

A subset  $A$  is called  $\alpha$ -open [18] (resp. semiopen [14], preopen [15],  $b$ -open [2],  $\beta$ -open [1],  $e$ -open [8],  $e^*$ -open [9]) if  $A \subseteq int(cl(int(A)))$  (resp.  $A \subseteq cl(int(A))$ ,  $A \subseteq int(cl(A))$ ,  $A \subseteq int(cl_\delta(A))$ ,  $A \subseteq cl(int(A) \cup int(cl(A)))$ ,  $A \subseteq cl(int(cl(A)))$ ,  $A \subseteq cl(int_\delta(A) \cup int(cl_\delta(A))$ ,  $A \subseteq cl(int(cl_\delta(A)))$ ). The complement of an  $\alpha$ -open (resp. semiopen, preopen,  $b$ -open,  $\beta$ -open,  $e$ -open,  $e^*$ -open) set is called  $\alpha$ -closed [18] (resp. semiclosed [14], preclosed [15],  $b$ -closed [2],  $\beta$ -open [1],  $e$ -closed [8],  $e^*$ -closed [9]). The intersection of all  $e^*$ -closed (resp. semi-closed, pre-closed) sets of  $X$  containing  $A$  is called the  $e^*$ -closure [9] (resp. semi-closure [14], pre-closure [15]) of  $A$  and is denoted by  $e^*cl(A)$  (resp.  $scl(A)$ ,  $pcl(A)$ ). The union of all  $e^*$ -open (resp. semiopen, preopen) sets of  $X$  contained in  $A$  is called the  $e^*$ -interior [9] (resp. semi-interior [14], pre-interior [15]) of  $A$  and is denoted by  $e^*int(A)$  (resp.  $sint(A)$ ,  $pint(A)$ ).

The union of all  $e^*$ -open sets of  $X$  contained in  $A$  is called the  $e^*$ -interior [9] of  $A$  and is denoted by  $e^*int(A)$ . A subset  $A$  is said to be  $e^*$ -regular [11] if it is  $e^*$ -open and  $e^*$ -closed. The family of all  $e^*$ -regular subsets of  $X$  is denoted by  $e^*R(X)$ .

A point  $x$  of  $X$  is called an  $e^*$ - $\theta$ -cluster ( $\beta$ - $\theta$ -cluster) point of  $A$  if  $e^*cl(U) \cap A \neq \emptyset$  for every  $e^*$ -open (resp.  $\beta$ -open) set  $U$  containing  $x$ . The set of all  $e^*$ - $\theta$ -cluster ( $\beta$ - $\theta$ -cluster) points of  $A$  is called the  $e^*$ - $\theta$ -closure [11] ( $\beta$ - $\theta$ -closure [19]) of  $A$  and is denoted by  $e^*cl_\theta(A)$  ( $\beta-cl_\theta(A)$ ). A subset  $A$  is said to be  $e^*$ - $\theta$ -closed [11] ( $\beta$ - $\theta$ -closed [19]) if  $A = e^*cl_\theta(A)$  ( $A = \beta-cl_\theta(A)$ ). The complement of an  $e^*$ - $\theta$ -closed ( $\beta$ - $\theta$ -closed) set is called an  $e^*$ - $\theta$ -open [11] ( $\beta$ - $\theta$ -open [19]) set. A point  $x$  of  $X$  is said to be an  $e^*$ - $\theta$ -interior [11] ( $\beta$ - $\theta$ -interior [19]) point of a subset  $A$ , denoted by  $e^*int_\theta(A)$  ( $\beta-int_\theta(A)$ ), if there exists an  $e^*$ -open ( $\beta$ -open) set  $U$  of  $X$  containing  $x$  such that  $e^*cl(U) \subseteq A$  ( $\beta-cl(U) \subseteq A$ ). Also it is noted in [11] that

$$e^*\text{-regular} \Rightarrow e^*\text{-}\theta\text{-open} \Rightarrow e^*\text{-open}.$$

The family of all open (resp. closed,  $e^*$ - $\theta$ -open,  $e^*$ - $\theta$ -closed,  $e^*$ -open,  $e^*$ -closed, regular open, regular closed,  $\delta$ -open,  $\delta$ -closed, semiopen, semiclosed, preopen, preclosed) subsets of  $X$  is denoted by  $O(X)$  (resp.  $C(X)$ ,  $e^*\theta O(X)$ ,  $e^*\theta C(X)$ ,  $e^*O(X)$ ,  $e^*C(X)$ ,  $RO(X)$ ,  $RC(X)$ ,  $\delta O(X)$ ,  $\delta C(X)$ ,  $SO(X)$ ,  $SC(X)$ ,  $PO(X)$ ,  $PC(X)$ ). The family of all open (resp. closed,  $e^*$ - $\theta$ -open,  $e^*$ - $\theta$ -closed,  $e^*$ -open,  $e^*$ -closed, regular open, regular closed,  $\delta$ -open,  $\delta$ -closed, semiopen, semiclosed, preopen, preclosed) sets of  $X$  containing a point  $x$  of  $X$  is denoted by  $O(X, x)$  (resp.  $C(X, x)$ ,  $e^*\theta O(X, x)$ ,  $e^*\theta C(X, x)$ ,  $e^*O(X, x)$ ,  $e^*C(X, x)$ ,  $RO(X, x)$ ,  $RC(X, x)$ ,  $\delta O(X, x)$ ,  $\delta C(X, x)$ ,  $SO(X, x)$ ,  $SC(X, x)$ ,  $PO(X, x)$ ,  $PC(X, x)$ ).

We shall use the well-known accepted language almost in the whole of the proofs of the theorems in this article. The following basic properties of  $e^*$ -closure and  $e^*$ -interior are useful in the sequel:

**Lemma 2.1.** [9] *Let  $A$  be a subset of a space  $X$ , then the following hold:*

- (1)  $e^*\text{-cl}(X \setminus A) = X \setminus e^*\text{-int}(A)$ .
- (2)  $x \in e^*\text{-cl}(A)$  if and only if  $A \cap U \neq \emptyset$  for every  $U \in e^*O(X, x)$ .
- (3)  $A$  is  $e^*C(X)$  if and only if  $A = e^*\text{-cl}(A)$ .
- (4)  $e^*\text{-cl}(A) \in e^*C(X)$ .
- (5)  $e^*\text{-int}(A) = A \cap \text{cl}(\text{int}(\text{cl}_\delta(A)))$ .

**Lemma 2.2.** [11] For the  $e^*\theta$ -closure of a subset  $A$  of a topological space  $X$ , the following properties are hold:

- (1)  $A \subseteq e^*\text{-cl}(A) \subseteq e^*\text{-cl}_\theta(A)$ .
- (2) If  $A \in e^*\theta O(X)$ , then  $e^*\text{-cl}_\theta(A) = e^*\text{-cl}(A)$ .
- (3) If  $A \subseteq B$ , then  $e^*\text{-cl}_\theta(A) \subseteq e^*\text{-cl}_\theta(B)$ .
- (4)  $e^*\text{-cl}_\theta(A) \in e^*\theta C(X)$  and  $e^*\text{-cl}_\theta(e^*\text{-cl}_\theta(A)) = e^*\text{-cl}_\theta(A)$ .
- (5) If  $A_\alpha \in e^*\theta C(X)$  for each  $\alpha \in \Lambda$ , then  $\cap\{A_\alpha | \alpha \in \Lambda\} \in e^*\theta C(X)$ .
- (6) If  $A_\alpha \in e^*\theta O(X)$  for each  $\alpha \in \Lambda$ , then  $\cup\{A_\alpha | \alpha \in \Lambda\} \in e^*\theta O(X)$ .
- (7)  $e^*\text{-cl}_\theta(X \setminus A) = X \setminus e^*\text{-int}_\theta(A)$ .
- (8)  $e^*\text{-cl}_\theta(A) = \cap\{U | (A \subseteq U)(U \in e^*\theta C(X))\}$ .
- (9)  $A \in e^*O(X)$ , then  $e^*\text{-cl}_\theta(A) \in e^*R(X)$ .
- (10)  $A \in e^*R(X)$  if and only if  $A \in e^*\theta O(X) \cap e^*\theta C(X)$ .

**Lemma 2.3.** Let  $A$  be a subset of a topological space  $X$  and  $x \in X$ . The point  $x$  of  $X$  is an  $e^*\theta$ -cluster point of  $A$  if and only if  $U \cap A \neq \emptyset$  for all  $e^*\theta$ -open  $U$  containing  $x$ .

*Proof.* Let  $x \notin e^*\text{-cl}_\theta(A)$ .

$$\begin{aligned}
x \notin e^*\text{-cl}_\theta(A) &\Leftrightarrow (\exists U \in e^*\theta C(X))(A \subseteq U)(x \notin U) \\
&\Leftrightarrow (\exists \setminus U \in e^*\theta O(X))(\setminus U \subseteq \setminus A)(x \in \setminus U) \\
&\Leftrightarrow (\exists V := \setminus U \in e^*\theta O(X, x))(V \subseteq \setminus A) \\
&\Leftrightarrow (\exists V \in e^*\theta O(X, x))(V \cap A = \emptyset) \\
&\Leftrightarrow x \notin \{x | (\forall U \in e^*\theta O(X, x))(U \cap A = \emptyset)\}. \quad \square
\end{aligned}$$

**Definition 2.1.** A function  $f : X \rightarrow Y$  is said to be contra continuous [6] (resp. contra  $\alpha$ -continuous [12], contra precontinuous [13], contra semicontinuous [7], contra  $b$ -continuous [17], contra  $\beta$ -continuous [5], contra  $\beta\theta$ -continuous [4], contra  $e^*$ -continuous [10]) if  $f^{-1}[V]$  is closed (resp.  $\alpha$ -closed, preclosed, semiclosed,  $b$ -closed,  $\beta$ -closed,  $\beta\theta$ -closed,  $e^*$ -closed) in  $X$  for every open set  $V$  in  $Y$ .

**Definition 2.2.** Let  $A$  be a subset of a space  $X$ . The intersection of all open sets in  $X$  containing  $A$  is called the kernel of  $A$  [16] and is denoted by  $\text{ker}(A)$ .

**Lemma 2.4.** [16] *The following properties hold for subsets  $A$  and  $B$  of a space  $X$ .*

- (1)  $x \in \ker(A)$  if and only if  $A \cap F \neq \emptyset$  for any  $F \in C(X, x)$ .
- (2)  $A \subseteq \ker(A)$ .
- (3) If  $A$  is open in  $X$ , then  $A = \ker(A)$ .
- (4) If  $A \subseteq B$ , then  $\ker(A) \subseteq \ker(B)$ .

### 3 Contra $e^*\theta$ -continuous functions

**Definition 3.1.** A function  $f : X \rightarrow Y$  is said to be contra  $e^*\theta$ -continuous (briefly c.e $^*\theta$ .c.) if  $f^{-1}[V]$  is  $e^*\theta$ -closed in  $X$  for every open set  $V$  of  $Y$ .

**Theorem 3.1.** *For a function  $f : X \rightarrow Y$ , the following properties are equivalent:*

- (1)  $f$  is contra  $e^*\theta$ -continuous;
- (2) The inverse image of every closed set of  $Y$  is  $e^*\theta$ -open in  $X$ ;
- (3) For each point  $x \in X$  and each and each  $V \in C(Y, f(x))$ , there exists  $U \in e^*\theta O(X, x)$  such that  $f[U] \subseteq V$ ;
- (4)  $f[e^*\text{-cl}_\theta(A)] \subseteq \ker(f[A])$  for every subset  $A$  of  $X$ ;
- (5)  $e^*\text{-cl}_\theta(f^{-1}[B]) \subseteq f^{-1}[\ker(B)]$  for every subset  $B$  of  $Y$ .

*Proof.*

(1)  $\Rightarrow$  (2) : Let  $V \in C(Y)$ .

$$V \in C(Y) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \backslash V \in O(Y) \\ (1) \end{array} \right\} \Rightarrow \backslash f^{-1}[V] = f^{-1}[\backslash V] \in e^*\theta C(X) \Rightarrow f^{-1}[V] \in e^*\theta O(X)$$

(2)  $\Rightarrow$  (3) : Let  $x \in X$  and  $V \in C(Y, f(x))$ .

$$\left. \begin{array}{l} (x \in X)(V \in C(Y, f(x))) \\ (2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f^{-1}[V] \in e^*\theta O(X, x) \\ U := f^{-1}[V] \end{array} \right\} \Rightarrow (U \in e^*\theta O(X, x))(f[U] \subseteq V).$$

(3)  $\Rightarrow$  (4) : Let  $A \subseteq X$  and  $x \notin f^{-1}[\ker(f[A])]$ .

$$x \notin f^{-1}[\ker(f[A])] \Rightarrow f(x) \notin \ker(f[A]) \Rightarrow (\exists F \in C(Y, f(x)))(F \cap f[A] = \emptyset) \left. \vphantom{(\exists F \in C(Y, f(x)))(F \cap f[A] = \emptyset)} \right\} \Rightarrow (3)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (\exists U \in e^*\theta O(X, x))(f[U] \subseteq F)(F \cap f[A] = \emptyset) \\ &\Rightarrow (\exists U \in e^*\theta O(X, x))(f[U \cap A] \subseteq f[U] \cap f[A] = \emptyset) \\ &\Rightarrow (\exists U \in e^*\theta O(X, x))(U \cap A = \emptyset) \\ &\Rightarrow x \notin e^*\text{-cl}_\theta(A). \end{aligned}$$

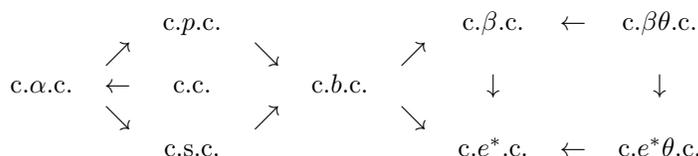
(4)  $\Rightarrow$  (5) : Let  $B \subseteq Y$ .

$$\left. \begin{aligned} B \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}[B] \subseteq X \\ (4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f[e^*cl_\theta(f^{-1}[B])] \subseteq \ker(f[f^{-1}[B]]) \subseteq \ker(B) \Rightarrow \\ \Rightarrow e^*cl_\theta(f^{-1}[B]) \subseteq f^{-1}[\ker(B)].$$

(5)  $\Rightarrow$  (1) : Let  $V \in O(Y)$ .

$$\left. \begin{aligned} V \in O(Y) \\ (5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow e^*cl_\theta(f^{-1}[V]) \subseteq f^{-1}[\ker(V)] = f^{-1}[V] \Rightarrow f^{-1}[V] \in e^*\theta C(X). \quad \square$$

*Remark 3.1.* From Definitions 3.1 and 2.1, we have the following diagram. None of these implications is reversible as shown by the following example:



*Notation 3.1.* c.c.=contra continuity, c.α.c.=contra α-continuity, c.p.c.=contra precontinuity, c.s.c.=contra semicontinuity, c.b.c.=contra b-continuity, c.β.c.=contra β-continuity, c.e\*.c.=contra e\*-continuity, c.βθ.c.=contra βθ-continuity, c.e\*θ.c.=contra e\*θ-continuity.

**Example 3.1.** Let  $X = \{a, b, c, d\}$  and  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$ . It is not difficult to see that

$$e^*\theta O(X) = e^*O(X) = 2^X \setminus \{\{d\}\} \quad \text{and} \quad \beta\theta C(X) = \{\emptyset, X, \{a, c, d\}, \{b, d\}, \{a, c\}, \{c\}, \{d\}\}.$$

Define the function  $f : X \rightarrow X$  by  $f = \{(a, c), (b, b), (c, a), (d, b)\}$ . Then  $f$  is contra  $e^*\theta$ -continuous but it is not contra  $\beta\theta$ -continuous.

Other examples can be found related articles.

**Definition 3.2.** A function  $f : X \rightarrow Y$  is said to be:

- a)  $e^*\theta$ -semiopen if  $f[U] \in SO(Y)$  for every  $e^*\theta$ -open set  $U$  of  $X$ .
- b) contra  $I(e^*\theta)$ -continuous if for each  $x$  in  $X$  and each  $V \in C(Y, f(x))$ , there exists  $U \in e^*\theta O(X, x)$  such that  $int(f[U]) \subseteq V$ .
- c)  $e^*\theta$ -continuous [11] if  $f^{-1}[V]$  is  $e^*\theta$ -closed in  $X$  for every closed set  $V$  of  $Y$ .
- d)  $e^*$ -continuous [9] if  $f^{-1}[V]$  is  $e^*$ -closed in  $X$  for every closed set  $V$  of  $Y$ .

**Theorem 3.2.** Let  $f : X \rightarrow Y$  be a function. If  $f$  is contra  $I(e^*\theta)$ -continuous and  $e^*\theta$ -semiopen, then  $f$  is contra  $e^*\theta$ -continuous.

*Proof.* Let  $x \in X$  and  $V \in C(Y, f(x))$ .

$$\left. \begin{aligned} (x \in X)(V \in C(Y, f(x))) \\ f \text{ is contra } I(e^*\theta)\text{-continuous} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} (\exists U \in e^*\theta O(X, x))(int(f[U]) \subseteq V = cl(V)) \\ f \text{ is } e^*\theta\text{-semiopen} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow (\exists U \in e^*\theta O(X, x))(f[U] \in SO(Y))(int(f[U]) \subseteq V = cl(V)) \\ \Rightarrow (\exists U \in e^*\theta O(X, x))(f[U] \subseteq cl(int(f[U])) \subseteq V). \quad \square$$

**Theorem 3.3.** *Let  $f : X \rightarrow Y$  be a function. If  $f$  is contra  $e^*\theta$ -continuous and  $Y$  is regular, then  $f$  is  $e^*\theta$ -continuous.*

*Proof.* Let  $x \in X$  and  $V \in O(Y, f(x))$ .

$$\left. \begin{array}{l} (x \in X)(V \in O(Y, f(x))) \\ Y \text{ is regular} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (\exists W \in O(Y, f(x)))(cl(W) \subseteq V) \\ f \text{ is contra } e^*\theta\text{-continuous} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow (\exists U \in e^*\theta O(X, x))(f[U] \subseteq cl(W) \subseteq V). \quad \square$$

**Theorem 3.4.** *Let  $\{X_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$  be any family of topological spaces. If a function  $f : X \rightarrow \Pi X_\alpha$  is a contra  $e^*\theta$ -continuous function, then  $Pr_\alpha \circ f : X \rightarrow X_\alpha$  is contra  $e^*\theta$ -continuous for each  $\alpha \in \Lambda$ , where  $Pr_\alpha$  is the projection of  $\Pi X_\alpha$  onto  $X_\alpha$ .*

*Proof.* Let  $\alpha \in \Lambda$  and  $U_\alpha \in RO(X_\alpha)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \in \Lambda \Rightarrow Pr_\alpha \text{ is continuous} \\ U_\alpha \in O(X_\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Pr_\alpha^{-1}[U_\alpha] \in O(\Pi X_\alpha) \\ f \text{ is c.}e^*\theta\text{.c.} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow (Pr_\alpha \circ f)^{-1}[U_\alpha] = f^{-1}[Pr_\alpha^{-1}[U_\alpha]] \in e^*\theta C(X). \quad \square$$

**Definition 3.3.** A function  $f : X \rightarrow Y$  is called weakly  $e^*$ -irresolute [20] (resp. strongly  $e^*$ -irresolute [20]) if  $f^{-1}[A]$  is  $e^*\theta$ -open in  $X$  (resp.  $e^*\theta$ -open) for every  $e^*\theta$ -open (resp.  $e^*$ -open) set  $A$  of  $Y$ .

**Theorem 3.5.** *Let  $f : X \rightarrow Y$  and  $g : Y \rightarrow Z$  and  $g \circ f : X \rightarrow Z$  functions. Then the following properties hold:*

- (1) *If  $f$  is contra  $e^*\theta$ -continuous and  $g$  is continuous, then  $g \circ f$  is contra  $e^*\theta$ -continuous.*
- (2) *If  $f$  is  $e^*\theta$ -continuous and  $g$  is contra-continuous, then  $g \circ f$  is contra  $e^*\theta$ -continuous.*
- (3) *If  $f$  is contra  $e^*\theta$ -continuous and  $g$  is contra-continuous, then  $g \circ f$  is  $e^*\theta$ -continuous.*
- (4) *If  $f$  is weakly  $e^*$ -irresolute and  $g$  is contra  $e^*\theta$ -continuous, then  $g \circ f$  is contra  $e^*\theta$ -continuous.*
- (5) *If  $f$  is strongly  $e^*$ -irresolute and  $g$  is contra  $e^*$ -continuous, then  $g \circ f$  is contra  $e^*\theta$ -continuous.*

*Proof.* Straightforward.  $\square$

## 4 Some fundamental properties of contra $e^*\theta$ -continuous functions

**Definition 4.1.** A topological space  $X$  is said to be:

- a)  $e^*\theta$ - $T_0$  [3] if for any distinct pair of points  $x$  and  $y$  in  $X$ , there is an  $e^*\theta$ -open set  $U$  in  $X$  containing  $x$  but not  $y$  or an  $e^*\theta$ -open set  $V$  in  $X$  containing  $y$  but not  $x$ .

- b)  $e^*\theta$ - $T_1$  [3] if for any distinct pair of points  $x$  and  $y$  in  $X$ , there is an  $e^*\theta$ -open set  $U$  in  $X$  containing  $x$  but not  $y$  and an  $e^*\theta$ -open set  $V$  in  $X$  containing  $y$  but not  $x$ .
- c)  $e^*\theta$ - $T_2$  [3] (resp.  $e^*$ - $T_2$  [10]) if for every pair of distinct points  $x$  and  $y$ , there exist two  $e^*\theta$ -open (resp.  $e^*$ -open) sets  $U$  and  $V$  such that  $x \in U$ ,  $y \in V$  and  $U \cap V = \emptyset$ .

**Lemma 4.1.** [3] For a topological space  $X$ , the following properties are equivalent:

- (1)  $(X, \tau)$  is  $e^*\theta$ - $T_0$ .
- (2)  $(X, \tau)$  is  $e^*\theta$ - $T_1$ .
- (3)  $(X, \tau)$  is  $e^*\theta$ - $T_2$ .
- (4)  $(X, \tau)$  is  $e^*$ - $T_2$ .
- (5) For every pair of distinct points  $x, y \in X$ , there exist  $U \in e^*O(X, x)$  and  $V \in e^*O(X, y)$  such that  $e^*\text{-cl}(U) \cap e^*\text{-cl}(V) = \emptyset$ .
- (6) For every pair of distinct points  $x, y \in X$ , there exist  $U \in e^*R(X, x)$  and  $V \in e^*R(X, y)$  such that  $U \cap V = \emptyset$ .
- (7) For every pair of distinct points  $x, y \in X$ , there exist  $U \in e^*\theta O(X, x)$  and  $V \in e^*\theta O(X, y)$  such that  $e^*\text{-cl}_\theta(U) \cap e^*\text{-cl}_\theta(V) = \emptyset$ .

**Theorem 4.1.** A topological space  $X$  is  $e^*\theta$ - $T_2$  if and only if the singletons are  $e^*$ - $\theta$ -closed sets.

*Proof.* Necessity. Let  $x \in X$  and  $X$  is  $e^*\theta$ - $T_2$ .

$$\left. \begin{array}{l} y \notin \{x\} \Rightarrow x \neq y \\ X \text{ is } e^*\theta\text{-}T_2 \end{array} \right\} \Rightarrow (\exists U_y \in e^*\theta O(X, y))(\exists V_y \in e^*\theta O(X, x))(U_y \cap V_y = \emptyset) \\ \Rightarrow (\exists U_y \in e^*\theta O(X, y))(x \notin U_y) \left. \right\} \Rightarrow \\ \mathcal{A} := \{U_y | y \notin \{x\} \Rightarrow (\exists U_y \in e^*\theta O(X, y))(x \notin U_y)\} \subseteq e^*\theta O(X) \\ \Rightarrow X \setminus \{x\} = \bigcup \mathcal{A} \in e^*\theta O(X) \Rightarrow \{x\} \in e^*\theta C(X).$$

Sufficiency. Suppose that  $\{x\}$  is  $e^*$ - $\theta$ -closed for every  $x \in X$ . Let  $x, y \in X$  with  $x \neq y$ .

$$\left. \begin{array}{l} x \neq y \Rightarrow y \in X \setminus \{x\} \\ x \in X \Rightarrow \{x\} \in e^*\theta C(X) \end{array} \right\} \Rightarrow X \setminus \{x\} \in e^*\theta O(X, y).$$

Then  $X$  is  $e^*\theta$ - $T_0$ . On the other hand, the notions of  $e^*\theta$ - $T_0$  and  $e^*\theta$ - $T_1$  are equivalent from Lemma 4.1. Thus  $X$  is  $e^*\theta$ - $T_1$ .  $\square$

**Theorem 4.2.** If  $f$  is a contra  $e^*\theta$ -continuous injection of a topological space  $X$  into a Urysohn space  $Y$ , then  $X$  is  $e^*\theta$ - $T_2$ .

*Proof.* Let  $x_1, x_2 \in X$  and  $x_1 \neq x_2$ .

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \neq x_2 \\ f \text{ is injective} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x_1) \neq f(x_2) \\ Y \text{ is Urysohn} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \Rightarrow (\exists U \in O(Y, y_1))(\exists V \in O(Y, y_2))(cl(U) \cap cl(V) = \emptyset) \\ & \quad f \text{ is c.e}^*\theta\text{.c. at } x_1 \text{ and } x_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\exists A \in e^*\theta O(X, x_1))(\exists B \in e^*\theta O(X, x_2))(f[A] \cap f[B] \subseteq cl(U) \cap cl(V) = \emptyset) \\ & \Rightarrow (\exists A \in e^*\theta O(X, x_1))(\exists B \in e^*\theta O(X, x_2))(A \cap B = \emptyset). \quad \square \end{aligned}$$

**Definition 4.2.** A topological space  $X$  is said to be:

- a) Weakly Hausdorff [21] (briefly weakly- $T_2$ ) if every point of  $X$  is an intersection of regularly closed sets of  $X$ .
- b) Ultra Hausdorff [22] if for each pair of distinct points  $x$  and  $y$  in  $X$ , there exist clopen sets  $U$  and  $V$  containing  $x$  and  $y$ , respectively such that  $U \cap V = \emptyset$ .

**Theorem 4.3.** Let  $f : X \rightarrow Y$  be a function. Then the following properties are hold:

- (1) If  $f$  is a contra  $e^*\theta$ -continuous injection and  $Y$  is  $T_0$ , then  $X$  is  $e^*\theta$ - $T_2$ .
- (2) If  $f$  is a contra  $e^*\theta$ -continuous injection and  $Y$  is Ultra Hausdorff, then  $X$  is  $e^*\theta$ - $T_2$ .

*Proof.* (1) Let  $x_1, x_2 \in X$  and  $x_1 \neq x_2$ .

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & (x_1, x_2 \in X)(x_1 \neq x_2) \\ & \quad f \text{ is injective} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} & f(x_1) \neq f(x_2) \\ & \quad Y \text{ is } T_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow [(\exists V \in O(Y, f(x_1)))(f(x_2) \in V) \vee (\exists U \in O(Y, f(x_2)))(f(x_1) \in U)] \\ & \Rightarrow \left. \begin{aligned} & (f(x_1) \notin Y \setminus V)(Y \setminus V \in C(Y, f(x_2))) \\ & \quad f \text{ is c.e}^*\theta\text{.c.} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 \notin f^{-1}[Y \setminus V] \in e^*\theta O(X, x_2). \end{aligned}$$

Therefore  $X$  is  $e^*\theta$ - $T_0$  and by Theorem 4.1  $X$  is  $e^*\theta$ - $T_2$ .

(2) It is not difficult to see that this item is immediate consequence of (1) by Lemma 4.1.  $\square$

**Definition 4.3.** A space  $X$  is said to be:

- a)  $e^*\theta$ -connected if  $X$  cannot be expressed as the disjoint union of two non-empty  $e^*\theta$ -open sets.
- b)  $e^*\theta$ -normal if for each pair of non-empty disjoint closed sets can be separated by disjoint  $e^*\theta$ -open sets.

**Theorem 4.4.** If  $f : X \rightarrow Y$  is a contra  $e^*\theta$ -continuous surjection and  $X$  is  $e^*\theta$ -connected, then  $Y$  is connected.

*Proof.* Suppose that  $Y$  is not connected.

$$\begin{aligned} Y \text{ is not connected} & \Rightarrow (\exists U_1, U_2 \in O(Y) \setminus \{\emptyset\})(U_1 \cap U_2 = \emptyset)(U_1 \cup U_2 = Y) \\ & \Rightarrow \left. \begin{aligned} & U_1, U_2 \in CO(Y) \\ & \quad f \text{ is c.e}^*\theta\text{.c. surjection} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow (f^{-1}[U_1], f^{-1}[U_2] \in e^*\theta O(X) \setminus \{\emptyset\})(f^{-1}[U_1] \cap f^{-1}[U_2] = \emptyset)(f^{-1}[U_1] \cup f^{-1}[U_2] = X). \end{aligned}$$

This is a contradiction to the fact that  $X$  is  $e^*\theta$ -connected.  $\square$

**Theorem 4.5.** *If  $f : X \rightarrow Y$  is a contra  $e^*\theta$ -continuous closed injection and  $Y$  is normal, then  $X$  is  $e^*\theta$ -normal.*

*Proof.* Let  $F_1, F_2 \in C(X)$  and  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ .

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{array}{l} (F_1, F_2 \in C(X))(F_1 \cap F_2 = \emptyset) \\ f \text{ is closed injection} \end{array} \right\} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (f[F_1], f[F_2] \in C(Y))(f[F_1 \cap F_2] = f[F_1] \cap f[F_2] = \emptyset) \\ Y \text{ is normal} \end{array} \right\} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (\exists V_1, V_2 \in O(Y))(f[F_1] \subseteq V_1)(f[F_2] \subseteq V_2)(V_1 \cap V_2 = \emptyset) \\ Y \text{ is normal} \end{array} \right\} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (\exists G_1, G_2 \in O(Y))(f[F_1] \subseteq G_1 \subseteq cl(G_1) \subseteq V_1)(f[F_2] \subseteq G_2 \subseteq cl(G_2) \subseteq V_2)(V_1 \cap V_2 = \emptyset) \\ f \text{ is c.e}^*\theta\text{.c.} \end{array} \right\} \Rightarrow \\
& \Rightarrow (f^{-1}[cl(G_1)], f^{-1}[cl(G_2)] \in e^*\theta O(X))(F_1 \subseteq f^{-1}[cl(G_1)])(F_2 \subseteq f^{-1}[cl(G_2)]) \\
& (f^{-1}[cl(G_1)] \cap f^{-1}[cl(G_2)] = \emptyset). \quad \square
\end{aligned}$$

**Definition 4.4.** A function  $f : X \rightarrow Y$  has a contra  $e^*\theta$ -closed graph if for each  $(x, y) \notin G(f)$ , there exist  $U \in e^*\theta O(X, x)$  and  $V \in C(Y, y)$  such that  $(U \times V) \cap G(f) = \emptyset$ .

**Lemma 4.2.** *The graph  $G(f)$  of a function  $f : X \rightarrow Y$  is contra  $e^*\theta$ -closed in  $X \times Y$  if and only if for each  $(x, y) \notin G(f)$ , there exist  $U \in e^*\theta O(X, x)$  and  $V \in C(Y, y)$  such that  $f[U] \cap V = \emptyset$ .*

*Proof.* Straightforward.  $\square$

**Theorem 4.6.** *If  $f : X \rightarrow Y$  is contra  $e^*\theta$ -continuous and  $Y$  is Urysohn, then  $f$  has a contra  $e^*\theta$ -closed graph.*

*Proof.* Let  $(x, y) \notin G(f)$ .

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{array}{l} (x, y) \notin G(f) \Rightarrow y \neq f(x) \\ Y \text{ is Urysohn} \end{array} \right\} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (\exists V \in O(Y, f(x)))(\exists W \in O(Y, y))(cl(V) \cap cl(W) = \emptyset) \\ f \text{ is c.e}^*\theta\text{.c.} \end{array} \right\} \Rightarrow \\
& \Rightarrow (\exists U \in e^*\theta O(X, x))(f[U] \subseteq cl(V))(cl(V) \cap cl(W) = \emptyset) \\
& \Rightarrow (\exists U \in e^*\theta O(X, x))(f[U] \cap W \subseteq f[U] \cap cl(W) = \emptyset). \quad \square
\end{aligned}$$

**Theorem 4.7.** *Let  $f : X \rightarrow Y$  be a function and  $g : X \rightarrow X \times Y$  the graph function of  $f$ , defined by  $g(x) = (x, f(x))$  for every  $x \in X$ . If  $g$  is contra  $e^*\theta$ -continuous, then  $f$  is contra  $e^*\theta$ -continuous.*

*Proof.* Let  $V \in O(Y)$ .

$$\left. \begin{array}{l} V \in O(Y) \Rightarrow X \times V \in O(X \times Y) \\ g \text{ is c.e}^*\theta\text{.c.} \end{array} \right\} \Rightarrow f^{-1}[V] = g^{-1}[X \times V] \in e^*\theta C(X). \quad \square$$

**Theorem 4.8.** *If  $f : X \rightarrow Y$  has a contra  $e^*\theta$ -closed graph and injective, then  $X$  is  $e^*\theta$ - $T_1$ .*

*Proof.* Let  $x_1, x_2 \in X$  and  $x_1 \neq x_2$ .

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} (x_1, x_2 \in X)(x_1 \neq x_2) \\ f \text{ is injective} \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow (x_1, f(x_2)) \notin G(f) \left. \vphantom{\left. \begin{array}{l} (x_1, x_2 \in X)(x_1 \neq x_2) \\ f \text{ is injective} \end{array} \right\}} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\exists U \in e^*\theta O(X, x_1))(\exists V \in O(Y, f(x_2)))(f[U] \cap V = \emptyset) \\ & \Rightarrow (\exists U \in e^*\theta O(X, x_1))(\exists V \in O(Y, f(x_2)))(U \cap f^{-1}[V] = \emptyset) \\ & \Rightarrow (\exists U \in e^*\theta O(X, x_1))(x_2 \notin U) \end{aligned}$$

Then  $X$  is  $e^*\theta$ - $T_0$ . On the other hand, the notions of  $e^*\theta$ - $T_0$  and  $e^*\theta$ - $T_1$  are equivalent from Lemma 4.1. Thus  $X$  is  $e^*\theta$ - $T_1$ .  $\square$

**Definition 4.5.** A topological space  $X$  is said to be:

- Strongly  $S$ -closed [6] if every closed cover of  $X$  has a finite subcover.
- Strongly  $e^*\theta C$ -compact [3] if every  $e^*\theta$ -closed cover of  $X$  has a finite subcover.
- $e^*\theta$ -compact if every  $e^*\theta$ -open cover of  $X$  has a finite subcover.
- $e^*\theta$ -space if every  $e^*\theta$ -closed set is closed.

**Theorem 4.9.** *If  $f : X \rightarrow Y$  has a contra  $e^*\theta$ -closed graph and  $X$  is an  $e^*\theta$ -space, then  $f^{-1}[K]$  is closed in  $X$  for every strongly  $S$ -closed subset  $K$  of  $Y$ .*

*Proof.* Let  $K$  is strongly  $S$ -closed in  $Y$  and let  $x \notin f^{-1}[K]$ .

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} x \notin f^{-1}[K] \Rightarrow f(x) \notin K \Rightarrow (\forall y \in K)(y \neq f(x)) \Rightarrow (x, y) \notin G(f) \\ G(f) \text{ is } e^*\theta\text{-closed} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\exists U_y \in e^*\theta O(X, x))(\exists V_y \in C(Y, y))(f[U_y] \cap V_y = \emptyset) \left. \vphantom{\Rightarrow} \right\} \Rightarrow \\ & \quad \mathcal{A} := \{K \cap V_y \mid y \in K\} \\ & \Rightarrow (\mathcal{A} \subseteq C(Y))(K = \bigcup \mathcal{A}) \left. \vphantom{\Rightarrow} \right\} \Rightarrow (\exists \mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A})(|\mathcal{A}^*| < \aleph_0)(K \subseteq \bigcup \mathcal{A}^*) \left. \vphantom{\Rightarrow} \right\} \begin{array}{l} X \text{ is } e^*\theta\text{-space} \\ U := \bigcap \{U_y \mid U_y \in \mathcal{A}^*\} \end{array} \Rightarrow \\ & \Rightarrow (U \in O(X, x))(f[U] \cap K = \emptyset) \Rightarrow (U \in O(X, x))(U \cap f^{-1}[K] = \emptyset) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (U \in O(X, x))(U \subseteq \setminus f^{-1}[K]) \Rightarrow x \in \text{int}(X \setminus f^{-1}[K]) \Rightarrow x \in X \setminus \text{cl}(f^{-1}[K]) \Rightarrow x \notin \text{cl}(f^{-1}[K]). \end{aligned}$$

$\square$

**Theorem 4.10.** *If  $f : X \rightarrow Y$  is a contra  $e^*\theta$ -continuous surjection and  $X$  is strongly  $e^*\theta C$ -compact, then  $Y$  is compact.*

*Proof.* Let  $\mathcal{B} \subseteq O(Y)$  and  $Y = \bigcup \mathcal{B}$ .

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} (\mathcal{B} \subseteq O(Y))(Y = \bigcup \mathcal{B}) \\ f \text{ is c.}e^*\theta\text{.c.} \end{array} \right\} \Rightarrow (\mathcal{A} := \{f^{-1}[B] \mid B \in \mathcal{B}\} \subseteq e^*\theta C(X))(X = \bigcup \mathcal{A}) \left. \vphantom{\left. \begin{array}{l} (\mathcal{B} \subseteq O(Y))(Y = \bigcup \mathcal{B}) \\ f \text{ is c.}e^*\theta\text{.c.} \end{array} \right\}} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\exists \mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A})(|\mathcal{A}^*| < \aleph_0)(X = \bigcup \mathcal{A}^*) \left. \vphantom{\Rightarrow} \right\} \Rightarrow (\mathcal{B}^* := \{f[A] \mid A \in \mathcal{A}^*\} \subseteq \mathcal{B})(|\mathcal{B}^*| < \aleph_0)(Y = \bigcup \mathcal{B}^*). \end{aligned}$$

$\square$

**Theorem 4.11.** *Let  $f : X \rightarrow Y$  be a function. Then the following properties are hold:*

- (1) *If  $f$  is a contra  $e^*\theta$ -continuous surjection and  $X$  is  $e^*\theta$ -compact, then  $Y$  is strongly  $S$ -closed.*
- (2) *If  $f$  is a contra  $e^*\theta$ -continuous surjection and  $X$  is  $e^*\theta$ -compact and  $e^*\theta$ -space, then  $Y$  is strongly  $e^*\theta C$ -compact.*

*Proof.* (1) Let  $\mathcal{B} \subseteq C(Y)$  and  $Y = \bigcup \mathcal{B}$ .

$$\begin{aligned} & \left. \left. (\mathcal{B} \subseteq C(Y))(Y = \bigcup \mathcal{B}) \right\} \right\} \Rightarrow \left. \left. (\mathcal{A} := \{f^{-1}[B] \mid B \in \mathcal{B}\} \subseteq e^*\theta O(X))(X = \bigcup \mathcal{A}) \right\} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left. \left. (\exists \mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A})(|\mathcal{A}^*| < \aleph_0)(X = \bigcup \mathcal{A}^*) \right\} \right\} \Rightarrow \\ & \quad \left. \left. f \text{ is c.}e^*\theta\text{-c.} \right\} \right\} \Rightarrow \left. \left. X \text{ is } e^*\theta\text{-compact} \right\} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left. \left. (\exists \mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A})(|\mathcal{A}^*| < \aleph_0)(X = \bigcup \mathcal{A}^*) \right\} \right\} \Rightarrow \\ & \quad \left. \left. f \text{ is surjective} \right\} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\mathcal{B}^* := \{f[A] \mid A \in \mathcal{A}^*\} \subseteq \mathcal{B})(|\mathcal{B}^*| < \aleph_0)(Y = \bigcup \mathcal{B}^*) \end{aligned}$$

(2) Let  $\mathcal{B} \subseteq e^*\theta C(Y)$  and  $Y = \bigcup \mathcal{B}$ .

$$\begin{aligned} & \left. \left. (\mathcal{B} \subseteq e^*\theta C(Y))(Y = \bigcup \mathcal{B}) \right\} \right\} \Rightarrow \left. \left. (\mathcal{B} \subseteq C(Y))(\bigcup \mathcal{B} = Y) \right\} \right\} \Rightarrow \\ & \quad \left. \left. X \text{ is } e^*\theta\text{-space} \right\} \right\} \Rightarrow \left. \left. f \text{ is c.}e^*\theta\text{-c.} \right\} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\exists \mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A})(|\mathcal{A}^*| < \aleph_0)(X = \bigcup \mathcal{A}^*) \left\} \right\} \Rightarrow (\mathcal{B}^* := \{f[A] \mid A \in \mathcal{A}^*\} \subseteq \mathcal{B})(|\mathcal{B}^*| < \aleph_0)(Y = \bigcup \mathcal{B}^*). \end{aligned}$$

□

**Theorem 4.12.** *If  $f : X \rightarrow Y$  is a weakly  $e^*$ -irresolute surjection and  $X$  is strongly  $e^*\theta C$ -compact, then  $Y$  is strongly  $e^*\theta C$ -compact.*

*Proof.* Let  $\mathcal{B} \subseteq e^*\theta C(Y)$  and  $Y = \bigcup \mathcal{B}$ .

$$\begin{aligned} & \left. \left. (\mathcal{B} \subseteq e^*\theta C(Y))(Y = \bigcup \mathcal{B}) \right\} \right\} \Rightarrow \left. \left. (\mathcal{A} := \{f^{-1}[B] \mid B \in \mathcal{B}\} \subseteq e^*\theta C(X))(X = \bigcup \mathcal{A}) \right\} \right\} \Rightarrow \\ & \quad \left. \left. f \text{ is weakly } e^*\text{-irresolute} \right\} \right\} \Rightarrow \left. \left. X \text{ is strongly } e^*\theta C\text{-compact} \right\} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\exists \mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A})(|\mathcal{A}^*| < \aleph_0)(X = \bigcup \mathcal{A}^*) \left\} \right\} \Rightarrow \\ & \quad \left. \left. f \text{ is surjective} \right\} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\mathcal{B}^* := \{f[A] \mid A \in \mathcal{A}^*\} \subseteq \mathcal{B})(|\mathcal{B}^*| < \aleph_0)(Y = \bigcup \mathcal{B}^*). \quad \square \end{aligned}$$

We recall that the product space  $X = X_1 \times \dots \times X_n$  has property  $P_{e^*\theta}$  [3] if  $A_i$  is an  $e^*\theta$ -open set in a topological space  $X_i$  for  $i = 1, 2, \dots, n$ , then  $A_1 \times \dots \times A_n$  is also  $e^*\theta$ -open in the product space  $X = X_1 \times \dots \times X_n$ .

**Theorem 4.13.** *Let  $f : X_1 \rightarrow Y$  and  $g : X_2 \rightarrow Y$  be two functions, where*

- (i)  *$X = X_1 \times X_2$  has the property  $P_{e^*\theta}$ ,*
- (ii)  *$Y$  is a Urysohn space,*
- (iii)  *$f$  and  $g$  are contra  $e^*\theta$ -continuous,*

then  $\{(x_1, x_2) | f(x_1) = g(x_2)\}$  is  $e^*\theta$ -closed in the product space  $X = X_1 \times X_2$ .

*Proof.* Let  $(x_1, x_2) \notin A := \{(x_1, x_2) | f(x_1) = g(x_2)\}$ .

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} (x_1, x_2) \notin A \Rightarrow f(x_1) \neq g(x_2) \\ Y \text{ is Urysohn} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (\exists V_1 \in O(Y, f(x_1)))(\exists V_2 \in O(Y, g(x_2)))(cl(V_1) \cap cl(V_2) = \emptyset)(cl(V_1), cl(V_2) \in RC(Y)) \\ f \text{ and } g \text{ are c.e}^*\theta\text{.c.} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (f^{-1}[cl(V_1)] \in e^*\theta O(X_1, x_1))(g^{-1}[cl(V_2)] \in e^*\theta O(X_2, x_2)) \\ X = X_1 \times X_2 \text{ has the Property } P_{e^*\theta} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow ((x_1, x_2) \in f^{-1}[cl(V_1)] \times g^{-1}[cl(V_2)] \in e^*\theta O(X_1 \times X_2))(f^{-1}[cl(V_1)] \times g^{-1}[cl(V_2)] \subseteq \setminus A) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \setminus A \in e^*\theta O(X_1 \times X_2) \Rightarrow A \in e^*\theta C(X_1 \times X_2). \end{aligned}$$

□

## 5 Acknowledgements

This work is supported by the Scientific Research Project Fund of Muğla Sıtkı Koçman University under the project number 17/277.

## References

- [1] Abd El-Monsef, M. E.; El-Deeb, S. N. and Mahmoud, R. A.  *$\beta$ -open sets and  $\beta$ -continuous mappings*, Bull. Fac. Sci., Assiut Univ. **12** (1983), 77–90.
- [2] Andrijević, D. *On  $b$ -open sets*, Mat. Vesnik **48** (1996), 59–64.
- [3] Ayhan, B.S. and Özkoç, M. *On almost contra  $e^*\theta$ -continuous functions*. Jordan Journal of Mathematics and Statistics, **11**(4) (2018), 383–408.
- [4] Caldas, M. *On Contra  $\beta\theta$ -Continuous Functions*, Proyecciones J. Math., **32**(4) (2013), 333–346.
- [5] Caldas, M. and Jafari, S. *Some properties of contra- $\beta$ -continuous functions*, Mem. Fac. Sci. Koch Univ. (Math) **22** (2001), 19–28.
- [6] Dontchev, J. *Contra-continuous functions and strongly  $S$ -closed spaces*, Internat. J. Math. Math. Sci., **19** (1996), 303–310.
- [7] Dontchev, J. and Noiri, T. *Contra-semicontinuous functions*, Math. Pannonica **10** (1999), 159–168.
- [8] Ekici, E. *On  $e$ -open sets,  $\mathcal{DP}^*$ -sets and  $\mathcal{DP}\mathcal{E}^*$ -sets and decompositions of continuity*, Arabian J. Sci. Eng. **33**(2A) (2008), 269–282.
- [9] Ekici, E. *On  $e^*$ -open sets and  $(\mathcal{D}, \mathcal{S})^*$ -sets*, Math. Morav. **13**(1) (2009), 29–36.
- [10] Ekici, E. *New forms of contra-continuity*, Carpathian J. Math. **24**(1) (2008), 37–45.

- 
- [11] Farhan, A. M. and Yang, X. S. *New types of strongly continuous functions in topological spaces via  $\delta$ - $\beta$ -open sets*, Eur. J. Pure Appl. Math., **8**(2) (2015), 185–200.
- [12] Jafari, S. and Noiri, T. *Contra- $\alpha$ -continuous functions between topological spaces*, Iran. Int. J. Sci., **2** (2001), 153–167.
- [13] Jafari, S. and Noiri, T. *On contra precontinuous functions*, Bull. Malaysian Math. Sci. Soc., **25** (2002), 115–128.
- [14] Levine, N. *Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces*, Amer. Math. Monthly **70** (1963), 36–41.
- [15] Mashhour, A. S.; Abd El-Monsef, M. E. and El-Deeb, S. N. *On precontinuous and weak precontinuous mappings*, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt **53** (1982), 47–53.
- [16] Mrsevic, M. *On pairwise  $R_0$  and pairwise  $R_1$  bitopological spaces*, Bull. Math. Soc. Sci. Math RS Roumano, (N.S.) **30**(78) (1986), 141–148.
- [17] Nasef, A. A. *Some properties of contra- $\gamma$ -continuous functions*, Chaos Solitons and Fractals **24** (2005), 471–477.
- [18] Njastad, O. *On some classes of nearly open sets*, Pacific J. Math. **15** (1965), 961–970.
- [19] Noiri, T. *Weak and strong forms of  $\beta$ -irresolute functions*, Acta Math. Hungar., **99** (2003), 315–328.
- [20] Özkoc, M. and Atasever, K. S. *On some forms of  $e^*$ -irresoluteness* (Accepted in JLTA).
- [21] Soundararajan, T. *Weakly Hausdorff space and the cardinality of topological spaces*, General Topology and its Relation to Modern Analysis and Algebra III, Proc. Conf. Kampur, 168, Acad. Prague (1971), 301–306.
- [22] Staum, R. *The algebra of bounded continuous functions into a nonarchimedean field*, Pacific J. Math., **50** (1974), 169–85.
- [23] Stone, M. H. *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 375–381.
- [24] Veličko, N. V. *H-closed topological spaces*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **78** (1968), 103–118.

# Some new sequence spaces of interval number based on Zweier sequences and Fibonacci numbers

*Algunos nuevos espacios de secuencia de número de intervalo basados en secuencias de Zweier y números de Fibonacci*

Shyamal Debnath ([shyamalnitamath@gmail.com](mailto:shyamalnitamath@gmail.com))

Tripura University  
India-799022; Turkey-02040

Ayhan Esi ([aesi@hotmail.com](mailto:aesi@hotmail.com))

Adiyaman University  
India-799022; Turkey-02040

Subrata Saha ([subratasaha2015@gmail.com](mailto:subratasaha2015@gmail.com))

Tripura University  
India-799022; Turkey-02040

## Abstract

The main aim of this paper is to determine necessary and sufficient conditions for the matrix of interval numbers  $\bar{A} = (\bar{a}_{nk})$  such that  $\bar{A}$  transform  $\bar{x} = (\bar{x}_k)$ , belongs to the set  $l_\infty^i$ ,  $c_0^i$ ,  $c^i$  where in particular  $\bar{x} \in l_\infty^i$ ,  $c_0^i$  and  $c^i$ , to introduce some new sequence spaces  $c^i(\bar{A}_{ZF})$ ,  $c_0^i(\bar{A}_{ZF})$ ,  $l_\infty^i(\bar{A}_{ZF})$  based on a newly defined matrix of interval numbers  $\bar{A}_{ZF}$ . We study some basic algebraic and topological properties. Also we investigate the relations related to these spaces.

**Key words and phrases:** Matrix transformations, interval number, Zweier sequence, Fibonacci number.

## Resumen

El objetivo principal de este documento es determinar condiciones necesarias y suficientes para la matriz de números de intervalos  $\bar{A} = (\bar{a}_{nk})$  tal que  $\bar{A}$  transforma  $\bar{x} = (\bar{x}_k)$ , perteneciente al conjunto  $l_\infty^i$ ,  $c_0^i$ ,  $c^i$  donde en particular  $\bar{x} \in l_\infty^i$ ,  $c_0^i$  y  $c^i$ , para introducir algunos nuevos espacios de secuencia  $c^i(\bar{A}_{ZF})$ ,  $c_0^i(\bar{A}_{ZF})$ ,  $l_\infty^i(\bar{A}_{ZF})$  basado en una matriz de números de intervalo  $\bar{A}_{ZF}$ , definida nuevamente. Nosotros estudiamos algunas propiedades algebraicas y topológicas básicas. También investigamos las relaciones referentes a estos espacios.

**Palabras y frases clave:** Transformaciones de matriz, número de intervalo, Zweier secuencia, número de Fibonacci.

## 1 Introduction

The sequence of interval numbers and usual convergence of sequences of interval numbers are studied by Chiao [4]. Later, Sengonul and Eryilmaz [28] introduced and studied bounded and convergent sequence spaces of interval numbers and showed that these spaces are complete metric space. In the recent days, Esi [20] introduced and studied strongly almost  $\lambda$ -convergence and statistically almost  $\lambda$ -convergence of interval numbers and lacunary sequence spaces of interval numbers, respectively. For more information about interval numbers one may refer to Debnath et. al. [5, 7, 8, 9], Dwyer [10, 11], Fischer [22], Moore [26], Moore and Yang [25], Esi [12]–[17].

The theory of matrix transformations is a wide field in summability; it deals with the characterizations of classes of matrix mappings between sequence spaces by giving necessary and sufficient conditions on the entries of the infinite matrices. Matrix transformations in sequence spaces have been studied by different authors like Tripathy [30, 31], Savas and Mursaleen [27] and many others.

## 2 Preliminaries

An interval number  $\bar{x}$  is a closed subset of the real numbers and denoted as  $\bar{x} = [x_l, x_r]$ , where  $x_l \leq x_r$  and  $x_l, x_r \in \mathbb{R}$ . Let us denote the set of real valued closed intervals by  $R(I)$ . The absolute value (magnitude or interval norm) of an interval number is defined by

$$|\bar{x}| = \max\{|x_l|, |x_r|\}.$$

In general, ordinary distributive law does not hold for interval arithmetic. If  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  are any three intervals then it is easy to verify that

$$\begin{aligned}\bar{x} \cdot (\bar{y} + \bar{z}) &\subseteq \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot \bar{z} \\ |\bar{x} \cdot (\bar{y} + \bar{z})| &\leq |\bar{x} \cdot \bar{y}| + |\bar{x} \cdot \bar{z}| \\ |\bar{x} \cdot \bar{y}| &\leq |\bar{x}| \cdot |\bar{y}|\end{aligned}$$

For  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in R(I)$ , we have  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$  iff  $x_{l1} = x_{l2}, x_{r1} = x_{r2}$ ;

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \{x \in \mathbb{R} : x_{l1} + x_{l2} \leq x \leq x_{r1} + x_{r2}\},$$

If  $\alpha \geq 0$ , then

$$\alpha \bar{x} = \{x \in \mathbb{R} : \alpha x_l \leq x \leq \alpha x_r\}$$

and if  $\alpha < 0$ , then

$$\alpha \bar{x} = \{x \in \mathbb{R} : \alpha x_r \leq x \leq \alpha x_l\}$$

Let us defined

$$\alpha = \min\{x_{l1} \cdot x_{l2}, x_{l1} \cdot x_{r2}, x_{r1} \cdot x_{l2}, x_{r1} \cdot x_{r2}\} \quad \text{and} \quad \beta = \max\{x_{l1} \cdot x_{l2}, x_{l1} \cdot x_{r2}, x_{r1} \cdot x_{l2}, x_{r1} \cdot x_{r2}\}$$

So

$$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 = \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x \leq \beta\}.$$

The set of all interval numbers  $R(I)$  is a complete metric space defined by

$$d(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \max\{|x_{l1} - x_{l2}|, |x_{r1} - x_{r2}|\}.$$

In the special case  $\bar{x}_1 = [a, a]$  and  $\bar{x}_2 = [b, b]$ , we obtain usual metric on the  $\mathbb{R}$  with

$$d(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = |a - b|.$$

Let us define the transformation  $f$  from  $\mathbb{N}$  to  $R(I)$  by  $k$  to  $f(k) = \bar{x}$ ,  $\bar{x} = (\bar{x}_k)$ . Then  $(\bar{x}_k)$  is called sequence of interval numbers. The  $\bar{x}_k$  is called  $k^{\text{th}}$  term of sequence  $(\bar{x}_k)$ .

**Definition 2.1.** A sequence  $\bar{x} = (\bar{x}_k)$  of interval numbers is said to be convergent to the interval number  $\bar{x}_0$  if for each  $\epsilon > 0$  there exists a positive number  $k_0$  such that  $d(\bar{x}_k, \bar{x}_0) < \epsilon$  for all  $k \geq k_0$  and we denote it by  $\lim_k \bar{x}_k = \bar{x}_0$ . Thus  $\lim_k \bar{x}_k = \bar{x}_0$ ,  $\lim_k x_{lk} = \lim_k x_{l0}$  and  $\lim_k x_{rk} = \lim_k x_{r0}$ .

**Definition 2.2.** An interval valued sequence space  $\bar{E}$  is said to be solid if  $\bar{y} = (\bar{y}_k) \in \bar{E}$  whenever  $|\bar{y}_k| \leq |\bar{x}_k|$  for all  $k \in \mathbb{N}$  and  $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{E}$ .

Through out this paper  $w^i$ ,  $l_\infty^i$ ,  $c^i$  and  $c_0^i$  denote the set of all, bounded, convergent and null sequences of interval numbers with real terms. We denote  $\bar{e}_k$  as the interval sequence whose  $k^{\text{th}}$  term is  $[1, 1]$  and the other terms are  $[0, 0]$  and  $(\bar{e}) = ([1, 1], [1, 1], [1, 1], \dots)$ .

Let  $\bar{X}, \bar{Y}$  be two sequence spaces of interval numbers and let  $\bar{A} = (\bar{a}_{nk})$  be an infinite matrix of interval numbers  $\bar{a}_{nk}$ , where  $n, k \in \mathbb{N}$ .

Then the matrix  $\bar{A}$  defines the  $\bar{A}$ -transformation from  $X$  into  $Y$ , if for every sequence  $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{X}$ , the sequence  $\bar{A}\bar{x} = \{(\bar{A}\bar{x})_n\}$ , the  $\bar{A}$ -transform of  $\bar{x}$  exists and is in  $\bar{Y}$ ; where  $(\bar{A}\bar{x})_n = \sum_k \bar{a}_{nk}\bar{x}_k$ . For simplicity in notation, here and in what follows, the summation without limits

runs from 0 to  $\infty$ . By  $\bar{A}(\bar{X} : \bar{Y})$  we mean the characterizations of matrices from  $\bar{X}$  to  $\bar{Y}$  i.e.,  $\bar{A} : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ . A sequence  $\bar{x}$  is said to be  $\bar{A}$ -summable to  $\bar{x}_0$  if  $\bar{A}\bar{x}$  converges to  $\bar{x}_0$  which is called as the  $\bar{A}$ -limit of  $\bar{x}$ .

For the sequence space  $\bar{X}$ , the matrix domain  $\bar{X}_{\bar{A}}$  of an infinite matrix of interval numbers  $\bar{A}$  is defined as

$$\bar{X}_{\bar{A}} = \{\bar{x} = (\bar{x}_k) : \bar{A}\bar{x} \in \bar{X}\}$$

Recently, the authors have introduced that,  $\bar{A} = (\bar{a}_{nk}) = ([a_{lnk}, a_{rnk}]) \in (l_\infty^i : l_\infty^i)$  if and only if

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |\bar{a}_{nk}| < \infty$$

### 3 Main Results

**Theorem 3.1.**  $\bar{A} = (\bar{a}_{nk}) = ([a_{lnk}, a_{rnk}]) \in (c^i : c^i)$  if and only if

$$(i) \sup_k \sum |\bar{a}_{nk}| < \infty$$

$$(ii) \bar{a}_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_{nk} \text{ exists for each } k \in \mathbb{N}.$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \bar{a}_{nk} = \bar{a} = [a_l, a_r] \text{ where } a_l, a_r \in \mathbb{C}$$

*Proof.* The necessity of (i) follows from the inclusion relation  $(c^i : c^i) \subseteq (l_\infty^i : l_\infty^i)$ . That of (ii) and (iii) follows on considering the sequence  $\bar{x} = (\bar{e}_k)$  and  $\bar{x} = (\bar{e})$ , respectively.

Conversely, suppose that the conditions (i), (ii) and (iii) hold and  $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in c^i$  with  $\bar{x}_k \rightarrow \bar{x}_0$  as  $k \rightarrow \infty$ , i.e.,  $x_{lk} \rightarrow x_{l0}$  and  $x_{rk} \rightarrow x_{r0}$  as  $k \rightarrow \infty$ .

Now,

$$\sum_k a_{lnk}x_{lk} = \sum_k a_{lnk}(x_{lk} - x_{l0}) + x_{l0} \sum_k a_{lnk} \tag{3.1}$$

and

$$\sum_k a_{rnk}x_{rk} = \sum_k a_{rnk}(x_{rk} - x_{r0}) + x_{r0} \sum_k a_{rnk} \tag{3.2}$$

holds for each  $n \in \mathbb{N}$ .

In equations (3.1) and (3.2), since the first terms of the right hand side tends to

$$\sum_k a_{lk}(x_{lk} - x_{l0}) \text{ and } \sum_k a_{rk}(x_{rk} - x_{r0})$$

respectively by (ii), and the second terms on the right hand side tends to  $x_{l0}a_l$  and  $x_{r0}a_r$  respectively by (iii), as  $n \rightarrow \infty$ , hence

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_k a_{lnk}x_{lk} \right) &= \sum_k a_{lnk}(x_{lk} - x_{l0}) + x_{l0}a_l \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_k a_{rnk}x_{rk} \right) &= \sum_k a_{rnk}(x_{rk} - x_{r0}) + x_{r0}a_r. \end{aligned}$$

Hence  $\bar{A}\bar{x} \in c^i$ . □

**Corollary 3.1.**  $\bar{A} = (\bar{a}_{nk}) = ([a_{lnk}, a_{rnk}]) \in (c^i : c_0^i)$  if and only if

- (i)  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |\bar{a}_{nk}| < \infty$ .
- (ii)  $\bar{a}_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_{nk}$  exists for each  $k \in \mathbb{N}$ .
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \bar{a}_{nk} = \theta$ , where  $\theta = [0, 0]$ .

**Theorem 3.2.**  $\bar{A} = (\bar{a}_{nk}) = ([a_{lnk}, a_{rnk}]) \in (c_0^i : c^i)$  if and only if

- (i)  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |\bar{a}_{nk}| < \infty$ .
- (ii)  $\bar{a}_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_{nk}$  exists for each  $k \in \mathbb{N}$ .

*Proof.* The necessity of (i) follows from the inclusion relation  $(c_0^i : c^i) \subseteq (c_0^i : l_\infty^i)$ . That of (ii) follows on considering the sequence  $\bar{x} = (\bar{e}_k)$ .

Conversely, assume that the conditions (i), (ii) hold and  $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in c_0^i$ . So that  $\bar{x}_k \rightarrow \theta$  as  $k \rightarrow \infty$ , where  $\theta = [0, 0]$ , i.e.,  $x_{lk} \rightarrow 0$  and  $x_{rk} \rightarrow 0$  as  $k \rightarrow \infty$ .

Now,  $\sum_k a_{lnk}x_{lk}$  tends to  $\sum_k a_{lk}x_{lk}$  as  $n \rightarrow \infty$  and  $\sum_k a_{rnk}x_{rk}$  tends to  $\sum_k a_{rk}x_{rk}$  as  $n \rightarrow \infty$ .

Hence  $\bar{A}\bar{x} \in c^i$ . □

**Corollary 3.2.**  $\bar{A} = (\bar{a}_{nk}) = ([a_{lnk}, a_{rnk}]) \in (c_0^i : c_0^i)$  if and only if

- (i)  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |\bar{a}_{nk}| < \infty$ .
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_{nk} = \theta$  exists for each  $k \in \mathbb{N}$ , where  $\theta = [0, 0]$ .

The approach of constructing new sequence spaces by means of the matrix domain of a particular limitation method have recently been employed by Altay, Basar and Mursaleen [1], Basar and Altay [2], Malkowsky [24] and many others.

Sengonul [29] defined the sequence  $y = (y_i)$  which is frequently used as the  $Z^p$  transform of the sequence  $x = (x_i)$ , i.e.,

$$y_i = px_i + (1 - p)x_{i-1}$$

where  $x_{-1} = 1$ ,  $1 < p < \infty$  and  $Z^p$  denotes the matrix  $Z^p = (Z_{ik})$  defined by

$$Z_{ik} = \begin{cases} p & i = k \\ 1 - p & i - 1 = k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{where } (i, k \in \mathbb{N}) \tag{3.3}$$

Following Basar and Atlay [2], Sengonul [29] introduced the Zweier sequence spaces  $Z$  and  $Z_0$  as follows:

$$Z = \{x = (x_k) \in w : Z^p x \in c\}$$

$$Z_0 = \{x = (x_k) \in w : Z^p x \in c_0\}.$$

Furthermore, Esi and others [6, 14, 15], have developed Zweier sequence spaces in different directions. Recently, Debnath et. al. [8] have established the conditions of regularity of a matrix of interval numbers and introduced a regular matrix of interval numbers using Fibonacci numbers.

Now, we have constructed a matrix of interval numbers  $\bar{A}_{ZF} = (\bar{a}_{nk}) = ([a_{lnk}, a_{rnk}])$ , where using  $a_{lnk}$  are from Zweier sequences and  $a_{rnk}$  are from Fibonacci numbers.

To construct the matrix of interval numbers we put  $p = \frac{1}{2}$  in (3.3).

$$a_{lnk} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = k; \\ \frac{1}{2}, & n - 1 = k; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \text{and} \quad a_{rnk} = \begin{cases} \frac{f_k}{f_{n+2} - 1}, & 1 \leq k \leq n; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

where,  $f_k$  is the Fibonacci numbers such that  $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$  that is,

$$\bar{A}_{ZF} = \begin{pmatrix} [\frac{1}{2}, 1] & [0, 0] & [0, 0] & [0, 0] & [0, 0] & [0, 0] & [0, 0] & \dots & \dots & \dots \\ [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] & [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] & [0, 0] & [0, 0] & [0, 0] & [0, 0] & [0, 0] & \dots & \dots & \dots \\ [0, \frac{1}{4}] & [\frac{1}{2}, \frac{1}{4}] & [\frac{1}{2}, \frac{2}{4}] & [0, 0] & [0, 0] & [0, 0] & [0, 0] & \dots & \dots & \dots \\ [0, \frac{1}{7}] & [0, \frac{1}{7}] & [\frac{1}{2}, \frac{2}{7}] & [\frac{1}{2}, \frac{3}{7}] & [0, 0] & [0, 0] & [0, 0] & \dots & \dots & \dots \\ [0, \frac{1}{12}] & [0, \frac{1}{12}] & [0, \frac{2}{12}] & [\frac{1}{2}, \frac{3}{12}] & [\frac{1}{2}, \frac{5}{12}] & [0, 0] & [0, 0] & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

It is obvious that the above matrix is regular [8]. Now, we introduce the following sequence spaces based on infinite matrix  $\bar{A}_{ZF}$

$$c^i(\bar{A}_{ZF}) = \{\bar{x} = (\bar{x}_k) \in w^i : \bar{A}_{ZF}\bar{x} \in c^i\}$$

$$c_0^i(\bar{A}_{ZF}) = \{\bar{x} = (\bar{x}_k) \in w^i : \bar{A}_{ZF}\bar{x} \in c_0^i\}$$

$$l_\infty^i(\bar{A}_{ZF}) = \{\bar{x} = (\bar{x}_k) \in w^i : \bar{A}_{ZF}\bar{x} \in l_\infty^i\}$$

where  $\bar{A}_{ZF}\bar{x} = \{(\bar{A}_{ZF}\bar{x})_n\}$  and

$$\bar{A}_{ZF_n}(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_{nk}(x_{lk}, x_{rk}), \quad (n \in \mathbb{N}).$$

**Theorem 3.3.**  $c^i(\bar{A}_{ZF})$  and  $c_0^i(\bar{A}_{ZF})$  are metric spaces with the metric defined by

$$d(\bar{x}_k, \bar{y}_k) = \sup_k \{\max\{|x_{lk} - y_{lk}|, |x_{rk} - y_{rk}|\}\}.$$

*Proof.* Easy, so omitted. □

**Theorem 3.4.** The spaces  $c_0^i(\bar{A}_{ZF})$ ,  $c^i(\bar{A}_{ZF})$  and  $l_\infty^i(\bar{A}_{ZF})$  are normed interval spaces with the norm

$$\|\bar{x}\| = \sup_k \{\max\{|x_{lk}|, |x_{rk}|\}\}.$$

*Proof.* Let  $\mu^i = c_0^i(\bar{A}_{ZF})$  (or  $c^i(\bar{A}_{ZF})$  or  $l_\infty^i(\bar{A}_{ZF})$ ) and  $\bar{x}, \bar{y} \in \mu^i$ .

N1. Since  $\|\bar{x}\|_{\mu^i} = \sup_k \{\max\{|x_{lk}|, |x_{rk}|\}\}$ , then we have  $\|\bar{x}\|_{\mu^i} > 0, \forall \bar{x} \in \mu^i - \{\theta\}$ .

N2.  $\|\bar{x}\|_{\mu^i} = 0 \Leftrightarrow \sup_k \{\max\{|x_{lk}|, |x_{rk}|\}\} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \theta$ .

N3.  $\|\bar{x} + \bar{y}\|_{\mu^i} = \sup_k \{\max\{|x_{lk} + y_{lk}|, |x_{rk} + y_{rk}|\}\} \leq \sup_k \{\max\{|x_{lk}| + |y_{lk}|, |x_{rk}| + |y_{rk}|\}\}$   
 $\leq \sup_k \{\max\{|x_{lk}|, |x_{rk}|\}\} + \sup_k \{\max\{|y_{lk}|, |y_{rk}|\}\} = \|\bar{x}\|_{\mu^i} + \|\bar{y}\|_{\mu^i}$ .

N4.  $\|\alpha\bar{x}\|_{\mu^i} = \sup_k \{\max\{|\alpha x_{lk}|, |\alpha x_{rk}|\}\} = |\alpha| \sup_k \{\max\{|x_{lk}|, |x_{rk}|\}\} = |\alpha| \|\bar{x}\|_{\mu^i}$ .

Hence,  $\|\bar{x}\|_{\mu^i}$  is a norm on  $\mu^i$ . □

**Theorem 3.5.** The spaces  $c_0^i(\bar{A}_{ZF})$  and  $c^i(\bar{A}_{ZF})$  are solid.

*Proof.* We consider only  $c_0^i(\bar{A}_{ZF})$ . Let  $\|\bar{y}_k\| \leq \|\bar{x}_k\|$ , for all  $(k \in \mathbb{N})$  and for some  $\bar{x} \in c_0^i(\bar{A}_{ZF})$ . Then clearly  $\tilde{d}(\bar{y}_k, \theta) \leq \tilde{d}(\bar{x}_k, \theta)$ , i.e.,  $\{|y_{lk} - 0|, |y_{rk} - 0|\} \leq \{|x_{lk} - 0|, |x_{rk} - 0|\}$ . Thus, we have  $y_{lk} \leq x_{lk}$  and  $y_{rk} \leq x_{rk}$ , i.e.,  $\bar{y} \leq \bar{x}$ . So,  $\bar{y} \in c_0^i(\bar{A}_{ZF})$ . Hence,  $c_0^i(\bar{A}_{ZF})$  is solid or normal.

For the space  $c^i(\bar{A}_{ZF})$ , the result can be proved similarly. □

**Theorem 3.6.**

(i) The inclusion  $c_0^i \subset c^i(\bar{A}_{ZF})$  strictly holds.

(ii) The inclusion  $c^i \subset c^i(\bar{A}_{ZF})$  strictly holds.

*Proof.* (i) Let,  $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in c_0^i$  then clearly  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k = \theta$ , where  $\theta = [0, 0]$ . Again since  $\bar{A}_{ZF}$  is regular so  $\bar{A}_{ZF}\bar{x} \in c_0^i$ , i.e.,  $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in c_0^i(\bar{A}_{ZF})$ . Now, let  $\bar{x} = (\bar{x}_k) = [((-1)^k, \frac{1}{k})]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , then  $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in c_0^i(\bar{A}_{ZF})$  but  $(\bar{x}_k)$  does not belongs to  $c_0^i$ .

(ii) Let  $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in c^i$ . Again, since  $\bar{A}_{ZF}$  is regular so  $\bar{A}_{ZF}\bar{x} \in c_0^i$ , i.e.,  $(\bar{x}_k) \in c^i(\bar{A}_{ZF})$ . Now, let  $\bar{x} = (\bar{x}_k)$ , where

$$\bar{x}_k = \begin{cases} [1, 1 + \frac{1}{k}], & k \text{ odd} \\ [0, 1 + \frac{1}{k}], & k \text{ even} \end{cases}$$

then  $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in c^i(\bar{A}_{ZF})$  but  $(\bar{x}_k)$  does not belongs to  $c^i$ .  $\square$

## References

- [1] Altay, B.; Basar, F. and Mursaleen, M. *On the Euler sequence space which include the space  $l_p$  and  $l_\infty$* . Inform Sci., **176**(10) (2006), 1450–1462.
- [2] Basar, F. and Altay, B. *On the spaces of sequences of  $p$ -bounded variation and related matrix mappings*. Ukrainian Math. J., **55**(1) (2003), 136–144.
- [3] Basar, F. *Summability Theory and its applications*, 2011.
- [4] Chiao, K. P. *Fundamental Properties of Interval Vector max-norm*. Tamsui Oxford J. Math. Sci., **18**(2) (2002), 219–233.
- [5] Debnath, S. and Saha, S. *Matrix Transformation on Statistically Convergent Sequence Spaces of Interval Number Sequences*. Proecciones J. Mathematics, **35**(1) (2016), 187–195.
- [6] Debnath, S. and Saha, S. *On Statistically Convergent Sequence Spaces of Interval Numbers*, Proceedings of IMBIC, **3** (2014), 178–183.
- [7] Debnath, S. and Saha, S. *Some Newly Defined Sequence Spaces Using Regular Matrix of Fibonacci Numbers*, AKU J. Sci. Engi, **14** (2014), 011301, 1–3.
- [8] Debnath, S.; Datta, A. J. and Saha, S. *Regular Matrix of Interval Numbers based on Fibonacci Numbers*. Afrika Matematika, **26**(7) (2015), 1379–1385.
- [9] Debnath, S.; Sarma, B. and Saha, S. *On Some Sequence Spaces of Interval vectors*. Afrika Matematika, **26**(5) (2015), 673–678.
- [10] Dwyer, P. S. *Linear Computation*. New York, Wiley, 1951.
- [11] Dwyer, P. S. *Erros of Matrix Computation, Simultaneous Equations and Eigenvalues*, National Bureu of Standarts, Applied Mathematics Series, **29** (1953), 49–58.
- [12] Esi, A. *A new class of double interval numbers*. Sci. Magna, **7**(4) (2013), 54–59.
- [13] Esi, A. *A new class of interval numbers*. J. Qafqaz Univ., **31** (2011), 98–102.
- [14] Esi, A. and Acikgoz, M. *On some double lacunary strong Zweier convergent sequence spaces*. Annals Univ. Craiova, Math. Comp. Sci. Series, **40**(2) (2013), 121–127.

- [15] Esi, A. and Sapsizoglu, A. *On some lacunary  $\sigma$ -strong Zweier convergent sequence spaces*. Romai J., **8**(2) (2013), 61–70.
- [16] Esi, A. *Double lacunary sequence spaces of double sequence of interval numbers*. Proyecciones J. Math, **31**(1) (2012), 297–306.
- [17] Esi, A. *Lacunary Sequence Spaces of Interval Numbers*, Thai J. Math, **10**(2) (2012), 445–451.
- [18] Esi, A.  *$\lambda$ -Sequence spaces of interval numbers*. Appl. Math. Inform. Sci, **8**(3) (2014), 1099–1102.
- [19] Esi, A. *Statistical and lacunary statistical convergence of interval numbers in topological groups*. Acta Scien. Tech., **36**(3) (2014), 491–495.
- [20] Esi, A. *Strongly almost  $\lambda$ -convergence and statistically almost  $\lambda$ -convergence of interval numbers*. Sci. Magna, **7**(2) (2011), 117–122.
- [21] Esi, Ayhan and Esi, Ayten. *Asymptotically lacunary statistically equivalent sequences of interval numbers*. Int. J. Math. Appl., **1**(1) (2013), 43–48.
- [22] Fischer, P. S. *Automatic Propagated and Round-off Error Analysis*, paper presented at the 13<sup>th</sup> national meeting of the Association for Computing Machinery, 1958.
- [23] Karababa, Y. F. and Esi, A. *On some strong zweier convergent sequence spaces*, Acta Univ. Apulensis, **29** (2013), 9–15.
- [24] Malkowsky, E. *Recent results in the theory of matrix transformation in sequence spaces*. Math. Vensik, **49** (1997) 187–196.
- [25] Moore, R. E. and Yang, C. T. *Theory of an Interval Algebra and Its Application to Numeric Analysis*, RAAG Memories II, Gaukutsu Bunken Fukeyu-kai, Tokyo, 1958.
- [26] Moore, R. E. *Automatic Error Analysis in Digital Computation*, LSMD-48421, Lockheed Missiles and Space Company, 1959.
- [27] Savas, E. and Mursaleen, M. *Matrix transformations in some sequence spaces*. Istanbul Universitesi Fen Fak. Mat. Dergisi, **52** (1993), 1–5.
- [28] Sengonul, M. and Eryilmaz, A. *On the Sequence Spaces of Interval Numbers*. Thai J. Math, **8**(3) (2010), 503–510.
- [29] Sengonul, M. *On the Zweier sequence space*. Demons. Mathematica, **XL**(1) (2007), 181–196.
- [30] Tripathy, B. C. *Matrix transformation between series and sequences*. Bull. Malaysian Math. Soc. (second Series), **21** (1998), 17–20.
- [31] Tripathy, B. C. *Matrix transformation between some classes of sequences*. J. Math. Anal. Appl., **206** (1997), 448–450.

# Representación de grafos divisores de cero para anillos

*Representation of graphs zero divisores for rings*

Juan Otero (jmotero746@gmail.com)

Departamento de Informática  
Universidad Clodosbaldo Russián  
Cumaná, Venezuela.

José Salazar (jsalaza2009@hotmail.com)

Felicia Villarroel (feliciavillarroel@gmail.com)

Departamento de Matemática  
Universidad de Oriente  
Cumaná, Venezuela.

## Resumen

El grafo divisor de cero para un anillo conmutativo  $R$ , denotado por  $\Gamma(R)$ , es un grafo cuyos vértices son los elementos del conjunto de divisores de cero, no nulos, en  $R$ . Dos vértices distintos  $x$  e  $y$  son adyacentes en  $\Gamma(R)$  si y sólo si  $x \cdot y = 0$ . En este trabajo, se recopilan algunos resultados relevantes de los  $\Gamma(R)$  y además, se presenta un algoritmo para la representación de  $\Gamma(R)$  para los anillos  $\mathbb{Z}_n$ .

**Palabras y frases clave:** Conjunto divisor de cero, grafo divisor de cero, algoritmo.

## Abstract

The zero-divisor graph for a commutative ring  $R$ , denoted by  $\Gamma(R)$ , is a graph whose vertices are the elements of the set of divisor of zero, different of zero, on  $R$ . Two distinct vertices  $x$  and  $y$  are adjacent in  $\Gamma(R)$  if and only if  $x \cdot y = 0$ . In this work, they give some relevant results of the  $\Gamma(R)$  and also, an algorithm is presented for the representation of  $\Gamma(R)$  for rings of  $\mathbb{Z}_n$ .

**Key words and phrases:** Set zero divisor, zero dividers, algorithm.

## 1 Introducción

El estudio de los grafos divisores de cero fue presentado por primera vez en 1988 por Istan Beck [3], en su artículo denominado “*Coloring of commutative ring*”. Allí asocian un grafo simple a un anillo conmutativo  $R$ , donde los vértices son los elementos del anillo y la adyacencia entre

---

Recibido 29/09/2018. Revisado 10/10/2018. Aceptado 15/12/2018.

MSC (2010): Primary 05C85; Secondary 13M05.

Autor de correspondencia: Juan Otero

los vértices se obtiene a través de los divisores de cero, es decir, dos vértices distintos  $x$  e  $y$  son adyacentes si y sólo si  $x \cdot y = 0$ .

En aquel momento el objetivo básico era estudiar las coloraciones de anillos conmutativos, con la idea de establecer una relación entre la teoría de grafo y la teoría de anillos conmutativos. Un resultado importante de Beck fue la siguiente conjetura:  $\chi(R) = \text{clique } R$ , donde  $\chi(R)$  denota el número cromático de un grafo, ese estudio fue continuado en [2], donde cabe señalar que se da un contraejemplo a la conjetura dada por Beck donde  $R$  es un anillo local finito. Pero después en el año 1999, Andersen y Livistong [1], publican el artículo “*The zero divisor graph of a commutative ring*” y es en este artículo donde se estudian las propiedades y estructuras de los grafos divisores de cero, los cuales también se estudian en este trabajo, estos se denotan por  $\Gamma(R)$ , donde  $R$  es un anillo conmutativo. Una diferencia que se encuentra en la definición del grafo divisor de cero en ese artículo es la inclusión del cero en los conjuntos divisores de ceros, pero a la hora de las adyacencia en el grafo divisor de cero no es tomado en cuenta, y es así, como muchos autores hasta los actuales momentos, incluyen el cero en este tipo de grafos para tener más propiedades y estructuras a la mano.

En [9], se dan algunas representaciones y caracterizaciones de los grafos divisores de cero, para los anillos conmutativos de la forma  $\mathbb{Z}_{p^n q}$ . En [4], se introduce la definición de conjuntos r-partitos, definición clave para la representación de los grafos divisores de cero. Así como también caracterizaciones, el diámetro y el número de clique para estos grafos. Como primer aporte en este trabajo de investigación, se trabaja con estructuras algebraicas tales como los anillos conmutativos de la forma  $\mathbb{Z}_{p^n q}$ , para  $p$  y  $q$  primos distintos y  $n$  entero positivo, donde se estudian las representaciones de los grafos divisores de cero que se obtendrán para cada caso, así como su caracterizaciones, el diámetro, número de clique y como segundo aporte se da un método para la elaboración de un algoritmo donde se pueda representar estos grafos para las estructuras algebraicas antes mencionadas y dejar como tarea abierta la implementación de este método en un lenguaje computacional. Cabe de destacar, que estos métodos algorítmicos que se han venido presentando en estas investigaciones han sido pilares, para articular teorías ya existentes como lo son la Teoría de Ramsey, Teoría Combinatoria, Teoría de Problemas Baricéntricos y la Teoría del Álgebra por mencionar algunas, con las denominadas constantes baricéntricas.

## 2 Conjunto divisor de cero

A continuación se presentan definiciones y resultados relacionados con los conjuntos divisores de cero.

**Definición 1.** Sea  $R$  un anillo, un elemento  $x \in R$ , se llama divisor de cero, si existe  $y \in R$ , distinto de cero, tal que  $x \cdot y = 0$ .

*Nota 2.1.* En este trabajo de investigación, se trabajará muy a menudo con el anillo conmutativo  $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$ , el cual no es más que el conjunto de las clases módulo  $m$ . En lo que continúa de escritura, se suprimirá las barras para denotar al mismo anillo  $\mathbb{Z}_m$ , en caso contrario se informará.

**Definición 2.** Aquel conjunto para el cual, cada vez que se elijan dos elementos no nulos  $x$  e  $y$  en un anillo  $R$ , se cumple  $x \cdot y = 0$ . Se denomina conjunto divisor de cero. Este trabajo se denota al conjunto divisor de cero de un anillo  $R$ , por  $\Omega(R)$ .

**Ejemplo 1.** Sea el anillo conmutativo siguiente  $\mathbb{Z}_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Su conjunto divisor de cero es:

$$\Omega(\mathbb{Z}_{10}) = \{2, 4, 5, 6, 8\}.$$

*Nota 2.2.* Otra manera de ver  $\Omega(\mathbb{Z}_{10})$ , son los elementos no primos relativos con 10.

Otros anillos  $R$  a los cuales también se les calcula  $\Omega(R)$  son los siguientes:

**Ejemplo 2.** Sea el anillo conmutativo  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ . Su conjunto divisor de cero es:  $\Omega(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = \{(1, 0), (0, 1)\}$ . Puesto que:

$$\begin{aligned}(1, 0) \times (0, 1) &= (0, 0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ (1, 0) \times (1, 1) &= (1, 0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ (0, 1) \times (1, 1) &= (0, 1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2\end{aligned}$$

**Ejemplo 3.** Sea el anillo  $R = \frac{\mathbb{Z}_3[x]}{x^2} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, x, x + \bar{1}, x + \bar{2}, \bar{2}x, \bar{2}x + \bar{1}, \bar{2}x + \bar{2}\}$ . Su conjunto divisor de cero es:  $\Omega\left(\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{x^2}\right) = \{x, \bar{2}x\}$ . Puesto que:

$$x \cdot \bar{2}x = \bar{2}x^2 = \bar{2} \cdot \bar{0} = \bar{0}$$

Los siguientes son resultados relacionados con los conjuntos divisores de cero. En [8], aparecen los siguientes corolarios

**Corolario 2.1.** Sea el anillo  $R = \mathbb{Z}_p$  no tiene divisores de cero si y sólo si  $p$  es primo.

**Corolario 2.2.** Un anillo no tiene divisores de cero si y sólo si se cumple la ley cancelativa del producto para todo elemento no nulo del anillo.

En [9] aparece el siguiente resultado, aquí se presenta una demostración.

**Lema 2.1.** El número de todos los divisores de cero para  $k/p^n q$  son  $\frac{p^n q}{k} - 1$

*Demostración.* Sean  $p, q$ , primos distintos y  $n \in \mathbb{Z}$ . Además,  $R = \mathbb{Z}_{p^n q}$  un anillo y  $\Omega(R)$  su conjunto divisor de cero, de la forma  $\Omega(R) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ . Supóngase que  $k \in \Omega(R)$  tal que  $k/p^n q$ , esto significa que existe  $0 \neq b \in \Omega(R)$  de manera que  $k \cdot b = p^n q$ . Supongamos ahora que,  $|\Omega(R)| \neq \frac{p^n q}{k} - 1$ , para algún  $k$ , esto implica que existen  $a, b \in \Omega(R)$  tal que  $a \cdot b = 0$ , esto quiere decir, que  $a = 0$  ó  $b = 0$ , pero esto es una contradicción, puesto  $b \neq 0$  y  $b = 0$ , proviene de suponer que  $|\Omega(R)| \neq \frac{p^n q}{k} - 1$ .  $\square$

Seguidamente en el artículo [6], tiene el siguiente resultado

**Proposición 2.1.** Sea  $R$  un anillo finito, entonces cada elemento de  $R$  es invertible o divisor de cero.

*Demostración.* Sea  $a \in R$ . Si  $a \in \Omega(R)$ , significa que  $a$  es un divisor de cero. Por otro lado, si  $a$  no pertenece a  $\Omega(R)$ , entonces  $a \neq 0$  y para todo  $b \in R - \{0\}$ , se tiene que  $a \cdot b \neq 0$ . Escribiendo  $R$ , de la forma  $R = \{0, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  multiplicando cada elemento de  $R$  por  $a$  se obtiene  $a \cdot 0 = 0$  y  $a \cdot a_i \neq 0$ ,  $\forall i$  con  $2 \leq i \leq n$ . Si  $i \neq j$ ,  $a \cdot a_i \neq a \cdot a_j$ , caso contrario,  $a(a_i - a_j) = 0$ , más aún si  $a$  no pertenece a  $\Omega(R)$ , así existe  $a_k \in R$ , con  $2 \leq k \leq n$ . Tal que  $a \cdot a_k = 1$  y por lo tanto  $a$  es invertible.  $\square$

El siguiente teorema dado en [6], es fundamental para futuras investigaciones conectadas por los grafos divisores de cero y anillos de polinomios.

**Teorema 2.1** (Teorema de McCoy). Sea  $R$  un anillo. Un polinomio  $f \in R[x]$  es un divisor de cero si y sólo si, existe  $r \in R[x]$  distinto de cero tal que  $r \cdot f = 0$ .

### 3 Grafo divisor de cero

En esta sección, se presenta una definición de grafo divisor de cero entre las muchas que existen, y algunos resultados relacionados con los mismos. En este apartado los anillos de trabajo se consideran conmutativos y con identidad. A continuación la siguiente definición de conjunto  $r$ -partitos es bueno conocerla puesto que es crucial en la construcción de los grafos divisores de cero, aquí propuestos.

**Definición 3.** Los conjuntos  $V_1, V_2, \dots, V_r$ , son llamados  $r$ -partitos del conjunto  $V$ , si cumplen lo siguiente:

1.  $V_i \neq \emptyset, \forall i = 1, 2, \dots, r$ .
2.  $V_i \cap V_j = \emptyset, \forall i, j = 1, 2, \dots, r$ .
3.  $\bigcup_{i=1}^r V_i = V$

Otra definición importante es la siguiente:

**Definición 4.** Un grafo es un par de conjuntos  $(V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto no vacío de elementos llamados vértices, nodos o puntos y  $E$  es un conjunto formado por pares no ordenados de elementos de  $V$  llamados lados, aristas o líneas,

**Definición 5.** Sea  $R$  un anillo conmutativo, el grafo divisor de cero de  $R$ , el cual se denotará por  $\Gamma(R)$ , se define por:

$$\Gamma(R) = (V(\Gamma(R)), E(\Gamma(R)))$$

donde  $V(\Gamma(R))$  es el conjunto formado por los elementos del conjunto divisor de cero de  $R$ , es decir,  $\Omega(R) = V(\Gamma(R))$  y  $E(\Gamma(R)) = \{(x, y) / x, y \in V(\Gamma(R)); x \cdot y = 0; x \neq y\}$

En [9], se da el siguiente el resultado fundamental para los  $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n q})$

**Teorema 3.1.** Si  $p$  and  $q$  son primos distintos y  $n$  es un entero positivo mayor que 1, entonces  $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n q})$  es:

- $p^{\frac{n}{2}}$ -partito, si  $n$  es par.
- $(p^{\frac{n-1}{2}} + 1)$ -partito, si  $n$  es impar.

**Ejemplo 4.** Tomando como referencia el anillo  $\mathbb{Z}_{24} = \mathbb{Z}_{2^3 3}$ , se tiene que  $p = 2$ ,  $q = 3$  y  $n = 3$ . De donde  $p^{\frac{n-1}{2}} + 1 = 2^{\frac{3-1}{2}} + 1 = 3$ . As,  $\Gamma(\mathbb{Z}_{24})$  es un grafo simple 3-partito.

De igual manera  $\mathbb{Z}_{50} = \mathbb{Z}_{5^2 2}$ , de donde  $p = 5$ ,  $q = 2$  y  $n = 2$ . As,  $(p^{\frac{n}{2}}) = 5^{\frac{2}{2}} = 5$ . Es decir,  $\Gamma(\mathbb{Z}_{50})$  es un grafo simple 5-partito.

### 4 Clique, diámetro y girth de $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$

A los grafos divisores de cero también se le asocian el clique, diámetro y girth, como se verá a continuación.

**Definición 6.** Un grafo simple  $G = (V, E)$  es completo, si cada uno de los vértices es adyacente a los restantes vértices del grafo  $G$ , el grafo completo de orden  $n$  es denotado por  $K_n$ .

**Definición 7.** Todo subgrafo  $K_n$ , de cualquier  $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$  es llamado un **Clique**.

**Definición 8.** El número de clique de  $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$ , denotado por  $\omega(\Gamma(\mathbb{Z}_m))$ , es el mayor entero  $r \geq 1$ , tal que  $K_r \subset \Gamma(\mathbb{Z}_m)$ . Es decir, es el tamaño del clique maximal.

**Definición 9.** La distancia entre un par de vértices de un grafo  $G$ , es la longitud del camino más corto entre ellos. Si no existe tal camino se dice que la distancia es infinita.

**Definición 10.** El diámetro del  $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$ , es la mayor distancia entre cualquiera dos vértices distintos. Tal distancia se denotará por  $\Delta(\Gamma(\mathbb{Z}_m))$

Un resultado importante que aparece en [1], en el cálculo del diámetro de  $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n q})$  es el siguiente:

**Teorema 4.1.** Si  $p$  y  $q$  son primos distintos y  $n$  es un entero,  $n \geq 1$ . Entonces  $\Delta(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n q})) = 3$

**Definición 11.** El girth de un  $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$ , es la longitud del ciclo más corto. El girth de  $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$ , se denotará por  $\Phi(\Gamma(\mathbb{Z}_m))$

**Ejemplo 5.** Sea el grafo divisor de cero del anillo  $\mathbb{Z}_{50}$ , esto es  $\Gamma(\mathbb{Z}_{50})$ , entonces:

- $\omega(\Gamma(\mathbb{Z}_{50})) = 5$ .
- $\Delta(\Gamma(\mathbb{Z}_{50})) = 3$ .
- $\Phi(\Gamma(\mathbb{Z}_{50})) = 3$ .

**Ejemplo 6.** Para el grafo  $\Gamma(\mathbb{Z}_{18}) = \Gamma(\mathbb{Z}_{3^2 2})$  todos los subgrafos completos no-isomorfos para  $\Gamma(\mathbb{Z}_{3^2 2})$  son  $K_2$  y  $K_3$ . Por lo tanto,  $\omega(\Gamma(\mathbb{Z}_{18})) = 3$

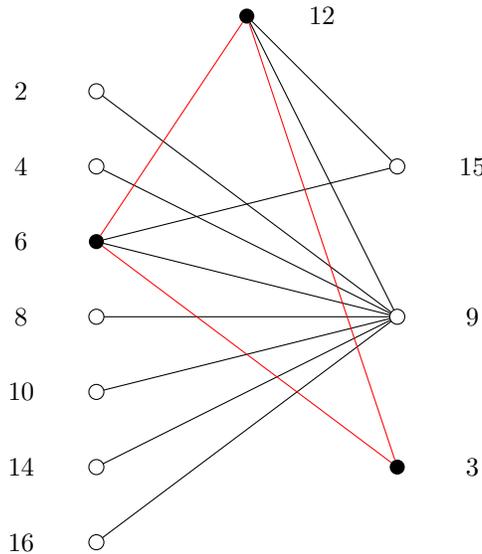


Figura 1. Grafo cero divisor del anillo  $\mathbb{Z}_{18}$ , con su clique maximal señalado en rojo

## 5 Método de representación

En esta sección se muestra un método para representar los  $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n q})$ , basado en la teoría de anillos, conjunto divisor de cero y conjuntos  $r$ -partitos. Es oportuno señalar, que ya existen una gran cantidad de métodos en este estilo, por ejemplo en [10], se presenta un método que articula la teoría de órbitas con las constantes baricéntricas y en [7], se da un método matricial que relaciona a las constantes baricéntricas y la teoría de matrices, en este último método se implementó con el lenguaje de computación conocido como MatLab.

### 5.1 Método

Supóngase que se quiere representar el grafo divisor de cero del anillo  $\mathbb{Z}_m$ , estos anillos trabajan con las clases de módulo  $m$ . En primer lugar, se chequea si  $m$  es primo. Si  $m$  es primo, entonces  $m$  no tiene divisores de cero y por lo tanto no existe su grafo divisor de cero, fundamentado en el corolario: “si  $p$  es primo entonces,  $\mathbb{Z}_p$  no tiene divisores”. En caso contrario, se procede a descomponer  $m$  en la forma  $p^n q$ , donde  $p, q$  son primos, a través de sus factores primos. Luego, se busca el conjunto divisor de cero del anillo  $\mathbb{Z}_{p^n q}$ . Seguidamente se busca una partición del conjunto divisor de cero, obtenido previamente, a través de la definición de conjuntos  $r$ -partitos, luego por teorema dado en [1], se chequea:

- $p^{\frac{n}{2}}$ -partito, si  $n$  es par.
- $(p^{\frac{n-1}{2}} + 1)$ -partito, si  $n$  es impar.

se tiene el tipo de grafo que se generará y por último se realiza la representación de dicho grafo.

## 6 Ejemplo de aplicación del método

**Ejemplo 7.** Representar del grafo divisor de cero del anillo  $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_{20}$ .

**Paso 0:** Se chequea si  $m = 20$  es primo, si es cierto  $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$  no existe. Sino continuar con el siguiente paso.

**Paso 1:** Se descompone  $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_{20}$  en la forma  $\mathbb{Z}_{p^n q}$ , esto es,  $\mathbb{Z}_{20} = \mathbb{Z}_{2^2 5}$

**Paso 2:** En este paso se procede a calcular el conjunto divisor de cero del anillo, esto es

$$\Omega(\mathbb{Z}_{20}) = \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$$

**Paso 3:** Aquí se usa la definición de conjuntos  $r$ -partitos, para buscar una partición de  $\Omega(\mathbb{Z}_{20})$ , una partición es:

$$\begin{aligned} v_1 &= \{2, 4, 6, 8, 12, 14, 16\} \\ v_2 &= \{5, 10, 15\} \end{aligned}$$

**Paso 4:** Construcción o representación de  $\Gamma(\mathbb{Z}_{20})$

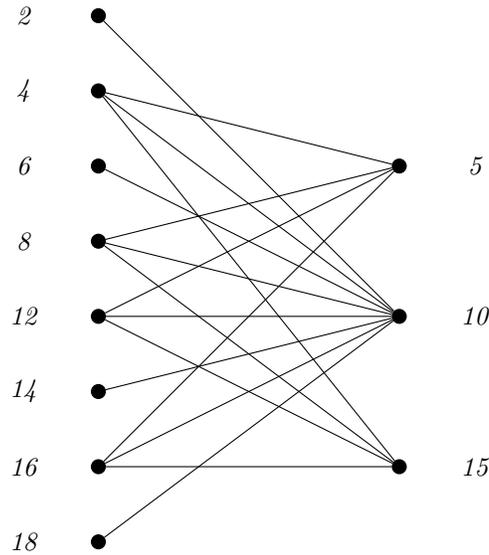


Figura 2. Grafo divisor de cero del anillo  $\mathbb{Z}_{20}$

## 7 Algoritmo principal del método para $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n q})$

**Entrada:**  $m$  entero positivo mayor o igual a 10.

**Salida:** Representación de  $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$ .

**Paso 0:** Se chequea la condición siguiente dada por corolario: Si  $m$  es primo, entonces  $\mathbb{Z}_m$  no tiene divisores de cero. Por lo tanto, no se tiene representación de  $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$ . En caso contrario.

**Paso 1:** Descomponer  $m$  en sus factores primos, esto se traduce en escribir,  $m = p^n q$ , donde  $p, q$  son números primos y  $n$  un entero positivo mayor o igual a 2.

**Paso 2:** Obtener el conjunto divisor de cero  $\mathbb{Z}_m$ .

**Paso 3:** Con los elementos del conjunto divisor de cero, se busca una partición de este conjunto a través de la definición de conjuntos  $r$ -partitos.

**Paso 4:** En este paso se busca, a través del valor de  $n$  el tipo de grafo que se generará. Esto se garantiza por Teorema.

**Paso 5:** Aquí, se realiza la representación o construcción del grafo  $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$ .

**Paso 6:** Salida  $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$ .

**Paso 7:** Fin.

Cuadro 1: Tabla con algunas clases de  $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$ 

$m$	Descomposicin $p^n q$	$\Gamma(\mathbb{Z}_m)$
12	$2^2 3$	2-partito
18	$3^2 2$	3-partito
20	$2^2 5$	2-partito
24	$2^3 3$	3-partito
28	$2^2 7$	2-partito
40	$2^3 5$	3-partito
48	$2^4 3$	4-partito
50	$5^2 2$	5-partito
56	$3^2 7$	3-partito
96	$7^2 2$	7-partito

## Referencias

- [1] Andersen, D. and Livinston, P. *The zero divisor graph of a commutative ring*, J. Algebra, **217** (1999), 434–447.
- [2] Andersen, D. and Nasser, M. *Becks Coloring of Conmutative ring*, J. Algebra, **159** (1993), 500–514.
- [3] Beck, I. *Coloring of Conmutative rings*, J. Algebra, **116** (1988), 288–226.
- [4] Chartrand, G. and Lesniak, L. *Graphs and Digraphs*, Wadsworth and Brooks. 3era ed, California 1986.
- [5] Cordova, N.; Gholston, C. and Hauser, H. *The Structure of Zero-Divisor Graphs*, J. Algebra, 2005, prep print.
- [6] Fanelli, C. *Grafo Divisor de Zero de un Anillo Conmutativo*, Tesis de Mestra, Universidad de Maringa, Brazil, 2011.
- [7] Otero, J. *Un Método matricial para el cálculo de las constantes de Davenport y Olson  $k$ -baricéntricas*. Tesis de Maestría. Universidad de Oriente. Venezuela, 2011.
- [8] Rojo, A. *Algebra I*, Buenos Aires, Argentina, 1983.
- [9] Shuker, N.; Mohammad, H. and Ali, A. *The Zero Divisor Graph of  $\mathbb{Z}_{p^n q}$* , International Journal of Algebra, **6** (2012), 1049–1055.
- [10] Villarroel, F. *La constante de olson  $k$ -baricéntrica y un teorema inverso de Erds-Ginzburg-Ziv*. Tesis Doctoral. Universidad Central de Venezuela, 2008.

# Propiedad multiplicativa, simultánea, de la derivada y la integral en funciones de clase $\mathcal{C}^1$

*Simultaneous multiplicative property of the derivative and integral in functions of  $\mathcal{C}^1$  class*

Tobías Rosas Soto (trosas@demat-fecluz.org)

Departamento de Matemática  
Facultad Experimental de Ciencias  
Universidad del Zulia  
Maracaibo - Venezuela

Irma Abrigo Córdoba (irabrigoco@uide.edu.ec)

Mayra García Calle (magarciaca@uide.edu.ec)

Eduardo Suárez Vinuesa (edsuarezvi@uide.edu.ec)

Universidad Internacional del Ecuador  
Ecuador

## Resumen

En 2015 el estudio titulado *Una propiedad multiplicativa de la derivada en funciones de clase  $\mathcal{C}^1$*  mostró que dada una función  $f(x)$  de clase  $\mathcal{C}^1$ , con  $f(x) \neq \mathbf{e}^x$ , se puede encontrar una familia de funciones  $\mathcal{F}_{f(x)}$  donde  $g(x) \in \mathcal{F}_{f(x)}$  si cumple que  $[f(x).g(x)]' = f'(x).g'(x)$  (ver [3]). En concordancia con el mencionado estudio, y manteniendo como finalidad mostrar al estudiante de Matemática (o cualquier otra ciencia) que es posible realizar investigación con estructuras simples, este artículo muestra que dada una función  $f(x)$  de clase  $\mathcal{C}^1$ , existe una familia de funciones  $\mathcal{I}_{f(x)}$  tal que  $g(x) \in \mathcal{I}_{f(x)}$  si cumple que  $\int [f(x).g(x)]dx = \int f(x)dx. \int g(x)dx$ . También se estudia si existe una familia de funciones  $\mathcal{SIF}_{f(x)}$  tal que  $h(x) \in \mathcal{SIF}_{f(x)}$  si cumple simultáneamente la propiedad multiplicativa de la derivada y la integral para una función  $f(x)$  dada de clase  $\mathcal{C}^1$ .

**Palabras y frases clave:** Derivada, integral, funciones de clase  $\mathcal{C}^1$ , multiplicatividad.

## Abstract

In 2015 the study entitled *A multiplicative property of the derivative in  $\mathcal{C}^1$  class functions* showed that given a function  $f(x)$  of  $\mathcal{C}^1$  class, with  $f(x) \neq \mathbf{e}^x$ , you can find a family of functions  $\mathcal{F}_{f(x)}$  where  $g(x) \in \mathcal{F}_{f(x)}$  if it satisfies that  $[f(x).g(x)]' = f'(x).g'(x)$  (see [3]). In accordance with the mentioned study, and keeping as purpose to show to the Mathematics student (or any other science) that it is possible to perform research with simple structures, this article shows that given a function  $f(x)$  of  $\mathcal{C}^1$  class, there is a family of functions  $\mathcal{I}_{f(x)}$  such that  $g(x) \in \mathcal{I}_{f(x)}$  if it satisfies that  $\int [f(x).g(x)] dx = \int f(x) dx. \int g(x) dx$ . The existence of a family of functions  $\mathcal{SIF}_{f(x)}$ , such that  $h(x) \in \mathcal{SIF}_{f(x)}$  if it simultaneously satisfies

---

Recibido 25/10/2018. Revisado 01/11/2018. Aceptado 20/12/2018.

MSC (2010): Primary 26A36, 26A33; Secondary 26A06, 26A24.

Autor de correspondencia: Irma Abrigo Córdoba

the multiplicative property of the derivative and the integral for a given function  $f(x)$  of  $\mathcal{C}^1$  class, is also studied.

**Key words and phrases:** Derivative, integral,  $\mathcal{C}^1$  class functions, multiplicativity.

## 1 Introducción

Gran parte del trabajo de un matemático es realizar nuevas investigaciones que ayuden al desarrollo teórico de la Matemática y su aplicación en otras áreas del saber. Por ende, en la formación de los nuevos profesionales de esta ciencia, se busca incentivar la investigación a sus distintos niveles. Sin embargo, un buen número de docentes e investigadores matemáticos tienden, quizás sin percatarse, a desmotivar al estudiante de pregrado a realizar investigación desde los principios de sus estudios debido al nivel de complejidad en las estructuras matemáticas que exigen estén presentes en una investigación.

Existen investigaciones que han mostrado resultados interesantes en alguna rama de la Matemática, donde gran número de las herramientas usadas en la misma son de un nivel matemático bastante elemental (ver [3, 4, 5]). Es importante resaltar que el conocimiento matemático, por muy simple que este sea, puede tener una aplicación muy importante, la cual no siempre es sencilla de puntualizar o descubrir. Por lo general, gran parte del conocimiento matemático encuentra sus aplicaciones a lo largo del tiempo y no de forma inmediata. De manera que, toda investigación es importante siempre y cuando esté bien estructurada y sea innovadora (que no se haya realizado antes). En este orden de ideas, el siguiente trabajo no busca presentar una investigación profunda sobre el tópico que se estudia, sino que se enfoca en mostrar al estudiante de Matemática la posibilidad de hacer pequeñas investigaciones utilizando estructuras y nociones elementales, a través de la búsqueda de respuestas a preguntas capciosas sobre temas básicos, en este caso en el área del cálculo diferencial e integral en una sola variable.

El presente artículo se enfoca esencialmente en cierta propiedad multiplicativa de la integral, que cumplen algunas funciones de clase  $\mathcal{C}^1$ . A saber, se da respuesta a la siguiente pregunta planteada en [3]: ¿Dada una función  $f(x)$  de clase  $\mathcal{C}^1$ , existe alguna función  $g(x)$  tal que

$$\int f(x).g(x) dx = \int f(x) dx \int g(x) dx ? \quad (1.1)$$

También se estudia si es posible que la función  $f(x)$  cumpla, simultáneamente, la propiedad expresada en la ecuación (1.1) y la siguiente igualdad

$$[f(x).g(x)]' = f'(x).g'(x) \quad (1.2)$$

## 2 Preliminares

Es importante puntualizar que el nivel de complejidad de las herramientas matemáticas que son usadas en este trabajo se limita al presente en los cursos básicos de cálculo diferencial e integral en una sola variable, incluyendo las nociones básicas de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo grado.

Para hacer el trabajo lo más autocontenido posible se presentan a continuación, de manera puntual, los conceptos, nociones y notaciones que se usan a lo largo de todo el trabajo. Además, para algunos enunciados se incluirán sus demostraciones.

Dada una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se denotará por  $\text{Dom}(f)$  al dominio de la función  $f(x)$ . Se dirá que  $f(x)$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  si ésta es derivable y su derivada es continua en todo el dominio de  $f(x)$ , lo cual se denotará escribiendo  $f(x) \in \mathcal{C}^1$ . Por otro lado, se escribirá  $f(x) \neq 0$  para denotar que la función  $f(x)$  no es cero en ningún punto  $x \in \text{Dom}(f)$ .

En cuanto a los métodos de integración que se emplean en el trabajo solo se toman en cuenta el método de cambio de variable y el de por partes, no se toma en cuenta la solución vía series de potencia.

Las nociones sobre ecuaciones diferenciales se limitan a la solución de ecuaciones diferenciales homogéneas de primer y segundo orden, con coeficientes constantes para el segundo caso. A continuación se ilustran puntualmente, los casos que se utilizan en el trabajo (ver [1, 2, 6]). Dada una ecuación diferencial

$$q(x)y' + p(x)y = 0$$

sus soluciones son las mismas de la ecuación

$$y' + \frac{p(x)}{q(x)}y = 0$$

siempre y cuando  $q(x) \neq 0$ . Dichas soluciones se pueden encontrar mediante el uso del factor integrante

$$e^{\int \frac{p(x)}{q(x)} dx}$$

Obteniendo que

$$y(x) = k e^{-\int \frac{p(x)}{q(x)} dx}$$

con  $k \in \mathbb{R}$ . Para el caso de ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes solo se hace uso del método de solución de una ecuación del tipo:

$$y'' - ky = 0,$$

con  $k \in \mathbb{R}^+$ , cuya solución se encuentra mediante el uso de la ecuación auxiliar  $r^2 - k = 0$  y la misma está dada por

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{k}x} + c_2 e^{-\sqrt{k}x} \quad (2.1)$$

con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

A continuación se presentan una serie de resultados, presentes en [3], relacionados con la derivada, que serán de utilidad a lo largo del trabajo.

**Teorema 2.1.** *Dada una función  $f(x)$  de clase  $\mathcal{C}^1$ , tal que  $f'(x) - f(x) \neq 0$  para todo  $x \in \text{Dom}(f' - f)$ , entonces existe una familia de funciones  $\mathcal{F}_{f(x)}$  definida por:*

$$\mathcal{F}_{f(x)} = \{g(x) \in \mathcal{C}^1 : [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g'(x)\}$$

donde  $g(x) = k e^{\int \frac{f'(x)}{f'(x) - f(x)} dx}$ , con  $k \in \mathbb{R}$ . Además,  $\mathcal{F}_{f(x)} \neq \{0\}$  si, y solo si, existe la solución de la integral  $\int \frac{f'(x)}{f'(x) - f(x)} dx$ .

**Proposición 2.1.** No existe función  $g(x) \in \mathcal{C}^1$ , con  $g(x)$  distinta de la función nula, tal que

$$[g(x)k\mathbf{e}^x]' = kg'(x)\mathbf{e}^x \tag{2.2}$$

con  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

*Demostración.* Nótese que

$$[g(x)k\mathbf{e}^x]' = kg'(x)\mathbf{e}^x + kg(x)\mathbf{e}^x \tag{2.3}$$

Luego, igualando las ecuaciones (2.2) y (2.3), se tiene que  $kg(x)\mathbf{e}^x = 0$ . Así, dado que  $k \neq 0$  y  $\mathbf{e}^x \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , se tiene  $g(x) = 0$ . Por tanto, no existe  $g(x) \neq 0$  que cumpla la ecuación (2.2).  $\square$

**Proposición 2.2.** Dda la función  $f(x) = \mathbf{e}^{ax}$ , con  $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ , entonces

$$\mathcal{F}_{\mathbf{e}^{ax}} = \{g(x) \in \mathcal{C}^1 : g(x) = r\mathbf{e}^{bx}, r \in \mathbb{R}\}$$

con  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ .

*Demostración.* Sean  $w(x) = \mathbf{e}^{ax}$  y  $h(x) = \mathbf{e}^{bx}$  con  $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ , entonces

$$(\mathbf{e}^{ax}\mathbf{e}^{bx})' = (\mathbf{e}^{ax})'(\mathbf{e}^{bx})' \iff (a+b)\mathbf{e}^{(a+b)x} = a\mathbf{e}^{(a+b)x} \iff a+b = ab, \tag{2.4}$$

es decir,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ . Luego aplicando el Teorema 2.1 se tiene que

$$\mathcal{F}_{\mathbf{e}^{ax}} = \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1 : g(x) = k\mathbf{e}^{-\int \frac{a\mathbf{e}^{ax}}{a\mathbf{e}^{ax} - \mathbf{e}^{ax}} dx}, \text{ con } k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Solucionando la integral  $\int \frac{a\mathbf{e}^{ax}}{a\mathbf{e}^{ax} - \mathbf{e}^{ax}} dx$  se tiene que

$$\mathcal{F}_{\mathbf{e}^{ax}} = \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1 : g(x) = r\mathbf{e}^{\left(\frac{a}{a-1}\right)x}, \text{ con } r \in \mathbb{R} \right\},$$

donde  $r = k\mathbf{e}^c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ).  $\square$

**Proposición 2.3.** Sea  $f(x) = k$ , con  $k \in \mathbb{R}$ , una función constante. Las siguientes afirmaciones son válidas:

1. Si  $k \neq 0$ , entonces  $\mathcal{F}_{f(x)} = \mathbb{R}$ .
2. Si  $k = 0$ , entonces  $\mathcal{F}_{f(x)} = \{g(x) : g(x) \in \mathcal{C}^1\}$ .

*Demostración.* Supongamos que  $g(x)$  y  $f(x)$  cumplen la ecuación (1.2), así

$$kg'(x) = [kg(x)]' = (k)'[g(x)]' = 0 \cdot g'(x) = 0 \tag{2.5}$$

Por tanto se tiene que  $k = 0$  o  $g'(x) = 0$ . Si  $k = 0$ , es claro que toda función  $g(x) \in \mathcal{C}^1$  cumplirá la ecuación (1.2). Por otro lado, si  $g'(x) = 0$ , se tiene que  $g(x) = h$  con  $h \in \mathbb{R}$  y por tanto cualquier función constante cumpliría en este caso la ecuación (1.2).  $\square$

### 3 Resultados

Supóngase que se tienen dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  de clase  $\mathcal{C}^1$ , con  $f(x) \neq 0$ , tales que cumplen la ecuación (1.1). Se tratará de determinar la forma de  $g(x)$  en función de  $f(x)$ . Nótese que:

$$\left( \int f(x) \cdot g(x) dx \right)' = \left( \int f(x) dx \int g(x) dx \right)'$$

de manera que

$$f(x) \cdot g(x) = f(x) \int g(x) dx + g(x) \int f(x) dx$$

De aquí se obtiene la ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden con coeficientes funcionales

$$g(x) \left[ f(x) - \int f(x) dx \right] - f(x) \int g(x) dx = 0 \quad (3.1)$$

Nótese que haciendo  $F(x) = \int f(x) dx$  y  $G(x) = \int g(x) dx$  en la ecuación (3.1), se obtiene que

$$G'(x) [F'(x) - F(x)] - F'(x)G(x) = 0 \quad (3.2)$$

Esto indica que basta encontrar una solución de la ecuación (3.2) para obtener el valor de  $g(x)$  en función de  $f(x)$ . Si

$$F'(x) - F(x) = 0 \quad (3.3)$$

para todo  $x \in \text{Dom} [F'(x) - F(x)]$ , usando el factor integrante  $\mathbf{e}^{-x}$  se tiene que la solución de la ecuación (3.3) está dada por  $F(x) = k\mathbf{e}^x$ . Así,

$$\int f(x) dx = k\mathbf{e}^x \implies f(x) = k\mathbf{e}^x$$

con  $k \in \mathbb{R}$ . Luego, sustituyendo en la ecuación (3.1) el valor de  $f(x)$ , se tiene que

$$k\mathbf{e}^x \int g(x) dx = 0$$

Como  $\mathbf{e}^x > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , entonces  $\int g(x) dx = 0$ . Así,  $g(x)$  es la función cero. Esto demuestra el siguiente resultado:

**Proposición 3.1.** *No existe una función  $g(x) \in \mathcal{C}^1$ , distinta de la función cero, tal que*

$$[g(x)k\mathbf{e}^x]' = g'(x)k\mathbf{e}^x,$$

con  $k \in \mathbb{R}$ .

Por otro lado, si

$$F'(x) - F(x) \neq 0 \quad \forall x \in \text{Dom} [F'(x) - F(x)]$$

se tiene que la ecuación (3.2) se transforma en la siguiente ecuación:

$$G'(x) - \frac{F'(x)}{F'(x) - F(x)}G(x) = 0 \tag{3.4}$$

Aplicando el factor integrante  $e^{\int \frac{-F'(x)}{F'(x) - F(x)} dx}$  a la ecuación (3.4), se tiene que la solución de la misma está dada por

$$G(x) = k e^{\int \frac{F'(x)}{F'(x) - F(x)} dx},$$

con  $k \in \mathbb{R}$ . Así,

$$g(x) = k \frac{F'(x)}{F'(x) - F(x)} e^{\int \frac{F'(x)}{F'(x) - F(x)} dx} = \frac{k f(x)}{f(x) - \int f(x) dx} e^{\int \frac{f(x)}{f(x) - \int f(x) dx} dx}$$

De manera que la función  $g(x)$  existe si, y solo si, las integrales  $\int f(x) dx$  y  $\int \frac{f(x)}{f(x) - \int f(x) dx} dx$  tienen solución. Por tanto, denotando

$$\mathcal{I}_{f(x)} = \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1 : \int f(x).g(x) dx = \int f(x) dx \int g(x) dx \right\},$$

$$\mathcal{I}_{f(x)} = \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1 : g(x) = \frac{k f(x)}{f(x) - \int f(x) dx} e^{\int \frac{f(x)}{f(x) - \int f(x) dx} dx} \right\}$$

se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 3.1.** *Dada una función  $f(x) \in \mathcal{C}^1$ , tal que  $f(x) - \int f(x) dx \neq 0$ , existe una familia de funciones*

$$\mathcal{I}_{f(x)} = \left\{ g_k(x) \in \mathcal{C}^1 : \int f(x).g_k(x) dx = \int f(x) dx \int g_k(x) dx \right\}$$

donde  $g_k(x) = \frac{k f(x)}{f(x) - \int f(x) dx} e^{\int \frac{f(x)}{f(x) - \int f(x) dx} dx}$ , con  $k \in \mathbb{R}$ . Además,  $\mathcal{I}_{f(x)} \neq \{0\}$  si y

solo si las integrales  $\int f(x) dx$  y  $\int \frac{f(x)}{f(x) - \int f(x) dx} dx$  tienen solución.

Es importante recalcar que debido a la forma de las funciones pertenecientes a la familia  $\mathcal{I}_{f(x)}$ , dos funciones  $g_0(x)$  y  $g_1(x)$  de dicha familia difieren en solo una constante. Por otro lado, de los resultados presentes en [3], relacionados con la propiedad multiplicativa de la derivada, son válidos los enunciados presentes en: el Corolario 3.1; la Proposición 3.2; el Lema 3.1; y el Corolario 3.2, aplicadas a la propiedad multiplicativa de la integral.

Tómese ahora la función  $f(x) = e^{ax}$ , tomando en cuenta el Teorema 3.1 se tiene que

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{ke^{ax}}{e^{ax} - \int e^{ax} dx} e^{\int \frac{e^{ax}}{e^{ax} - \int e^{ax} dx} dx} \\ &= \frac{kae^{ax}}{ae^{ax} - e^{ax}} e^{\int \frac{ae^{ax}}{ae^{ax} - e^{ax}} dx} \\ &= \frac{ka}{a-1} e^{\int \frac{a}{a-1} dx} = \frac{kae^c}{a-1} e^{\left(\frac{a}{a-1}\right)x} \end{aligned}$$

con  $c \in \mathbb{R}$ . Así, se tiene que:

$$\mathcal{I}_{e^{ax}} = \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1 : g(x) = \frac{kae^c}{a-1} e^{\left(\frac{a}{a-1}\right)x} \text{ con } k, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Ahora, veamos que si  $f(x) = he^{ax}$  y  $g(x) = re^{bx}$ , entonces se cumple que:

$$\int he^{ax} re^{bx} dx = \int he^{ax} dx \int re^{bx} dx \quad (3.5)$$

para que se cumpla la ecuación (3.5) se debe tener que

$$\begin{aligned} \frac{hr}{a+b} e^{(a+b)x} &= \frac{hr}{ab} e^{(a+b)x} \\ a+b &= ab \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como por hipótesis tiene que  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ , entonces se cumple la ecuación (3.6) y por tanto es válida la ecuación (3.5). Esto muestra el siguiente resultado:

**Lema 3.1.** Dada la función  $f(x) = he^{ax}$ , con  $a, h \in \mathbb{R}$  ( $a \neq 1$ ), se tiene que

$$\mathcal{I}_{f(x)} = \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1 : g(x) = we^{bx} \text{ con } w \in \mathbb{R} \right\},$$

si, y solo si,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ .

Una pregunta interesante sería ¿existe una función  $f(x) \in \mathcal{C}^1$  para que cumpla:

$$\int e^{f(x)} f(x) dx = \int e^{f(x)} dx \int f(x) dx? \quad (3.7)$$

Claramente la función cero satisface la ecuación (3.7). Por otro lado, por simple inspección se puede notar que no resultaría trivial determinar si existe una función, o familia de funciones,

$f(x) \neq 0$  para todo  $x \in \text{Dom}[f(x)]$  tal que la ecuación (3.7) sea válida. Sin embargo, se pueden estudiar ciertos casos particulares estableciendo ciertas condiciones para  $f(x)$ . En primera instancia supóngase que

$$f'(x) = f(x) \tag{3.8}$$

así

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = \int e^{f(x)} dx \int f'(x) dx$$

Luego, usando el método de integración de cambio de variable (sustitución), en el miembro derecho de la igualdad, se obtiene que

$$e^{f(x)} = f(x) \int e^{f(x)} dx$$

y por tanto

$$\int e^{f(x)} dx = \frac{e^{f(x)}}{f(x)} \tag{3.9}$$

Derivando ambos miembros de la igualdad (3.9) se tiene que

$$e^{f(x)} = \frac{f'(x)e^{f(x)}f(x) - f'(x)e^{f(x)}}{[f(x)]^2}$$

así,

$$[f(x)]^2 = f'(x)[f(x) - 1]$$

Usando la ecuación (3.8) se obtiene que  $f(x) = 0$  lo cual es una contradicción. Con esto se ha mostrado el siguiente resultado:

**Teorema 3.2.** *Sea  $f(x) \in \mathcal{C}^1$ , entonces  $f'(x) = f(x)$  y  $\int e^{f(x)} f(x) dx = \int e^{f(x)} dx \int f(x) dx$  si, y solo si,  $f(x)$  es la función cero.*

Ahora, derivando en la ecuación (3.7) ambos miembros de la igualdad, se obtiene que

$$e^{f(x)} f(x) = e^{f(x)} \int f(x) dx + f(x) \int e^{f(x)} dx$$

así,

$$\frac{e^{f(x)}[f(x) - \int f(x) dx]}{f(x)} = \int e^{f(x)} dx \tag{3.10}$$

Derivando, en la ecuación (3.10), ambos miembros de la igualdad se obtiene:

$$\frac{\{f'(x)e^{f(x)}[f(x) - \int f(x) dx] + e^{f(x)}[f'(x) - f(x)]\}f(x) - f'(x)e^{f(x)}[f(x) - \int f(x) dx]}{[f(x)]^2} = e^{f(x)}$$

de donde se deduce que:

$$\frac{\{f'(x)[f(x) - \int f(x) dx] + [f'(x) - f(x)]\}f(x) - f'(x)[f(x) - \int f(x) dx]}{[f(x)]^2} = 1,$$

$$\frac{\{f'(x)[f(x) - \int f(x) dx] - f(x)\}f(x) + f'(x) \int f(x) dx}{[f(x)]^2} = 1,$$

$$[f(x)]^2[f'(x) - 2] + [1 - f(x)]f'(x) \int f(x) dx = 0 \quad (3.11)$$

De la ecuación (3.11) se puede deducir que  $f(x)$  no puede ser una función constante, pues de serlo se tendría que  $f'(x) = 0$  y por tanto se obtendría que  $-2[f(x)]^2 = 0$ , lo cual es una contradicción. De igual manera  $f(x)$  no puede ser una polinómica de la forma  $ax + b$ , con  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Si  $f(x) = ax + b$ , entonces  $\int f(x) dx = ax^2 + bx$  y  $f'(x) = a$ . Sustituyendo estos valores en la ecuación (3.11) se obtendría que

$$(a - 2)(a^2x^2 + 2abx + b^2) + [(1 - b) - ax]a(ax^2 + bx) = 0$$

$$a^2(a - 2)x^2 + 2ab(a - 2)x + b^2(a - 2) + (1 - b)a^2x^2 + (1 - b)abx - a^3x^3 - a^2bx^2 = 0 \quad (3.12)$$

De la ecuación (3.12) se puede deducir fácilmente que  $a = 0$ , y por tanto  $b = 0$ , lo cual es una contradicción. Así, es válido el siguiente enunciado:

**Lema 3.2.** *Ninguna función  $f(x) = k$  o  $f(x) = ax + b$ , con  $k, a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , satisface que*

$$\int e^{f(x)} f(x) dx = \int e^{f(x)} dx \int f(x) dx$$

De manera similar se pueden estudiar más casos particulares para valores de  $f(x)$  y establecer que la ecuación (3.1) no se cumple para dichos valores. Esto parece suponer que la única función que cumple la ecuación (3.7) es la función cero. Sin embargo, como es de notar, un procedimiento definitivo que establezca la veracidad de dicha suposición amerita el uso de herramientas matemáticas de un nivel mayor al preestablecido en este trabajo. Por tal motivo, se deja dicha suposición como un problema abierto.

Otra pregunta que es posible atacar con las herramientas matemáticas que se han preestablecido sería: ¿existe una función  $f(x) \neq 0$  tal que:

$$\int [f(x)]^2 dx = \left[ \int f(x) dx \right]^2 ? \quad (3.13)$$

Derivando ambos miembros de la ecuación (3.13) se tiene que:

$$[f(x)]^2 = 2f(x) \int f(x) dx$$

Haciendo  $F(x) = \int f(x) dx$  se tiene que

$$F(x)[F(x) - 2F'(x)] = 0$$

Como se busca una función  $f(x) \neq 0$  entonces  $F(x) \neq 0$  y así

$$F(x) - 2F'(x) = 0 \quad (3.14)$$

Utilizando el factor integrante  $e^{-2x}$  en la ecuación (3.14) se obtiene que  $F(x) = he^{2x}$  con  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y así  $f(x) = 2he^{2x}$ .

Ahora por el Teorema 3.1 se tiene que si  $f(x) = 2he^{2x}$ , con  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , entonces existe la familia

$$\mathcal{I}_{2h}e^{2x} = \left\{ g_k(x) \in \mathcal{C}^1 : g_k(x) = k \frac{2he^{2x}}{2he^{2x} - he^{2x}} e^{\int \frac{2he^{2x}}{2he^{2x} - he^{2x}} dx} \text{ con } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Como

$$\frac{2he^{2x}}{2he^{2x} - he^{2x}} = 2,$$

entonces se tiene que

$$\mathcal{I}_{2h}e^{2x} = \{g_k(x) \in \mathcal{C}^1 : g_k(x) = 2ke^{2x} \text{ con } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

Con ésto se tiene el siguiente resultado:

**Lema 3.3.** *Sea  $f(x) \in \mathcal{C}^1$ , entonces se cumple que  $\int [f(x)]^2 dx = \left[ \int f(x) dx \right]^2$  si, y solo si,  $f(x) = 2he^{2x}$  con  $h \in \mathbb{R}$ .*

Por último, sería pertinente preguntarse si existen funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ , distintas de la función cero, tales que cumplan simultáneamente las ecuaciones (1.1) y (1.2), es decir, que cumplan

$$[f(x).g(x)]' = f'(x).g'(x) \quad \text{y} \quad \int f(x).g(x) dx = \int f(x) dx \int g(x) dx \quad (3.15)$$

Tomando en cuenta la Proposición 2.2 y el Lema 3.1, se tiene que las funciones  $f(x) = he^{ax}$  y  $g(x) = re^{bx}$ , con  $r, h, a, b \in \mathbb{R}$ , tales que  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$  cumplen las ecuaciones presentes en (3.15). De manera que definiendo:

$$\mathcal{SLF}_{f(x)} = \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1 : [f(x).g(x)]' = f'(x).g'(x) \text{ y } \int f(x).g(x) dx = \int f(x) dx \int g(x) dx \right\}$$

se puede decir que  $\mathcal{SLF}_{he^{ax}} \neq \emptyset$  pues  $\left\{ re^{bx} : r, b \in \mathbb{R} \text{ y } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \right\} \subseteq \mathcal{SLF}_{he^{ax}}$

Tratemos de ver si es posible encontrar alguna otra forma para  $f(x)$  y  $g(x)$  de tal manera que cumplan las ecuaciones presentes en (3.15). Obsérvese que derivando la segunda ecuación presente en (3.15) se tiene que

$$f(x).g(x) = \left[ \int f(x) dx \int g(x) dx \right]' = f(x) \int g(x) dx + g(x) \int f(x) dx. \quad (3.16)$$

Derivando ahora la ecuación (3.16), y usando la segunda ecuación presente en (3.15), se tiene que

$$f'(x).g'(x) = f'(x) \int g(x) dx + f(x)g'(x) + g'(x) \int f(x) dx + g(x)f'(x)$$

$$g'(x) \left[ f'(x) - \int f(x) dx \right] - 2g(x)f(x) - \int g(x) dx f'(x) = 0$$

Haciendo  $G(x) = \int g(x) dx$ , se tiene la siguiente ecuación diferencial homogénea de segundo orden con coeficientes funcionales:

$$G''(x) \left[ f'(x) - \int f(x) dx \right] - 2G'(x)f(x) - G(x)f'(x) = 0 \quad (3.17)$$

En este punto es importante resaltar que, dada la dificultad de resolver una ecuación diferencial homogénea de segundo orden con coeficientes funcionales no constantes, se centrará el estudio de la ecuación (3.17) en los casos donde se obtenga una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Por tanto, se estudiarán dos casos: cuando  $f'(x) - \int f(x) dx = 0$ ; y cuando  $f'(x) = 0$ . Sin embargo, el segundo de los casos mencionadas no es posible ya que si  $f'(x) = 0$ , entonces  $f(x)$  sería constante y no cumpliría la ecuación (1.2). Por tal motivo, se enfocará el estudio solo en el primer caso.

**Caso:**  $f'(x) - \int f(x) dx = 0$ .

Haciendo  $F(x) = \int f(x) dx$  se obtiene la ecuación

$$F''(x) - F(x) = 0$$

que tiene la ecuación auxiliar  $r^2 - 1 = 0$ . Así,  $F(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$  con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , por la ecuación (2.1). Por tanto,

$$f(x) = F'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x} \quad (3.18)$$

Tomando en cuenta que

$$[g(x)(c_1 e^x - c_2 e^{-x})]' = [g(x)c_1 e^x]' - [g(x)c_2 e^{-x}]',$$

se debe tener que  $[g(x)c_1 e^x]' = g'(x)(c_1 e^x)'$  y  $[g(x)c_2 e^{-x}]' = g'(x)(c_2 e^{-x})'$  para que  $g(x)$  y  $f(x)$  cumplan la ecuación (1.2). Sin embargo, por la Proposición 2.1 se tiene que  $c_1 = 0$  y por tanto  $f(x) = -c_2 e^{-x}$ .

Ahora de la ecuación (3.17) se obtiene que

$$2G'(x)f(x) + G(x)f'(x) = 0 \quad (3.19)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.19) el valor de  $f(x)$  se obtiene que

$$G'(x)(2c_2 e^{-x}) - G(x)(c_2 e^{-x}) = 0$$

Como  $f(x) \neq 0$ , entonces  $c_2 \neq 0$ , y como  $e^{-x} \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , se tiene que

$$G'(x) - \frac{1}{2}G(x) = 0 \quad (3.20)$$

Utilizando el factor integrante  $e^{-\frac{1}{2}x}$  en la ecuación (3.20), se tiene que  $G(x) = r e^{\frac{1}{2}x}$  con  $r \in \mathbb{R}$ . Así,

$$g(x) = G'(x) = \frac{r}{2} e^{\frac{1}{2}x}$$

Comprobemos que las funciones  $f(x) = -c_2 e^{-x}$  y  $g(x) = \frac{r}{2} e^{\frac{1}{2}x}$  satisfacen las ecuaciones (1.1) y (1.2). Así,

$$[f(x)g(x)]' = \left( \frac{-c_2 r}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \right)' = \frac{c_2 r}{4} e^{-\frac{1}{2}x} \quad \text{y} \quad f'(x)g'(x) = (c_2 e^{-x}) \left( \frac{r}{4} e^{\frac{1}{2}x} \right) = \frac{c_2 r}{4} e^{-\frac{1}{2}x}$$

donde claramente se ve que se cumple la ecuación (1.2). Comprobemos ahora la ecuación (1.1):

$$\int f(x)g(x) dx = \int \frac{-c_2 r}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx = c_2 r e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\int f(x) dx \int g(x) dx = (c_2 e^{-x}) \left( r e^{\frac{1}{2}x} \right) = c_2 r e^{-\frac{1}{2}x}$$

Nótese que haciendo  $a = -1$  y  $b = \frac{1}{2}$ , se tiene que  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ .

**Caso:**  $f'(x) = 0$ .

Puesto que  $f'(x) = 0$ , se tiene que  $f(x) = k$  ( $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ). Luego, por la Proposición 2.3 se tiene que las únicas funciones  $g(x)$  que satisfacen la ecuación (1.2) son las funciones constantes, pero claramente éstas no satisfacen la ecuación (1.1). Por tanto no existen funciones  $g(x) \in \mathcal{C}^1$ , distintas de cero, tal que  $g(x) \in \mathcal{SLF}_{f(x)}$  si  $f'(x) = 0$ .

## 4 Observaciones

Como se puede observar en el cuerpo del trabajo quedaron para futuras investigaciones preguntas tales como:

1. ¿Existe alguna función  $f(x) \neq 0$  tal que  $\int e^{f(x)} f(x) dx = \int e^{f(x)} dx \int f(x) dx$ ?
2. Dada una función  $f(x) \notin \{0, h e^{ax}\}$ , con  $h, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . ¿Se podría determinar la forma de las funciones  $g(x) \in \mathcal{SLF}_{f(x)}$  en términos de  $f(x)$ ?

De este estudio parece intuirse que la única función que satisface la primera pregunta es la función cero. Sin embargo, no se ha establecido una demostración concreta de tal suposición. Por otro lado, la complicación presente en la segunda pregunta es la aparición de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden con coeficientes funcionales no constantes. A saber la ecuación:

$$G''(x) \left[ f'(x) - \int f(x) dx \right] - 2G'(x)f(x) - G(x)f'(x) = 0$$

Que suponiendo que  $f'(x) - \int f(x) dx \neq 0$ , para todo  $x \in \text{Dom} \left[ f'(x) - \int f(x) dx \right]$ , se traduce en la ecuación:

$$G''(x) - \frac{2f(x)}{f'(x) - \int f(x) dx} G'(x) - \frac{f'(x)}{f'(x) - \int f(x) dx} G(x) = 0.$$

## 5 Agradecimientos

Se agradece a todos los árbitros que tengan en bien la evaluación del presente trabajo.

## Referencias

- [1] Boyce, William E. y DiPrima, Richard C. *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Editorial LIMUSA, Mexico, D.F. 1991.
- [2] Leithold, Louis. *El Cálculo con Geometría Analítica*. Editorial HARLA, Mexico, D.F. 1992.
- [3] Rosas, T. *Una propiedad multiplicativa de la derivada en funciones de clase  $C^1$* . Aleph Sub-cero, Serie de divulgaciones. **1**(2015), 81–102.
- [4] Rosas, T.  *$C$ -ortocentros y sistemas  $C$ -ortocéntricos en planos de Minkowski*. Aleph Sub-cero, Serie de divulgaciones. **2**(2014), 104–132.
- [5] Rosas, T. *Sistemas  $C$ -ortocéntricos y circunferencia de Feuerbach para cuadriláteros en planos de Minkowski*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, **22**(2) (2015), 125–141.
- [6] Trucco, Sixto E. y Casparri de Rodríguez, María T. *Ecuaciones Diferenciales*. Ediciones Macchi, Cordoba - Buenos Aires, 2015.

# Geoplano circular trigonométrico: Un recurso didáctico para la enseñanza de la Geometría

*Trigonometric circular geoplany: A didactic resource for the teaching of Geometry*

Derling José Mendoza Velazco (dmendoza@unibe.edu.ec)

Universidad Iberoamericana del Ecuador UNIB.E  
Instituto de Investigaciones Científicas y Tecnológicas INCYT

## Resumen

La dificultad en el proceso de enseñanza de la Trigonometría, sirvió de estímulo para la presente investigación, cuyo objetivo consistió en diseñar y proponer el uso de un *Geoplano Circular Trigonométrico* para la construcción de aprendizajes significativos en el área de Matemática en la Universidad Iberoamericana del Ecuador UNIB.E. Para su desarrollo, se realizó una investigación de campo, tipo descriptiva, bajo la modalidad de proyecto especial. Como informantes claves, se contó con la participación de veinte (20) estudiantes y tres (3) docentes que laboran en el primer semestre de la institución antes mencionada. Para recopilar la información, se utilizó la técnica de observación y la entrevista, y como instrumentos la guía de observación y guía para la entrevista, sometidos a un proceso de validez. La fiabilidad, se efectuó a través de la estandarización de los registros mediante la categorización, luego se analizaron los hallazgos en base a un análisis descriptivo cualitativo para elaborar las conclusiones en búsqueda de los objetivos propuestos sobre el diseño y uso de una herramienta didáctica que contribuya de manera positiva a la enseñanza y aprendizaje de la Geometría, de igual manera, se observó la motivación y receptividad al utilizar el Geoplano, en razón de permitir desarrollar metodologías innovadoras que brindan un cambio de la práctica andragógica, como lo es, enseñar habilidades de aprendizaje que duren para toda la vida.

**Palabras y frases clave:** Educación matemática, Trigonometría, aprendizaje significativo.

## Abstract

The difficulty in the teaching process of Trigonometry, served as a stimulus for the present investigation, whose objective was to design and propose the use of a *Trigonometric Circular Geoplan* for the construction of significant learning in the area of Mathematics at the Universidad Iberoamericana del Ecuador UNIB.E. For its development, a field investigation was carried out, descriptive type, under the special project modality. As key informants, there was the participation of twenty (20) students and three (3) teachers who work in the first semester of the institution mentioned above. To collect the information, the observation

technique and the interview were used, and as an instruments the observation guide and guide for the interview, submitted to a validity process. The reliability was done through the standardization of the records through categorization, then the findings were analyzed based on a qualitative descriptive analysis to elaborate the conclusions in search of the proposed objectives on the design and use of a didactic tool that contributes positively to the teaching and learning of Geometry, in the same way, the motivation and receptivity was observed when using the Geoplane, in order to allow to develop innovative methodologies that provide a change of the andragogic practice, as it is, teach learning skills that last for a lifetime.

**Key words and phrases:** Mathematics education, Trigonometry, meaningful learning.

## 1 Introducción

El proceso de aprendizaje y enseñanza de la Matemática en las instituciones universitarias, especialmente en la educación superior, se ha convertido, durante los últimos años, en una tarea ampliamente compleja y fundamental. A tal efecto, los docentes de Matemática y de otras áreas del conocimiento científico se encuentran con frecuencia frente a exigencias didácticas cambiantes e innovadoras, lo cual requiere una mayor atención por parte de las personas que están dedicadas a la investigación en el campo de la educación matemática y, sobre todo, al desarrollo de unidades de aprendizaje para el tratamiento de la variedad de temas dentro y fuera de esta ciencia.

En este contexto, quienes están vinculados con la didáctica de la Matemática consideran que las y los estudiantes deben adquirir diversas formas de conocimientos matemáticos en y para diferentes situaciones, tanto para su aplicación posterior como para fortalecer estrategias didácticas en el proceso de aprendizaje y enseñanza. Ello exige, obviamente, profundizar sobre los correspondientes métodos de aprendizaje y, muy particularmente, sobre técnicas y recursos adecuados para ser aplicados en el contexto educativo.

## 2 Sustento teórico

### 2.1 Educación matemática

Las ciencias numéricas siempre han existido en la humanidad desde que el hombre hace uso de su razón, lo cual evidencia que la sociedad considera de gran importancia la formación científica del ser, desde su contexto infantil hasta el desarrollo de su madurez intelectual. La Matemática, es esencial en la vida de todos los seres humanos, en razón de ello, es contemplada dentro de la educación, como una de las áreas que requiere atención. En este sentido, Mora en [11] indica:

*El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas contribuye considerablemente con el cultivo permanente de las matemáticas, su avance conceptual y la conformación de grupos y sujetos investigadores motivados y convencidos por la importancia, utilidad, potencialidad, poder, etc. que caracterizan a las matemáticas cuando son enfocadas desde una cultura de aprendizaje y enseñanza polivalente e interdisciplinar, sumamente contraria a las tendencias predominantes actualmente.*

El producto del conocimiento científico en la Matemática es fundamental, no solo para el estudiante sino también para todas las personas. Es, además, un derecho básico del ser humano tener acceso al conocimiento científico, comprenderlo y hacer uso de él. La Matemática como ciencia ha de estructurar una realidad, que abarca diferentes áreas, como la Geometría, la Historia, el Arte, entre otras. La diversidad cultural del enriquecimiento cognitivo permitido por esta ciencia permite comprender desde diferentes perspectivas la investigación.

## 2.2 Motivación en el aprendizaje

Según Chiavenato (ver [5]), *“La motivación es el interés que tiene el alumno por su propio aprendizaje o por las actividades que le conducen a él”*. Hoy en día es un factor clave para el aprendizaje, por eso resulta importante entender por qué tan frecuentemente en los adolescentes desciende la motivación y con ella el desempeño matemático, especialmente al pasar de la secundaria a la educación superior.

El interés se puede adquirir, mantener o aumentar en función de elementos intrínsecos y extrínsecos. Se debe distinguir de lo que tradicionalmente se ha venido llamando en las instituciones como motivación, es decir, distinguir de lo que el profesor hace para que los alumnos se motiven. El término motivación hace alusión al aspecto en virtud del cual el sujeto vivo es una realidad autodinámica que le diferencia de los seres inertes. El organismo vivo se distingue de los que no lo son porque puede moverse a sí mismo. La motivación, trata por lo tanto, de esos determinantes que hacen que el sujeto se comporte de una determinada manera teniendo en sí mismo el principio de su propio movimiento.

Según Vigotsky en [16], el desarrollo de los procesos psicológicos superiores, en el ser humano, es una actividad compleja que incluye el uso del lenguaje, el pensamiento, la memoria, la atención, la percepción y la abstracción. El aprendizaje es un proceso psicológico de orden superior, que ocurre por internalización de actividades externas sobre la base de estructuras internas. Es auxiliado por instrumentos de orden material, denominados recursos, y de orden psicológico llamados signos.

En el proceso de aprendizaje se reconstruyen estructuras cognitivas y consiste en transformar actividades que ocurren externamente en actividades que ocurren internamente, es decir, pasan del plano interpersonal al plano intrapersonal. El signo externo se convierte en interno con significado y es utilizado, entre otras cosas, para recordar, pensar, analizar y hablar.

Un procedimiento implica el hacer como actividad práctica y externa, y el pensar hacer, como actividad cognitiva e interna. En Matemática, el aprendizaje de procedimientos se basa en la idea de construcción progresiva y el avance se detecta por la ejecución de los pasos que la componen, la corrección de dicha ejecución, la capacidad de saber cuándo y cómo utilizarlo. Un procedimiento se aprende practicando, aplicándolo, reflexionando y analizando. El aprendizaje se basa en el traspaso progresivo del control y de la responsabilidad en la ejecución.

La motivación al logro consiste en una red de conexiones cognitivo-afectivas relacionadas con el desarrollo personal e impulsa a las personas a exigirse más, a rendir más, a usar eficientemente las capacidades, las destrezas y los conocimientos adquiridos. Entonces, cuando se han establecido metas, tareas, creencias y actividades facilitadoras de logro, la acción o desempeño del estudiante aprendiz es un acto consciente con intencionalidad. Por ello, se supone que el efecto de la motivación al logro se refleja en la elaboración de aquellas tareas que representan conflictos cognitivos generadores de nuevo conocimiento.

### 2.3 Motivación en el proceso didáctico educacional de la Matemática

Para Meyer en [10], cuando un docente de Matemática prepara una actividad:

*...las preocupaciones principales radican en cómo mantener a los estudiantes interesados en el tema que se va a desarrollar. Más aún, nos preguntamos cómo debemos estructurar nuestro discurso didáctico para atraer y mantener la atención de los estudiantes. Después de todo, el profesor de Matemática tiene, por lo general, el estigma de ser el profesor de una materia difícil y aburrida.*

La creación de materiales didácticos como carteles filminas, rotafolios etc., fue en el pasado una actividad de los profesores para lograr este cometido. Aún hoy siguen siendo un recurso valioso. Por otro lado, la facilidad con que se puede acceder a la información vía internet, la introducción de las plataformas multimediales en la educación y el desarrollo del software educativo interactivo plantea un nuevo paradigma dentro del cual, el profesor de Matemática puede desarrollar estrategias educativas que motiven el aprendizaje de la Matemática.

En este sentido, para Arrieché en [1] *“ya se observan los juegos solo como un entretenimiento o una diversión, como algo útil para motivar, pero poca cosa”*. Actualmente, como resultado de la investigación en distintos aspectos de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, el docente es mucho más consciente del potencial educacional de los juegos o instrumentos didácticos.

Por otra parte, es labor del docente en buscar estrategias que motiven al estudiante a estudiar Matemática. Son muchos los esfuerzos que se han planteado a través del tiempo, pero el que mejor plantea la posibilidad de motivar a los estudiantes es la creación de herramientas didácticas que permiten facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las universidades, colegios o instituciones. Este tipo de estrategia, no solo permite presentar al estudiante temas de Matemática que son interesantes, sino que al estar fuera del currículo formal del curso, libera al estudiante de la preocupación de tener que aprenderlo, además se presenta como un entretenimiento y por tanto una actividad de carácter lúdico.

Desgraciadamente, la práctica de instrumentos didácticos a nivel universitario ha caído en desuso, debido en parte a la cultura matemática de los profesores, quienes mantienen una metodología academicista en su praxis educativa, en consecuencia, de la programación de actividades que resultan poco interesantes para los alumnos y en parte por el exceso de trabajo a que están sometidos los docentes en las funciones institucionales como la investigación. Sin embargo, es necesario realizar esfuerzos por rescatar este componente de la enseñanza de la Matemática que, sin lugar a duda, es una estrategia importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

### 2.4 La Trigonometría

La Trigonometría es definida por Becerra en [4] como: *“el área que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. Su etimología proviene de trigono triángulo y metría medida”* (p.1). De igual forma, en el diccionario etimológico de la lengua castellana, Corominas en [6] establece que: *“Trigonometría, 1727. Cpt. Del gr. métron ‘medida’ con trigonos ‘triángulo’ (a su vez cpt. de treis ‘tres’ y gonia ‘ángulo’)”*. Por lo tanto, la Trigonometría es una parte de la Matemática que, genéricamente, estudia la relación entre los ángulos, sus medidas y los lados de un triángulo, es decir medida de figuras geométricas con tres ángulos.

En la educación matemática y en especial en el área de Trigonometría se utiliza en gran cantidad de ocasiones, las clases magistrales a través de los métodos expositivos, considerándose

que existe una gran eficacia en la transmisión de conocimientos, al contrario del poder comprender lo esencial en los temas brindados en las clases. Estos aspectos, crean en la población estudiantil amplios vacíos de lo que significa un tema o área de las ciencias numéricas.

La Geometría, como una de las disciplinas matemáticas más demostrativas, concretas e intuitivas, se encuentra interrelacionada al universo del ser humano, ya que se pueden demostrar de distintas formas, los teoremas o axiomas, mediante instrumentos o materiales factibles. En cuanto a los instrumentos, estos se pueden diseñar de manera óptima y adecuada para experimentar conceptos geométricos, facilitando la posibilidad de recrear figuras e imágenes con patrones geométricos de índole fenomenológico.

## 2.5 El Geoplano

Espinoza en [7], expresa que el primer geoplano se presentó en “*la primera publicación conjunta de la comisión internacional para la mejora de la enseñanza de la Matemática en 1961. El Geoplano original diseñado por Gattegno (1911-1988) consistía en una plancha de madera con pivotes o clavos formando una trama ortométrica*” (p.17). Como instrumento didáctico se presentó para realizar el cálculo de áreas y perímetros, uniendo los clavos con ligamentos o cuerdas, demostrándose la construcción de figuras geométricas.

Para Potoy et al, en [13], “*El geoplano es un recurso didáctico para la introducción de gran parte de los conceptos geométricos; el carácter manipulativo*” (p.25). Como recurso didáctico para inducir los temas de Geometría, el aspecto manipulativo facilita al docente generar la apertura de la imaginación y la factibilidad en las clases, donde los contenidos abstractos de la Matemática pueden disolverse a través de su uso y de la creatividad de los estudiantes.

Actualmente existen diferentes tipos de geoplano, entre ellos el ortométrico, el cual consta de una tabla cuadrangular, donde se colocan los clavos, formalizando cuadros. El geoplano isométrico, utilizado para el cálculo de triángulos trigonométricos, y el geoplano circular donde se ubican los clavos de manera circular, destacándose una distancia equitativa desde el centro hasta sus extremos. Las dimensiones de los geoplanos dependen de la necesidad de su diseñador.

## 2.6 Teoría del aprendizaje significativo

El *aprendizaje significativo* se entiende como la dimensión del conocimiento que tiene el alumno. Ausubel en [2] se inscribe en la corriente psicológica cognoscitiva, la cual tiene su fundamento en la existencia de una estructura cognoscitiva, donde el individuo organiza el conocimiento.

Esa estructura debe ser tomada en cuenta al momento de diagnosticar, planificar, ejecutar y evaluar la acción educativa, puesto que los conocimientos previos son el soporte para que el estudiante pueda adquirir y procesar nuevos conocimientos a través de la capacidad de relacionarlos con los conceptos que ya posee en su estructura cognoscitiva.

El mismo Ausubel, (ver [2]), considera a esta teoría como una teoría psicológica del aprendizaje en el aula, pues se ocupa de los procesos mismos que el individuo pone en juego para aprender. Pero desde esa perspectiva no trata temas relativos a la psicología misma ni desde un punto de vista general, ni desde la óptica del desarrollo, sino que pone énfasis en lo que ocurre en el aula cuando los estudiantes aprenden; en la naturaleza de ese aprendizaje; en las condiciones requeridas para que éste se produzca; en sus resultados y, consecuentemente, en su evaluación Ausubel (ver [3]). Es una teoría de aprendizaje porque esa es su finalidad.

La *teoría del aprendizaje significativo* aborda todos y cada uno de los elementos, factores, condiciones y tipos que garantizan la adquisición, la asimilación y la retención del contenido que la escuela ofrece al alumnado, de modo que adquiera significado para el mismo.

El origen de la teoría del aprendizaje significativo está en el interés que tiene Ausubel (ver [3]) por conocer y explicar las condiciones y propiedades del aprendizaje, que se pueden relacionar con formas efectivas y eficaces de provocar de manera deliberada cambios cognitivos estables, susceptibles de dotar significado individual y social. Como finalidad es conseguir que los aprendizajes producidos en la escuela sean significativos, Ausubel entiende que una teoría del aprendizaje escolar realista y científicamente viable debe ocuparse del carácter complejo y significativo que tiene el aprendizaje verbal y simbólico. Así mismo, y con objeto de lograr esa significatividad, debe prestar atención a todos y cada uno de los elementos y factores que le afectan, y puedan ser manipulados para tal fin.

Lo que define a la teoría ausubeliana es el “*aprendizaje significativo*”, una etiqueta que está muy presente en el diálogo de docentes, diseñadores del currículum e investigadores en educación y que, sin embargo, son muchos también los que desconocen su origen y su justificación. El aprendizaje significativo es el proceso según el cual se relaciona un nuevo conocimiento o información con la estructura cognitiva del que aprende de forma no arbitraria y sustantiva o no literal. Esa interacción con la estructura cognitiva no se produce considerándola como un todo, sino con aspectos relevantes presentes en la misma, que reciben el nombre de subsumidores o ideas de anclaje (ver [2]). La presencia de ideas, conceptos o proposiciones inclusivas, claras y disponibles en la mente del aprendiz es lo que dota de significado a ese nuevo contenido en interacción con el mismo.

### 3 Metodología

#### 3.1 Investigación de campo

Para efectos de la investigación se aplicó la investigación de campo, según la Universidad Pedagógica Experimental Libertador UPEL (ver [15]) consiste en:

*...el análisis sistemático de problemas en la realidad, con el propósito bien sea de describirlos, interpretarlos, entender su naturaleza y factores constituyentes, explicar sus causas y efectos, o predecir su ocurrencia, haciendo uso de métodos característicos de cualquiera de los paradigmas o enfoques de investigación conocidos o en desarrollo.*

Es decir, su incuestionable valor reside que a través de ellos el investigador puede certificar de las verdaderas condiciones que se han obtenido los datos, haciendo posible su revisión ó modificación en el caso de que surjan dudas en relación a su calidad.

#### 3.2 Investigación interpretativa

La investigación se formuló mediante el enfoque cualitativo, caracterizado por el paradigma interpretativo que para, Ricoy en [14], es un estudio donde se busca:

*...profundizar en la investigación, planteando diseños abiertos y emergentes desde la globalidad y contextualización. Las técnicas de recogida de datos más usuales son la observación participativa, historias de vida, entrevistas, los diarios, cuadernos de*

*campo, los perfiles, el estudio de caso, etc. Tanto las conclusiones como la discusión que generan las investigaciones que comparten la doctrina del paradigma interpretativo están ligadas fundamentalmente a un escenario educativo concreto contribuyendo también a comprender, conocer y actuar frente a otras situaciones.*

### 3.3 Investigación de tipo proyecto especial

Por otra parte, se adoptó la modalidad de proyecto especial, el cual según UPEL en [15] son estudios que llevan a:

*...creaciones tangibles, susceptibles de ser utilizadas como soluciones a problemas demostrados, o que respondan a necesidades e intereses de tipo cultural. Se incluyen en esta categoría los trabajos de elaboración de libros de texto y materiales de apoyo educativo, el desarrollo de software, prototipos y productos tecnológicos en general, así como también las creaciones literarias y artísticas.*

Es decir, se caracteriza como proyecto especial, por estar orientado a resolver un problema planteado, mediante la solución de dificultades y satisfacción de necesidades en una institución, cuyo propósito es diseñar material didáctico de apoyo educativo en la enseñanza de la Matemática.

## 4 Técnicas e instrumentos de investigación

Por el carácter cualitativo de la investigación los tres docentes participantes de la UNIB.E, emplearon la técnica de observación tipo participante, donde Becerra en [4] indica que el investigador forma parte o se integra con la comunidad o grupo donde se desarrolla el estudio. La observación ejecutada en el estudio tuvo como propósito principal identificar en los estudiantes sus actitudes y gestos expresados en la aplicación del geoplano, donde se registraron datos especiales, por medio de una guía de observación aplicada como instrumento para la recolección de información.

Para la obtención de datos importantes y resaltantes en el estudio, se ejecutó a los estudiantes una entrevista de tipo semiestructurada, las cuales, según Peláez, Rodríguez, Ramírez, Pérez, Vázquez y González en [12], expresan que:

*Se determina de antemano cual es la información relevante que se quiere conseguir. Se hacen preguntas abiertas dando oportunidad a recibir mas matices de la respuesta, permite ir entrelazando temas, pero requiere de una gran atención por parte del investigador para poder encauzar y estirar los temas. (Actitud de escucha)*

Los datos suministrados por las entrevistas aplicadas a los estudiantes y las observaciones por parte de los docentes fueron contrastados, proceso sugerido por Martínez en [9], donde los resultados son relacionados al comparar y contraponer conclusiones con las de otros investigadores, permitiendo no sólo entender mejor las posibles diferencias, sino que hará posible una integración mayor y, por consiguiente, un enriquecimiento del cuerpo de conocimientos del área estudiada. La validez de los instrumentos fueron hechas por tres expertos especialistas en las áreas de: Educación Superior y Educación Matemática.

## 5 Análisis de los resultados

En calidad del mejoramiento del proceso enseñanza aprendizaje de los estudiantes de la UNIB.E, respecto a los contenidos de la Geometría, se procedió a la construcción y uso de un geoplano de tipo circular para la explicación de los temas de Trigonometría, dedicado a los estudiantes del primer semestre. El diseño del geoplano circular trigonométrico aplicado en la investigación, consta del modelo básico de una tabla rectangular de 20 cm los cuatro lados. Circunscritos en la subdivisión de un plano cartesiano (4 cuadrantes) como se puede visualizar en la Figura 1. Adjunto una circunferencia de radio 1 de color azul, más una circunferencia de radio  $\sqrt{3}$ , ambas con centro único desde el punto de origen.

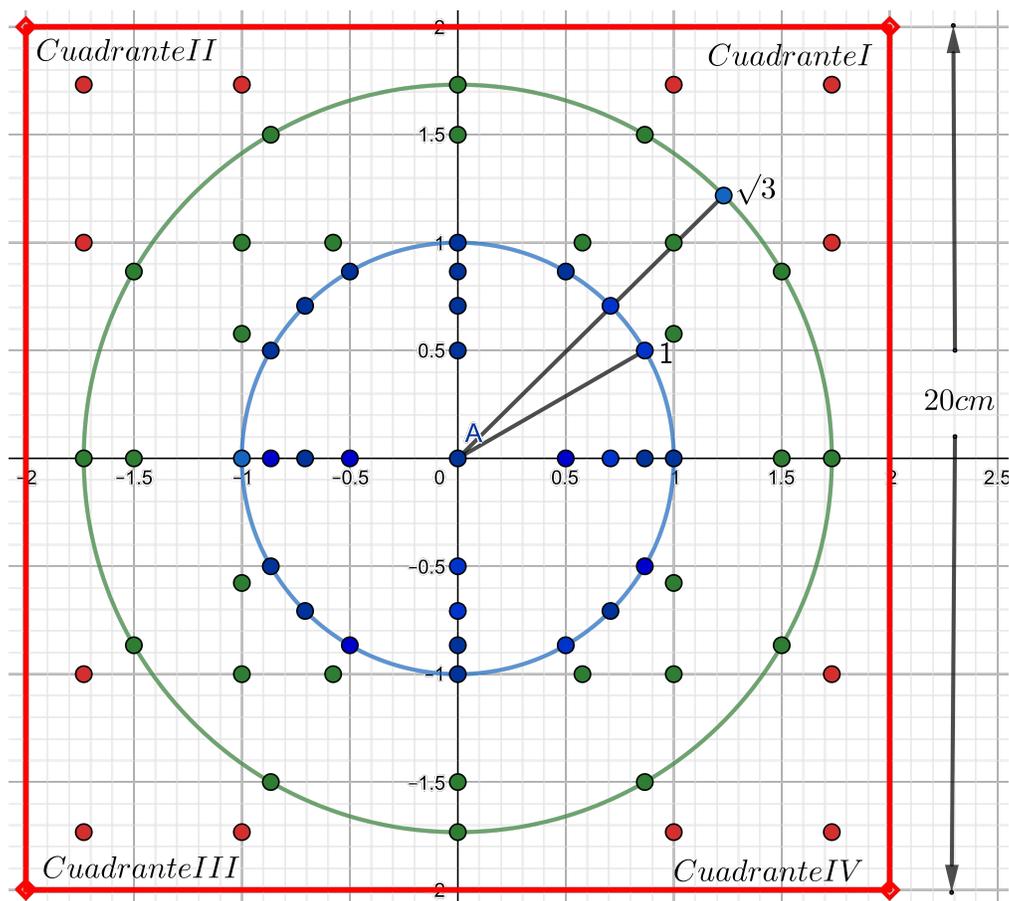


Figura 1: Geoplano circular trigonométrico

Respecto a la cantidad y ubicación específica de clavos adscritos a la tabla, se requirió de un total de 69. De los cuales 29 clavos, están ubicados en la circunferencia concéntrica azul con radio 1. Luego 28 clavos en la corona verde con radio de circunferencia  $\sqrt{3}$ , y por último 12 clavos de color rojo es la parte externa. Todos los clavos se ubicaron en los siguientes puntos como se describe en la Figura 2:

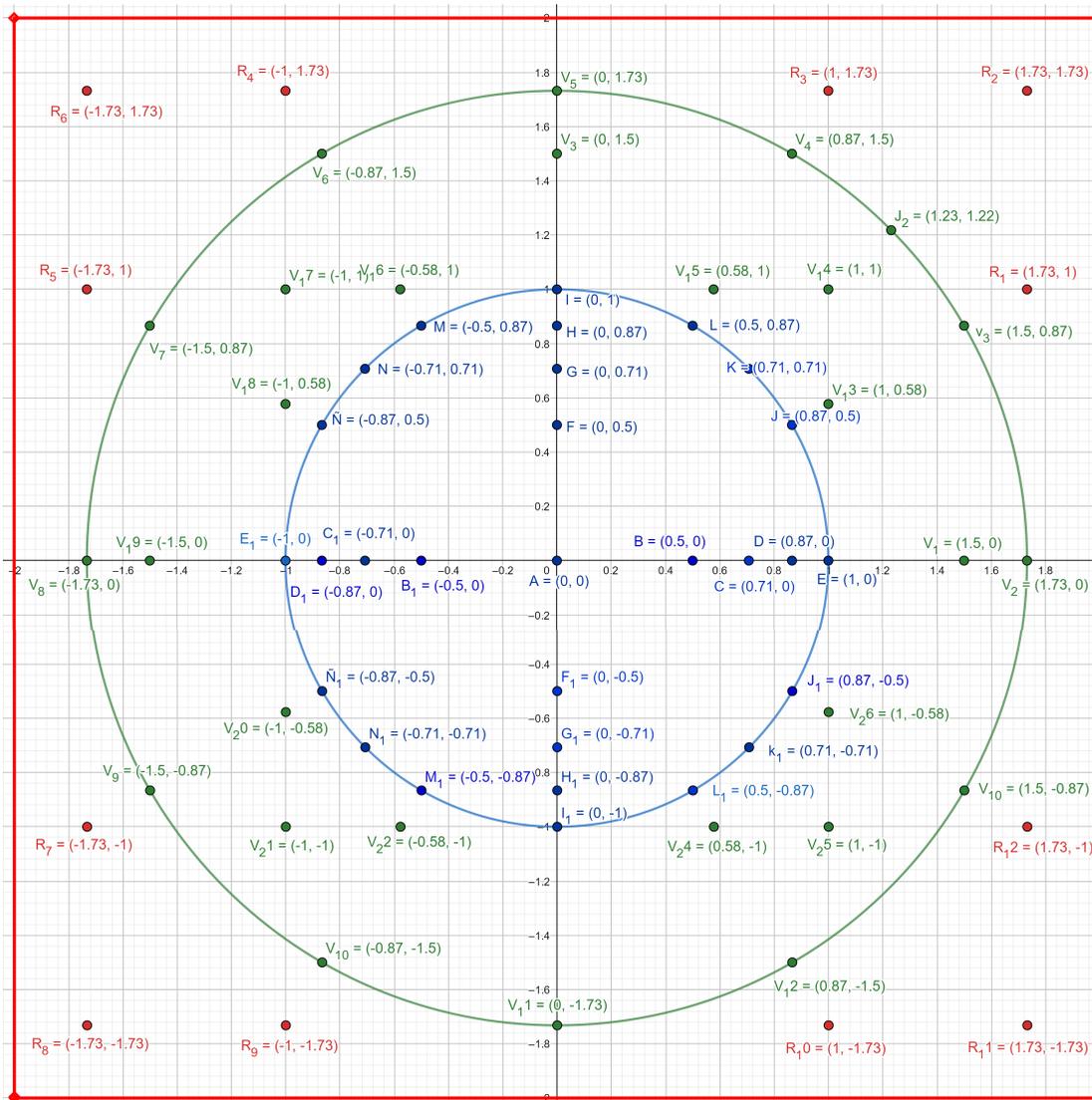


Figura 2: Ubicación de los clavos en el geoplano mediante coordenadas cartesianas

En la parte posterior del geoplano se ubicó un formulario básico de trigonometría, el mismo se encuentra dividido en cuatro componentes, los cuales se muestran desde la Figura 3 hasta la Figura 6. En el presente marco se ostenta el análisis e interpretación de la información obtenida en el referente metodológico destacado, mediante los informantes y sucesos observados en las circunstancias donde se desenvuelve las actividades matemáticas, cuyo propósito permitió examinar las características motivacionales de los estudiantes en la enseñanza de la Geometría bajo la incursión del geoplano circular trigonométrico. Para construir los elementos teóricos, que sustenten los análisis teóricos de los resultados, se requirió de un estudio riguroso de los datos, inmerso en un análisis secuencial para desarrollar la temática prevista en la investigación.

# Formulario de Trigonometría

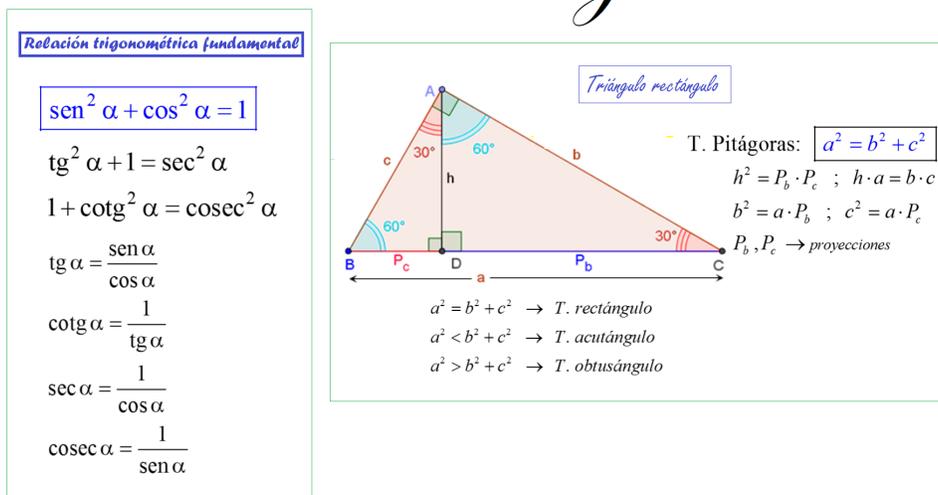


Figura 3: Formulario de Trigonometría, primer componente

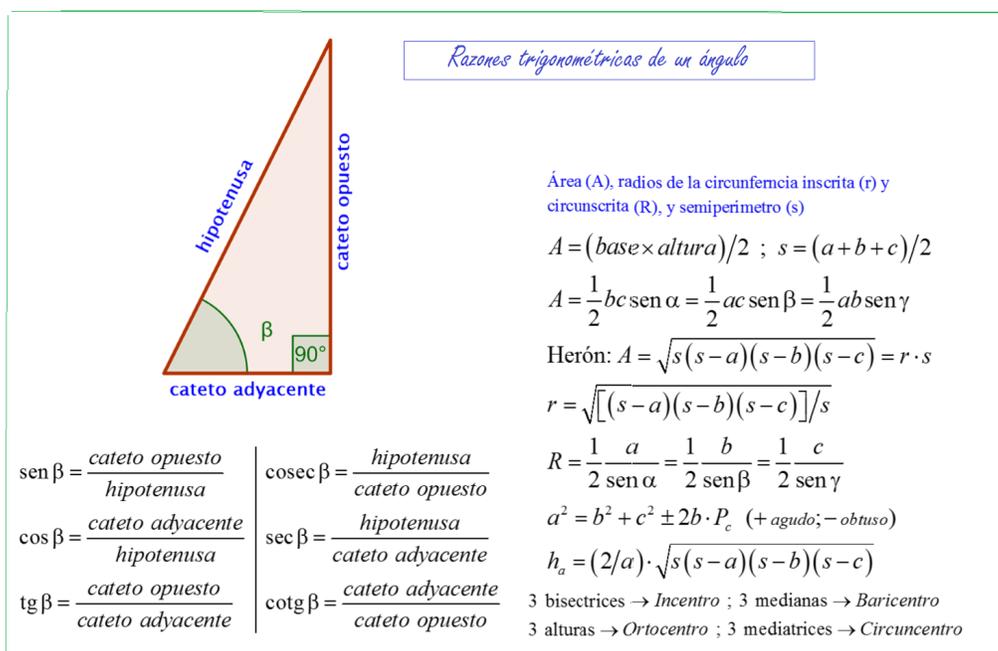


Figura 4: Formulario de Trigonometría, segundo componente

Conversión

Conversión:  $\frac{a}{180} = \frac{b}{\pi}$

grados  $\xleftrightarrow[\times \frac{\pi}{180}]{\times \frac{180}{\pi}}$  radianes

$1^\circ \approx 0,0175 \text{ rad}$  ;  $1 \text{ rad} \approx 57,296^\circ$

$19,57^\circ \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{parte entera} \rightarrow 19^\circ \\ 0,57 \times 60 = 34,2 \rightarrow 34' \\ 0,20 \times 60 = 12 \rightarrow 12'' \end{array} \right] \Rightarrow 19^\circ 34' 12''$

$\left[ 19 + 0,5\bar{6} + 0,00\bar{3} = 19 + \frac{34}{60} + \frac{12}{3600} \right]$

Sistema sexagesimal: circunferencia =  $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$   
 $1^\circ = 60'$  ;  $1' = 60''$  ;  $L_{\text{arco}} = \text{radio} \cdot \text{ángulo (en rad)}$

Relación Trigonométrica de Ángulos

Ángulo doble

$\text{sen } 2\alpha = 2 \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \alpha$   
 $\text{cos } 2\alpha = \text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$   
 $\text{tg } 2\alpha = \frac{2 \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}$

Medio Ángulo

$\text{sen } \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos } \alpha}{2}}$   
 $\text{cos } \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \text{cos } \alpha}{2}}$   
 $\text{tg } \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos } \alpha}{1 + \text{cos } \alpha}}$

Suma de ángulos

$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \text{sen } \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \text{cos } \frac{\alpha - \beta}{2}$   
 $\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta = 2 \text{cos } \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \text{sen } \frac{\alpha - \beta}{2}$   
 $\text{cos } \alpha + \text{cos } \beta = 2 \text{cos } \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \text{cos } \frac{\alpha - \beta}{2}$   
 $\text{cos } \alpha - \text{cos } \beta = -2 \text{sen } \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \text{sen } \frac{\alpha - \beta}{2}$

Productos de ángulos

$\text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \beta = \frac{1}{2} \text{sen } (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \text{sen } (\alpha - \beta)$   
 $\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta = \frac{1}{2} \text{cos } (\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \text{cos } (\alpha + \beta)$   
 $\text{cos } \alpha \cdot \text{cos } \beta = \frac{1}{2} \text{cos } (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \text{cos } (\alpha - \beta)$

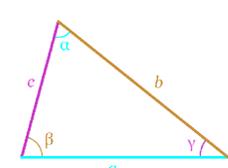
Sumas y diferencias

$\text{sen } (\alpha \pm \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \beta \pm \text{cos } \alpha \cdot \text{sen } \beta$   
 $\text{cos } (\alpha \pm \beta) = \text{cos } \alpha \cdot \text{cos } \beta \mp \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$   
 $\text{tg } (\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg } \alpha \pm \text{tg } \beta}{1 \mp \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}$

Teorema del seno

Las longitudes de los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} = 2R$



$\frac{a}{\text{sen } \alpha} \quad \frac{b}{\text{sen } \beta} \quad \frac{c}{\text{sen } \gamma}$

Teorema del Coseno

En todo triángulo se verifica que

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{cos } \alpha$   
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \text{cos } \beta$   
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{cos } \gamma$

**Nota:** Para ángulos obtusos el coseno es negativo

Función arco seno:  $y = \text{arc sen } x \Leftrightarrow x = \text{sen } y$

ej. con la calculadora:  $\boxed{\sin^{-1}} \rightarrow \text{arc sen}(0,5) = 30^\circ$

Tabla de Valores

grados	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*	0	*	0
cotg	*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	*	0	*
sec	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	*	-1	*	1
cosec	*	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	*	-1	*

Un radián (1 rad) es el ángulo central de una circunferencia que abarca un arco con igual longitud que el radio.

**Notación:**  
 $(\text{sen } \alpha)^2 = \text{sen}^2 \alpha$  pero no es  $\text{sen } \alpha^2$   
 $\text{tg } \alpha = \text{tan } \alpha$  ;  $\text{cotg } \alpha = \text{cot } \alpha$  ;  $\text{cosec } \alpha = \text{csc } \alpha$

Figura 5: Formulario de Trigonometría, tercer componente

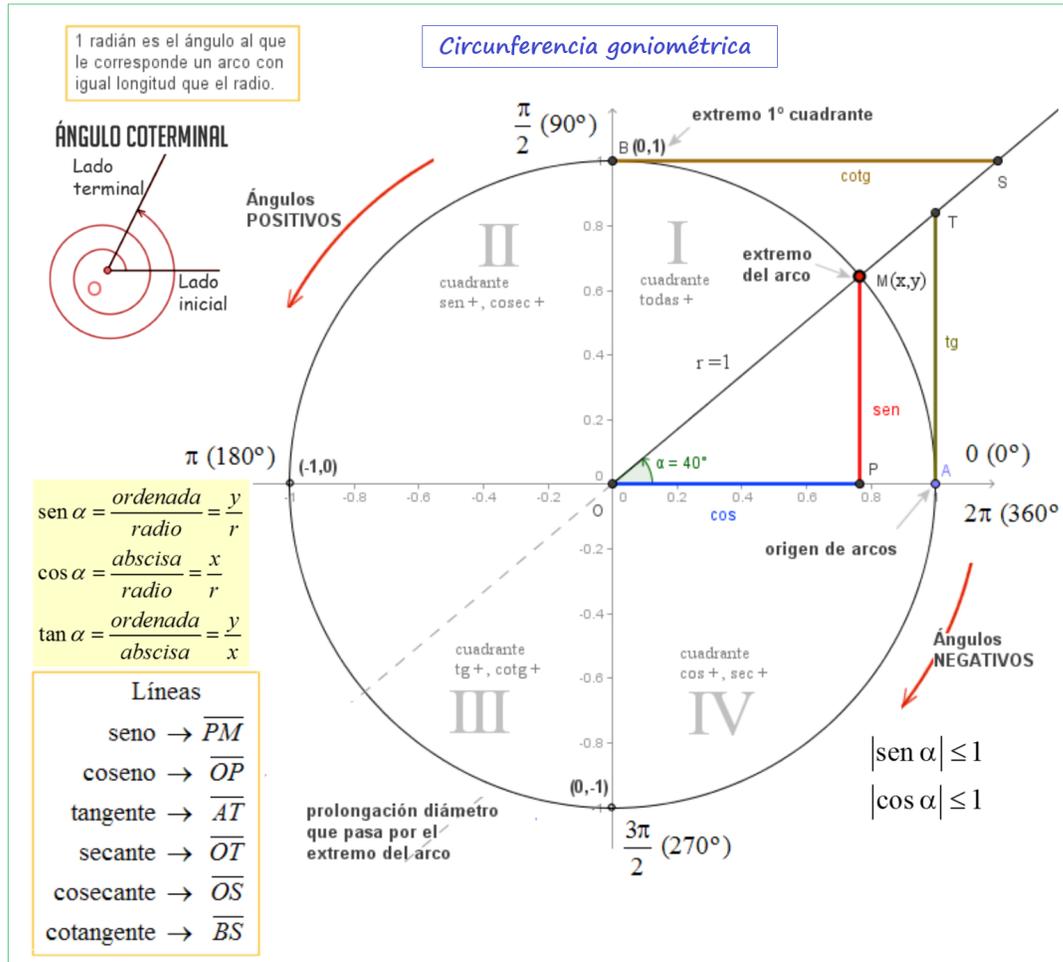


Figura 6: Formulario de Trigonometría, cuarto componente

Al aplicarse ligamentos de diferentes colores en diferentes puntos (o clavos del geoplano) se puede distinguir la formación de triángulos, como el triángulo de ligamento violeta con vértices  $(L_1, A, D_1)$  con ángulo de inclinación de  $30^\circ$  con el eje horizontal, el triángulo de ligamento rosa, con vértices  $(K_1, A, D)$  y ángulo de inclinación  $45^\circ$  con el eje  $X$ , el triángulo de ligamento amarillo, con vértices  $(J_1, A, D_2)$ , con ángulo de inclinación de  $60^\circ$  respecto al eje horizontal del geoplano. (ver Figura 7).

De forma analítica, se pueden comprobar distintos teoremas en el área de la Geometría, como el Teorema de Thales, en cuanto la semejanza de los triángulos que se encuentran uno al lado del otro, estableciendo la relación de semejanza entre varios triángulos. Por ejemplo:

$$\frac{F_2R}{DA_2} = \frac{AD'_1}{AL_1} = \frac{D'_1F_2}{DL_1} = \frac{RD_1}{VA_2}$$

También se puede apreciar las propiedades trigonométricas, en cuanto al  $\sin(30^\circ)$  en el triángulo  $\triangle ADF_2$  donde la longitud del cateto opuesto es de 0,57 igual en los lados  $F_2R$  con una longitud de 0,57 al cumplirse por razón de semejanza trigonométrica. La aplicación del geoplano como instrumento didáctico en la enseñanza de la Matemática, contribuyó a dos aspectos importantes de la educación: primero, facilitar la comprensión lógica y significativa de la Trigonometría; y segundo, facilitar la resolución de problemas para que así los estudiantes logren alcanzar de forma sucesiva el dominio de las propiedades y razones trigonométricas expuestas en el desarrollo de cada problema. De igual forma, en el transcurso de la investigación, esta herramienta permitió ejercitar la creatividad y destreza del estudiantado al instante de afrontar un problema, los cuales siempre fueron concebidos como temas únicos e inalcanzables que se encontraban solamente a la altura de los docentes, mas no de los estudiantes, fortaleciendo de esta manera la confianza en sí mismo.

Se puede hacer mención, en cuanto a la importancia del uso y aplicabilidad de la Matemática en todo instante para el ser humano, en especial para el estudiante universitario quien presenta un déficit en la resolución de problemas, en el cual, por medio de la explicación didáctica de la Geometría los estudiantes expresaron sentirse un poco más atraídos por la materia, al visualizar que pueden obtener conocimiento matemático de forma significativa con un instrumento factible; aplicándose el geoplano con el fin de motivar a los estudiantes y sientan la relación entre el tema brindado y su utilidad en la carrera de estudio, que no solo han de resolver, obtener o calcular un simple dígito, número o variable sin sentido o interpretación alguna.

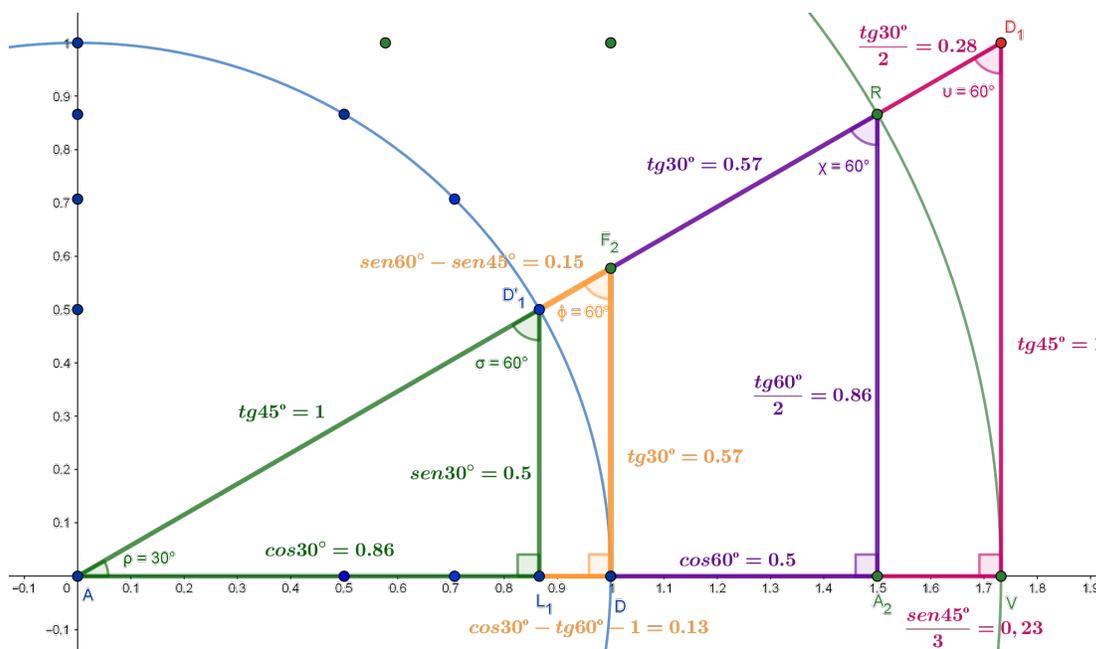


Figura 7: Formación de triángulos en el primer cuadrante del geoplano

El uso del geoplano facilitó la demostración triangular de las funciones trigonométricas, a favor de un menos uso de tiempo desarrollado en el aula de clases y la minimización de recursos materiales cotidianos; como el pizarrón acrílico y la construcción o representación de imágenes a través de diapositivas, como se puede visualizar en la Figura 8.

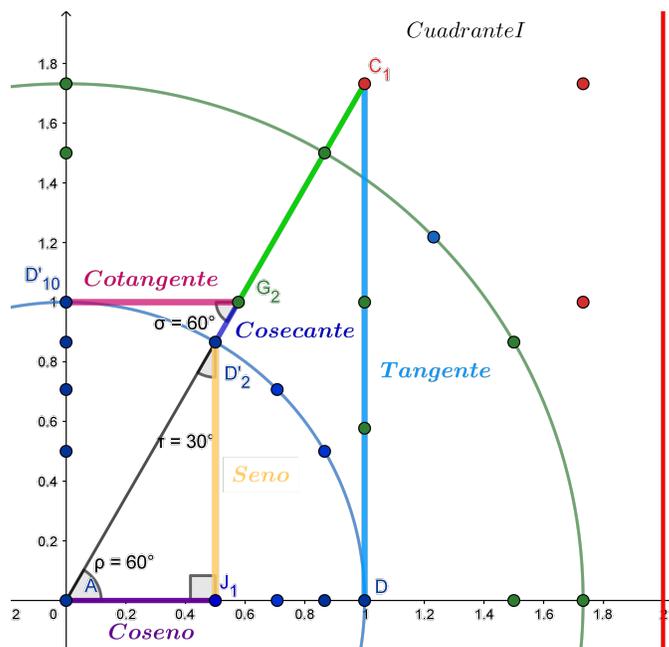


Figura 8: Representación del círculo y funciones trigonométricas

Al iniciar las actividades demostrativas de Trigonometría se visualizó el desinterés por los alumnos en el curso, donde en su mayoría, los estudiantes indicaban que en el bachillerato fueron temas incomprensibles y que acarrearían malos recuerdos. Cabe destacar que la mayoría de los estudiantes no recordaban las razones trigonométricas, la esencia o el significado y aplicación de dichas funciones, por lo que una herramienta didáctica, conlleva a eliminar la visión abstracta de la Matemática a un mundo sencillo y comprensible, sin apatías o temores que docentes han sembrado desde la educación secundaria.

## 6 Conclusiones y recomendaciones

### 6.1 Conclusiones

Diseñar y aplicar un instrumento didáctico para generar un cambio en la enseñanza de la Matemática a nivel universitario, fue el punto de inicio del desarrollo de esta investigación. Entre las principales áreas de la Matemática, la Geometría, representa ser una de las más intuitivas, demostrativas, sintetizadas y unidas a la realidad que se conoce. Por ello, el estudio brinda numerosas posibilidades para percatarse, mediante materiales accesibles y adecuados, los conceptos, propiedades y demostraciones de la Trigonometría. Por consiguiente, para Giroux en [8] el docente posee la responsabilidad de:

*...discutir y analizar los objetivos educativos y las maneras de enseñar, basándose en las condiciones sociales, políticas y económicas particulares de los contextos institucionales; todo ello es necesario para poder estar conscientes de la existencia de unas*

*relaciones sociales y formas de conocimientos impregnadas de valores socios culturales, que legitiman estilos de vida.*

En base al autor, un docente crítico constructivista, considera al estudiante como sujeto céntrico de su aprendizaje, que construye y fortalece el conocimiento, mediante la reflexión derivada de su propio compromiso. Desde otra arista epistémica de la docencia, al alumno es el único interprete del pensamiento matemático, con su creación de instantes didácticos y manipulación.

Se afina en el presente estudio que la aplicación de un geoplano circular como herramienta didáctica, desempeña y cumple con las posibilidades de la comprensión y resolución de problemas geométricos, en especial de la Trigonometría. Además, es de gran apoyo para el docente universitario, ya que facilita optimizar su labor andragógica. El instrumento permite a los estudiantes ser productores innovadores de sus propias concepciones matemáticas, de forma dinámica e imaginativa, como también les hace capaz de construir un nuevo conocimiento significativo del estudio de la Geometría.

De igual forma, se indaga en que los estudiantes y docentes desistan a un lado el sistema educativo academicista o tradicionalista, desarrollado solo con la realización de clases magistrales y solicitud de deberes continuos, para que se integren a la situación real y se pueda fomentar el estudio de la Geometría con un carácter didáctico, creativa y ameno, donde el estudiante logre desarrollar su creatividad y fortalecer sus capacidades mentales. Por lo tanto, se busca mejorar la educación superior, implementando material didáctico concreto para mejorar la calidad de enseñanza y aprendizaje dejando a un lado el conductismo.

En especial los estudiantes ostentaron su interés en que las asignaturas restantes de su carrera, sean impartidas con material factible y didáctico demostrativo para generar motivación, bien sea de tipo lúdico o de aplicabilidad, de igual manera expresaron su agrado por el presente modelo del geoplano, pues conjuntamente además de brindarles la circunstancia de conocer de un tema de Matemática de forma agradable, también se les permitió fortalecer sus conocimientos a través de las actividades en los cuales se les permitió desarrollar y estar al tanto de aplicaciones matemáticas que son de gran importancia en el que hacer humano. Además, reiteraron ser la primera vez que ven una asignatura de manera didáctica, razón por la cual, les fue de mucho agrado, recalcando que esta manera de enseñanza sea aplicada en las otras asignaturas.

## 6.2 Recomendaciones

Tras concluir la presente investigación, se recomienda exigir a los docentes universitarios de Matemática aplicar el uso de material didáctico en su desempeño académico, en especial el geoplano circular trigonométrico. Recordando la importancia del mismo para el estudio, demostración y conceptualización de las razones trigonométricas.

Enseñar al estudiante desde la educación básica a realizar justificaciones significativas y demostraciones de temas para que, desde un principio, se logre dispersar el desinterés, temor o fobia que presentan los estudiantes por la ciencia Matemática.

## 7 Agradecimientos

Quiero dar un especial agradecimiento a mi hijo Derling Isaac Mendoza Flores por darme la idea de modificar los geoplanos comunes y construir geoplanos más fáciles y manejables en temas tan

complejos para los estudiantes de educación básica y universitaria, motivándome así a realizar esta investigación.

## Referencias

- [1] Arrieche, J.; La didácticas de las matemáticas educativas. Universidad Técnica Particular de Loja, UTPL, Simposio Internacional Universidad y Humanismo. Ecuador. 2008.
- [2] Ausubel, D. P.; *Aprendizaje significativo*. Círculo de Lectores, S.A. Barcelona, España. 1980.
- [3] Ausubel, D. P.; *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Editorial. Trillas. México. 1976.
- [4] Becerra, J.; *Funciones trigonométricas*. Universidad Nacional Autónoma de México. Disponible en: <http://dgenp.unam.mx/direccgral/secacad/cmatematicas/pdf/m5unidad02.pdf>. 2018.
- [5] Chiavenato, I.; La motivación es el interés que tiene el alumno por su propio aprendizaje o por las actividades que le conducen a él. Colombia. *Revista Eduteka*. 2006.
- [6] Corominas, J.; *Diccionario etimológico de la lengua castellana*. Editorial Gredos, Madrid. 1987.
- [7] Espinoza, N.; *Elaboración y uso adecuado del Geoplano, Origami y Geogebra como material concreto y tecnológico para mejorar el logro de aprendizajes en el dominio de Geometría en los estudiantes del segundo año sección "A" de la Institución educativa "Antonio Ocampo" – Curahuasi – Abancay, 2013-2015*. Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa Facultad de Ciencias de la Educación. Disponible en: <http://repositorio.unsa.edu.pe/bitstream/handle/UNSA/4857/EDessan.pdf?sequence=1>. 2015.
- [8] Giroux, H.; *Los profesores como intelectuales. Hacia una pedagogía crítica del aprendizaje*. Barcelona: Paidós. 1990.
- [9] Martínez, M. *Ciencia y arte de la metodología cualitativa*. México: Trillas. 2006.
- [10] Meyer, R.; *Metodología de la Investigación*. Bogotá – Colombia. Editorial Episteme. 2007.
- [11] Mora, D.; *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemáticas*. Bolivia: Campo Iris. 2005.
- [12] Peláez, A. Rodríguez, J. Ramírez, S. Pérez, L. Vázquez, A. González, L *Entrevista* Universidad Autónoma de Madrid. España. 2010.
- [13] Potoy, Y.; Poveda, S.; Alarcon, R.; Gomez, P.; Vilches Y. y Aleman, J. *Material didáctico para la enseñanza – aprendizaje de conceptos matemáticos. (el tangram y el geoplano)*. Universidad Nacional de Nicaragua. Departamento de Matemática. 2007.
- [14] Ricoy, M. *La prensa como recurso educativo. Revista Mexicana de Investigación Educativa*. México. 2005.

- [15] UPEL. *Manual de Trabajos de Grado y Maestría y Tesis Doctoral de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador*. Caracas, Venezuela: UPEL. 2012.
- [16] Vygotsky, L. *Psicología y Pedagogía*. Editorial Océano, S.L. Madrid – España. 1978.

# Optimización lineal como estrategia de aprendizaje desarrollador de la investigación operativa en administración de empresas

*Linear optimization as a learning strategy developer of operational research in business administration*

Yoandry Rivero Padrón (yriverop@uisrael.edu.ec)  
Ernesto Fernández Rivero (efernandez@uisrael.edu.ec)

Universidad Tecnológica Israel  
Ecuador

## Resumen

La preocupación por la falta de conocimiento, por parte de los estudiantes de la Universidad Tecnológica Israel (UTI) en base a la optimización lineal, motivó a los docentes de la institución en buscar metodologías apropiadas para fomentar un aprendizaje significativo de los contenidos matemáticos y estadísticos relacionados a la optimización lineal como estrategia de aprendizaje desarrollador de la investigación operativa en administración de empresas. La metodología del estudio fue aplicada mediante un análisis cualitativo documental, como informantes clave de la investigación, participaron cinco (5) docentes y diez (10) estudiantes. Los datos fueron recolectados mediante una entrevista de tipo semi-estructurada y analizados de forma interpretativa por los investigadores. Como resultados se logró definir que los procesos de optimización lineal permiten metodológicamente desarrollar estrategias de aprendizaje significativo y optimizar su aplicación en cursos de estadística y matemática universitaria.

**Palabras y frases clave:** Aprendizaje significativo, educación universitaria, aprendizaje desarrollador, optimización lineal.

## Abstract

The concern about the lack of knowledge, on the part of the students of the Israel Technological University (ITU) based on linear optimization, motivated the teachers of the institution to look for appropriate methodologies to promote a significant learning of mathematical and statistical contents related to linear optimization as a learning strategy to develop operational research in business administration. The methodology of the study was applied by means of a qualitative documentary analysis. Five (5) teachers and ten (10) students participated as key informants of the research. The data were collected through a semi-structured interview and analyzed in an interpretative way by the researchers. As results, it was defined that linear optimization processes allow methodologically to develop significant learning strategies and optimize their application in courses of statistics and university mathematics.

**Key words and phrases:** Meaningful learning, university education, developer learning, linear optimisation.

## 1 Introducción

La *investigación operativa* en la carrera administración de empresas de la UTI es considerada como Matemática aplicada y, a la vez, como disciplina sustantiva donde se practica la forma sencilla de razonar en la aplicación de modelos de desarrollo profesional. La comprensión y uso de: programación lineal continua, programación lineal entera y el análisis de decisiones; permiten resolver problemas que se presentan en situaciones de la profesión y la vida real.

La investigación operativa tiene sus orígenes en la segunda guerra mundial, debido a la necesidad urgente de asignación de recursos escasos en las operaciones militares, en problemas tácticos y estratégicos. Estas mismas técnicas se han extendido con posterioridad a las empresas. Disciplinas típicas de la investigación operativa son la optimización con sus múltiples sabores (lineal, no lineal, entera, estocástica, multiobjetivo), teoría de la decisión y de juegos, teoría de colas y simulación, teoría de grafos o flujos de redes. Según Santos [21] otras disciplinas como algoritmos metaheurísticos y lógica borrosa, redes neuronales artificiales, reconocimiento de patrones y otras técnicas de inteligencia artificial, aunque conceptualmente se encuadran dentro de la investigación operativa, habitualmente se estudian dentro de otras disciplinas ligadas a la ingeniería informática como la inteligencia artificial. Los contenidos de algunas de estas últimas disciplinas también están muy ligados a la estadística.

La temática de optimización lineal en la carrera Administración de Empresas en la UTI centra su atención en la resolución de problemas de optimización de recursos en situaciones reales mediante procedimientos cuantitativos orientados a la toma de decisiones. Esto se logra, específicamente, a partir de la evaluación de modelos matemáticos de programación lineal para la resolución de problemas de optimización, así como la realización del análisis de sensibilidad y modelos de transporte al resolver dichos problemas.

### 1.1 Hacia un aprendizaje significativo y desarrollador

La relación entre enseñanza, aprendizaje y desarrollo ha sido estudiada por diferentes concepciones pedagógicas y, desde hace varios años, se ha enfatizado en el carácter socializador, formativo y desarrollador del proceso de enseñanza-aprendizaje. Pozo en [20] expone en esta perspectiva integradora y desarrolladora, que se corresponde con el significado que se ha dado a una nueva cultura del aprendizaje, que no solo exige nuevos tipos de aprendizajes, sino también nuevas formas de aprender dado que aprender puede significar o requerir cosas distintas según las demandas culturales que lo motiven y el enfoque teórico que adopte el docente como afirman Ballesteros, Gamboa y Calvo en [2].

Los procesos del aprendizaje desarrollador han sido concebidos como el resultado de la interacción dialéctica entre tres dimensiones básicas: la activación-regulación, la significatividad de los procesos y la motivación para aprender. Para Castellanos en [5] los resultados obtenidos en el campo de la Matemática en el trabajo con estrategias metacognitivas y estrategias para la resolución de problemas, así como la estructuración de una colección básica de ejercicios utilizada para la fijación de los conocimientos y el desarrollo de las habilidades, han evidenciado el efecto

positivo que estas estrategias producen en el desarrollo de formas de aprender, que perduran al pasar el tiempo.

El estudiante, al intentar resolver las tareas matemáticas que se le plantean, debe atender al dominio del conocimiento, pero también al empleo de estrategias cognitivas y metacognitivas según Biggs en [3] y Monereo en [18].

Este trabajo centra la atención en las *estrategias de aprendizaje*, que constituyen procedimientos internos, no observables, de carácter generalmente cognitivo, que ponen en juego los sujetos cuando aprenden y que tienen como fin lograr un plan, un objetivo o una meta en base a las teorías cognitivas de Pozo en [20]. Delgado en [9] expone que las estrategias de aprendizaje se distinguen de las estrategias de enseñanza, ya que las primeras son ejecutadas intencionalmente por un aprendiz (estudiante) siempre que se le demande aprender, recordar o resolver problemas sobre un contenido de aprendizaje.

En la literatura especializada para Cevallos en [7] se distinguen diferentes *tipos de estrategias de aprendizaje: cognitivas, metacognitivas y de apoyo*. Las estrategias cognitivas son procesos por medio de los cuales se obtiene conocimiento. Las estrategias metacognitivas son conocimientos sobre los procesos de cognición o auto-administración del aprendizaje por medio de planeamiento, monitoreo y evaluación. Mientras, las estrategias de apoyo permiten al estudiante exponerse a sí mismo la asignatura que estudia, practicarla, explicarse y explicar a los demás, intercambiar ideas (Santos en [22], Schoenfeld en [23] y Matemática en [16]).

Fariñas en [10], resalta que el aprendizaje es un proceso complejo, que ha sido objeto de estudio de diferentes concepciones (conductistas, cognitivistas, constructivistas y humanistas), cada una de las cuales ha realizado sus aportes a una mejor comprensión de dicho proceso, con diferencias esenciales y limitaciones al igual que para el Colectivo de docentes Universidad de Matanzas en [8].

Hillier en [11] resalta que la concepción desarrolladora e integradora del aprendizaje que se asume para el estudio de las estrategias se sustentan en posiciones de la *escuela Histórico-Cultural*, porque su naturaleza dialéctica le permite considerar los mejores aportes de otros enfoques, con el ánimo de asimilarlos y crear una estructura teórica general más completa y profunda.

Un *aprendizaje desarrollador* es aquel que garantiza en el individuo la apropiación activa y creadora de la cultura, propiciando el desarrollo de su auto-perfeccionamiento constante, de su autonomía y auto-determinación, en íntima conexión con los necesarios procesos de socialización, compromiso y responsabilidad social.

Por tanto, según Jiménez en [13] para ser desarrollador, el aprendizaje tendría que cumplir con tres criterios básicos:

1. Promover el desarrollo integral de la personalidad del educando, es decir, activar la apropiación de conocimientos, destrezas y capacidades intelectuales en estrecha armonía con la formación de motivaciones, sentimientos, cualidades, valores, convicciones e ideales. En otras palabras, garantizar la unidad de lo afectivo-valorativo en el desarrollo y crecimiento personal de los aprendices.
2. Potenciar el tránsito progresivo de la dependencia a la independencia y a la auto-regulación, así como el desarrollo en el sujeto de la capacidad de conocer, controlar y transformar creadoramente su propia persona y su medio.
3. Desarrollar la capacidad para realizar aprendizajes a lo largo de la vida, a partir del dominio

de las habilidades y estrategias para aprender a aprender, y de la necesidad de una auto-educación constante según Castellanos, et al. en [6].

Los criterios básicos 2. y 3. en la concepción de una enseñanza, en pos de un aprendizaje desarrollador, presuponen asumir la enseñanza de estrategias no sólo cognitivas sino metacognitivas, en particular las referidas a la resolución de problemas y el desarrollo de la creatividad, convirtiéndolas en contenido de enseñanza. Otro elemento presente en este sentido lo constituye la elaboración, por parte del estudiante, de la orientación para la aplicación de procedimientos la cual es dada o elaborada, generalmente, por los docentes.

La educación matemática, tiene que ser una educación creativa, es decir, una educación que promueva un aprendizaje productivo y creador que fomente en los estudiantes una actividad científica y creativa ante la vida. Jiménez en [12] destaca que es imposible mejorar la educación matemática, desarrollar el pensamiento matemático de los alumnos en la resolución de problemas al margen de la creatividad.

Las clases de Matemática abordan una parte teórica donde se presentan conceptos (mediante definiciones o descripciones), teoremas (que enuncian propiedades o leyes demostrando dentro de un sistema de conocimientos) y procedimientos para actuar (de tipo algorítmicos o heurísticos), pero una buena parte del tiempo se dedica a la práctica, es decir, a la fijación y aplicación del contenido matemático acorde con Plata en [19].

En los textos sobre *metodología de la enseñanza de la Matemática*, Ballester, Gamboa y Calvo en [1] precisan que “un ejercicio (en sentido amplio) es una exigencia para actuar que se caracteriza por:

1. El *objetivo de las acciones*: transformar una situación inicial (lo dado) en una situación final (lo buscado).
2. El *contenido de las acciones*: objeto (elementos de materia matemática, su correspondencia con situaciones extramatemática y los elementos heurísticos a emplear) y tipos de acciones (identificar, realizar, comparar, ordenar, clasificar, reconocer, describir, aplicar, fundamentar, buscar, planificar, controlar).
3. Las *condiciones para las acciones* (exigencias que el ejercicio plantea al estudiante por su grado de dificultad).

El problema es un ejercicio que se caracteriza por tener una situación inicial conocida y una situación final desconocida, en que la vía de solución también es desconocida, pero que puede obtenerse con ayuda de procedimientos heurísticos.”

Precisamente, la búsqueda de la vía de solución es la que resulta de mayor dificultad en los estudiantes. Para que un estudiante desarrolle estrategias cognitivas y metacognitivas en la resolución de ejercicios y problemas, se debe conducir un proceso que transcurre por diferentes etapas o momentos:

1. Primer momento (tiene como objetivo final lograr una comprensión del ejercicio o problema planteado)
  - La *creación de una motivación* (para una clase de ejercicios y que puede estar en el propio ejercicio y en las potencialidades de este para contribuir al desarrollo intelectual o la educación de los alumnos).

- El *planteamiento del problema* (mediante las posibilidades o formas siguientes: encontrar el problema relacionado con la determinación de ciertas cantidades de magnitudes que surgen durante una discusión de clase; plantear una situación problemática que conlleva al planteamiento del ejercicio; entre otras).
  - La *comprensión del problema* (con el empleo de impulsos como: lee el problema detenidamente; ¿De qué trata el problema?; formula el texto con tus propias palabras; observa figuras, tablas o esquemas dados en el problema o elabóralos, si fuera necesario; interpreta palabras claves o busca aclaración de términos desconocidos)
2. Segundo momento (cuyo objetivo final es hallar la vía de solución)
- La *precisión del problema* (a partir de la comprensión del problema se precisan los datos y lo buscado, comprende la formulación precisa del problema)
  - El *análisis del problema* (orientado a una comprensión más profunda del problema en cuestión, a través de la interpretación y la traducción al lenguaje matemático de palabras claves se extraen relaciones y dependencias entre las magnitudes, posibles operaciones a realizar, posibilidad de relacionar magnitudes con ecuaciones o fórmulas conocidas; también es posible el empleo de medios heurísticos auxiliares y de procedimientos heurísticos)
  - La *búsqueda de la idea de solución* (dirigido a la reflexión sobre los métodos que conducen al establecimiento de relaciones entre los datos y las incógnitas, que generalmente llevan al planteamiento de una ecuación o la aplicación de una fórmula; lo anterior permite la elaboración de un plan de solución en que están presentes las determinaciones de los medios matemáticos concretos y la aplicación de las estrategias de trabajo heurísticas)
3. Tercer momento (orientado a resolver el ejercicio o problema planteado)
- La *ejecución del plan de solución* (encaminado a la determinación del orden de realización de los cálculos, el análisis de realización del cálculo aproximado, análisis de las unidades de medidas, la utilización de magnitudes auxiliares. Debe tenerse presente los procedimientos heurísticos, en particular las reglas heurísticas)
4. Cuarto momento (reflexión de lo aprendido en la resolución del ejercicio o problema)
- El proceso concluye con *reflexiones sobre la vía empleada para obtener la solución al problema*, así como la *comprobación de los resultados obtenidos*.

La comprobación que se realiza con las relaciones que se establecen en el enunciado del ejercicio o mediante comparación de la posible solución con la estimación, el cálculo aproximado y la práctica, si resulta conveniente. Esto es lo que comúnmente realizan estudiantes y profesores y dan paso a nuevos ejercicios. Sin embargo, para el desarrollo de estrategias metacognitivas resulta de suma importancia la vía empleada para obtener la solución al problema. Se evalúa la vía de solución mediante consideraciones retrospectivas sobre procedimientos y métodos utilizados para el plan de solución, se reflexiona sobre otras vías de solución.

En los procesos de resolución de ejercicios y problemas en que está presente el docente es importante que éste ofrezca impulsos heurísticos en los pasos de búsqueda de una solución, así como en la reflexión final para la evaluación de la vía empleada que permite llegar a una situación final deseada (la solución). Lopez en [14] plantea el siguiente modelo de presentación:

**Ejemplo 1.** *presenta: Ante una exigencia:*

- *¿Qué me piden?*
- *¿Qué se de ello?*
- *¿Qué necesito utilizar para responder?, ¿una definición?, ¿un teorema?, ¿un principio?, ¿una ley?, ¿una propiedad?...*
- *¿Cómo se relaciona lo que me piden con lo que determiné utilizar? ¿Estoy haciéndolo bien? Debo chequearlo, no me da y no tengo errores, debo cambiar.*

*Para encontrar una vía de solución debes:*

- *Interpretar lo buscado en todas las formas posibles y relacionarlo con lo que sabes.*
- *Seleccionar de lo que sabes, lo que necesitas para inferir lo buscado (condición necesaria, condición suficiente, procedimiento).*
- *Determinar de lo que te dan, qué falta para inferir lo buscado según la condición necesaria o suficiente o el procedimiento que seleccionaste.*

Se debe, entonces, determinar el método para el proceso de enseñanza-aprendizaje significativo, desarrollador y creativo que mejor propicie:

- Desarrollo del pensamiento.
- Aprendizaje activo, cooperado y flexible.
- Formar o desarrollar valores (personales y sociales).
- Dominio de la Matemática (su estructura, invariantes, solidez de los conocimientos, habilidades desarrolladas, interdisciplinariedad).
- Investigar. Vincular, en lo posible, con la práctica.
- Desarrollar la capacidad comunicativa, reflexiva y auto-reflexiva, a partir de:
  - Escuchar críticamente en función de diálogos reflexivos.
  - Enseñar a interpretar.
  - Enseñar a fundamentar y refutar.
  - Buscar soluciones eficientes.
  - Reflexionar y criticar colectivamente.
  - Comprender cómo se piensa, qué se sabe, qué no, aciertos y deficiencias, causas.
  - Evaluar y calificar colectivamente.
  - Enseñar a aprender.

A modo de ilustración de cómo debe conducirse el proceso para el desarrollo de estrategias cognitivas y metacognitivas se ha seleccionado un problema de la colección que se utiliza en las clases de *investigación operativa* para modelar una situación mediante el empleo de procedimientos de *optimización lineal*.

**Problema a resolver.** *Es muy frecuente en el Ecuador que los extranjeros nacionales e internacionales visiten la Ciudad Mitad del Mundo y lleven a sus casas diferentes tipos de recuerdos. La microempresa Doña Rosita produce dos clases de recuerdos: llaveros y carteras pequeñas de cuero. Cada llavero producirá una ganancia de \$1, mientras que cada cartera generará una ganancia de \$1,20. Para fabricar un llavero se necesitan 2 minutos en la máquina I y 1 minuto en la máquina II. Una cartera requiere 1 minuto en la máquina I y 3 minutos en la máquina II. Hay 3 horas disponibles en la máquina I y 5 horas disponibles en la máquina II para procesar todo el pedido de la semana. ¿Cuántos recuerdos de cada tipo deben producirse para maximizar la ganancia en Doña Rosita?*

En un primer momento el docente centra su atención en el texto del problema y lo relaciona con la labor de emprendimiento que realizan sectores de la población, aprovechando las oportunidades que ofrece el turismo nacional e internacional durante la visita a la Mitad del Mundo y el deseo de adquirir recuerdos de esas vivencias. Se crea así la motivación por ocuparse del problema planteado. Se pasa entonces a precisar que se trata de maximizar ganancia, por lo que la situación conduce a un problema de optimización y se plantea la interrogante, qué se conoce sobre procedimientos para determinar la ganancia óptima. Se concluye que en la optimización lineal se aprenden herramientas que permiten optimizar problemas de la realidad.

En un segundo momento el docente se ocupa de precisar y comprender mejor el problema como punto de partida para hallar una solución al problema. Se centra la atención en lo dado (datos) y lo buscado. Mediante las preguntas: ¿Qué datos me dan? ¿Qué me piden? ¿Qué se de ello? ¿Qué necesito utilizar? ¿una definición?, ¿un teorema?, ¿un principio?, ¿una ley?, ¿una propiedad?... ¿Cómo se relaciona lo que me piden con la determinación de lo que voy a utilizar? ¿En qué recursos auxiliar me pudiera apoyar para observar mejor la relación entre lo dado y lo buscado? Con final de las respuestas realizadas se propone elaborar una tabla que resuma el problema:

	Máquina I	Máquina II	Ganancia
Llaveros	2 min	1 min	1.00
Carteras pequeñas	1 min	3 min	1.20
Disponibilidad	3 horas = 180 min	5 horas = 300 min	

El análisis de la tabla se realiza en base a respuestas de las siguientes preguntas:

- ¿Qué desea producir Doña Rosita?
- ¿Qué necesita Doña Rosita para producir estos suvenires?
- ¿Cuál es el tiempo disponible de las máquinas?
- ¿Es este tiempo disponible una limitación para la producción que debo hacer?
- ¿Podemos plantear un modelo de programación lineal para resolveré esta situación?
- ¿Cómo expresar las respuestas a las preguntas anteriores en el lenguaje de la Programación Lineal?

Como resultado de lo anterior se resume en el lenguaje propio de la asignatura:

- *Variables de decisión:*  
 $X :=$  Cantidad de llaveros a producir  
 $Y :=$  Cantidad de carteras pequeñas a producir

- *Función objetivo:*

Maximizar:

$$Z = X + \frac{6}{5}Y$$

Restricciones:

$$2X + Y \leq 180$$

$$X + 3Y \leq 300$$

$$X \geq 0$$

$$Y \geq 0$$

En el tercer momento se procede a ejecutar las acciones del procedimiento elegido, prestando atención a los resultados que se van obteniendo en el trabajo algebraico, con los sistemas de ecuaciones/inecuaciones o con las matrices. Después de resolver el problema la solución óptima del mismo sería producir 48 llaveros y 84 carteras obteniendo los ingresos máximos que serían de 148,80 dólares. De esta forma logramos obtener también la ganancia máxima.

El proceso de trabajo con el problema planteado concluye con reflexiones sobre la vía empleada para obtener la solución al problema, la que se conduce con preguntas a los estudiantes, como:

- ¿De cuántas maneras podemos resolver el problema planteado?
- ¿Cuál resultaría más fácil para usted?
- ¿Llegaremos de ambas formas a la misma conclusión?

Finalmente, se realiza comentarios relativos a la comprobación de los resultados obtenidos.

## 1.2 Los problemas de optimización

La optimización consiste en la selección de una alternativa mejor, en algún sentido, que las demás alternativas posibles. Es un concepto inherente a toda la investigación operativa. Sin embargo, determinadas técnicas propias de la investigación operativa se recogen bajo el nombre de optimización o programación matemática. Los problemas de optimización se componen generalmente de tres componentes:

- **La función objetivo:** es la medida cuantitativa del funcionamiento del sistema que se desea optimizar (maximizar o minimizar). Como ejemplo de funciones objetivas en la administración de empresas se pueden mencionar: la minimización de los costes variables de operación de un sistema eléctrico, la maximización de los beneficios netos de venta de ciertos productos, la minimización del cuadrado de las desviaciones con respecto a unos valores observados o la minimización del material utilizado en la fabricación de un producto.
- **Variable:** representan las decisiones que se pueden tomar para afectar el valor de la función objetivo. Desde un punto de vista funcional se pueden clasificar en variables independientes o principales o de control y variables dependientes o auxiliares o de estado, aunque matemáticamente todas son iguales. En el caso de una empresa serán los valores de producción de los grupos de generación o los flujos por las líneas. En el caso de la venta, la cantidad de cada producto fabricado y vendido. En el caso de la fabricación de un producto, sus dimensiones físicas.

- Restricciones: representan el conjunto de relaciones (expresadas mediante ecuaciones e inecuaciones) que ciertas variables están obligadas a satisfacer. Por ejemplo, las potencias máxima y mínima de operación de un grupo de generación, la capacidad de producción de la fábrica para los diferentes productos o las dimensiones del material bruto del producto.

Finalmente para concluir el sustento teórico de la investigación se puede expresar que resolver un problema, a través de la optimización lineal consiste en encontrar el valor que deben tomar las variables para hacer óptima la función objetivo, satisfaciendo el conjunto de restricciones.

### 1.3 La optimización como una asignatura matemática

Práctica y educativamente, se puede hacer énfasis en que la técnica de la optimización es matemática por naturaleza. Típicamente involucra los procesos funcionales de maximización o minimización de una función que representa el desempeño de algún sistema. Esto se resuelve encontrando los valores de las variables (cuantificables y controlables) que hacen que la función alcance su mejor valor. A fin de entender como operan los algoritmos se requieren conocimientos de álgebra lineal y cálculo diferencial con varias variables. Algunos de los problemas de la teoría de optimización se pueden resolver por las técnicas clásicas del cálculo avanzado (tales como métodos Jacobianos y el uso de multiplicadores de Lagrange).

Sin embargo, la mayoría de los problemas de optimización no satisfacen las condiciones necesarias para ser resueltos de esta manera. Muchos de los otros problemas, pese a poder ser tratados con las técnicas clásicas, se resuelven más eficazmente si se utilizan métodos diseñados para cada caso particular. A través de la historia de las matemáticas se ha construido una colección de tales técnicas. Algunas han sido olvidadas y reinventadas, otras recibieron poca atención hasta que las computadoras las hicieron utilizables. El grueso de material al respecto es de origen reciente debido a que muchos de los problemas, tales como el flujo de tráfico, recién ahora cobran interés y también debido al gran número de investigadores disponibles actualmente para analizar tales problemas. Cuando ese material es catalogado dentro de un cuerpo autocontenido de conocimientos el resultado es una nueva rama de las matemáticas aplicadas.

## 2 Metodología

La presente investigación se fundamenta en la investigación cualitativa con paradigma interpretativo, o también llamado por autores como Yuni y Urbano en [25] quienes señalan que este paradigma obedece a la concepción filosófica de la que se nutre y que le provee los fundamentos acerca de lo real y las posibilidades de conocerlo. En este sentido, los investigadores realizaron la recolección de datos en el propio ambiente laboral universitario donde los sujetos desempeñan sus funciones educativas, esto se realizó con la intención de poder observar la situación directamente y sin la presencia e influencia de otros elementos que pudiesen desvirtuar la información facilitada.

Por el carácter propio de la investigación cualitativa, se realizaron entrevistas de tipo estructuradas a los docentes y estudiantes, método recomendado por Caldach en [4] para obtener información de los informantes al instante de expresar sus opiniones sobre los tópicos que se plantean en la investigación. Así, cada sujeto respondió de manera amena y mesurada cada ítem recurriendo a los conocimientos que poseen de acuerdo a su área de preparación académica, de manera que una vez recolectada la información requerida, los autores procedieron a plantear sus propias interpretaciones tomando en consideración las opiniones obtenidas.

## 2.1 Informantes

En virtud de que la presente investigación se encuentra en el paradigma cualitativo, debido a que el estudio, se enfoca en fomentar el proceso matemático de la optimización lineal como estrategia de enseñanza significativa. Según Martínez en [15], para la selección de la muestra en un estudio cualitativo, es de considerarse como informantes y se requiere que el investigador especifique con precisión cuál es la población relevante o el fenómeno de investigación, usando criterios (que justificará) que pueden basarse en consideraciones teóricas o conceptuales, intereses personales, circunstancias situacionales u otras consideraciones. Para la selección de los informantes en la investigación, los investigadores se sustentaron en los criterios recomendados por Mendieta en [17] donde el citado autor indaga en que no existe la necesidad de una selección estadística por ser un estudio de enfoque cualitativo. Seleccionándose cinco (5) docentes que poseen formación andragógica con grado académico igual o superior a Magister, debido a su formación académica y experiencia laboral relacionada con el tema en estudio, también se contó con la participación diez (10) estudiantes de la UTI todos de distintos niveles de estudio y carreras.

## 3 Análisis de los resultados

Después de aplicarse las entrevistas semi-estructuradas tanto a los docentes como a los estudiantes que cursan optimización lineal, área adscrita al syllabus académico de La Universidad Tecnológica Israel se logró evidenciar en los estudiantes, la poca durabilidad en el aprendizaje de los contenidos adquiridos relacionados con esta materia que, no pocas veces, es argumento por los docentes en sus resultados diagnósticos. Con el fin de interpretar los principales aportes emitidos por los docentes se logró evidenciar que:

- Los estudiantes esperan que el profesor oriente los pasos para resolver la tarea y ejecutan estos sin elaborar, previamente, un plan de solución.
- Los estudiantes no reflexionan acerca de los conocimientos que poseen, además de conocimientos que les permiten resolver la tarea propuesta.
- Igualmente entre los enunciados expuestos por los estudiantes, indagaron en no ser apreciado hacer uso de estrategias cognitivas y meta-cognitivas que le faciliten llegar a encontrar una vía de solución a problemas matemáticos.
- Afirmaron que ante la propuesta de solución de un compañero, el resto de los estudiantes la asumen como propia y dejan de buscar alternativas propias de solución.
- Los estudiantes no acostumbran a buscar alternativas y reorganizar los pasos seguidos, de forma que puedan dar solución a los deberes solicitados por los docentes.
- Los estudiantes no expresaron sus respuestas a partir de determinar lo esencial y necesario.
- En relación a los docentes entrevistados, demostraron no prestar atención al desarrollo de distintas estrategias de aprendizajes efectivas.

En base a las opiniones descritas, los métodos de optimización no son apreciados por el estudiantado, tanto los métodos clásicos (que son los algoritmos que habitualmente se explican en los syllabus de optimización) como los métodos meta-heurísticos (que se encuentran ligados a lo

que se denomina inteligencia artificial e imitan fenómenos sencillos observados en la naturaleza). Por lo tanto, la optimización lineal, es presentada por la UTI en la etapa inicial de cada semestre. De forma muy general y aproximada se puede interpretar que los métodos clásicos desarrollados en la institución buscan y garantizan un óptimo local mientras que los métodos meta-heurísticos tienen mecanismos específicos para alcanzar un óptimo global aunque no garantizan su alcance según los testimonios de los estudiantes.

## 4 Conclusiones

Los contenidos declarados en el sílabo de *investigación operativa y optimización lineal* para la carrera administración de empresas es el punto de partida para el desarrollo de un aprendizaje significativo, desarrollador, creativo; pero se requiere además, conducir el proceso de aprendizaje de manera adecuada, por lo que se hace necesario renovar y perfeccionar las metodologías (estrategias de aprendizaje) empleadas, a la realidad actual de formación en la UTI.

Cabe resaltar, que existe una enorme variedad de actividades en el mundo cotidiano que pueden ser útilmente descritas como sistemas, desde sistemas físicos tales como una planta industrial hasta entidades teóricas tales como los modelos económicos. La operación eficiente de esos sistemas usualmente requiere de un proceso matemático para optimizar varios índices que miden el desempeño del sistema. Algunas veces, esos índices son cuantificados y representados como variables algebraicas. Entonces se deben encontrar valores para esas variables, que maximicen la ganancia o beneficio del sistema, o bien minimicen los gastos o pérdidas. Estos procesos no son bien descritos y aceptados por los estudiantes, por ser establecido mediante un conjunto procedimental matemático.

A modo de conclusión, se asume que las variables dependen de ciertos factores. Algunos de esos factores a veces están bajo el control (al menos parcialmente) del analista responsable del desempeño del sistema. Debido a que la teoría de la optimización brinda este eslabón en la cadena de la administración de sistemas o empresas se constituye un cuerpo importante del conocimiento matemático, pero si este cuerpo o asignatura de las ciencias matemáticas no es desarrollado de forma significativa a los estudiantes, no habrá una comprensión lógica y razonable del tema para desarrollar en la carrera de administración de empresas, así de esta manera se mantendrá como un tema teórico-abstracto sujeto al programa analítico del ente universitario.

## Referencias

- [1] Ballesteros, S. Gamboa, A. y Calvo M. *Metodología de la enseñanza de la Matemática* (Tomo I). Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1992.
- [2] Ballesteros, S. Gamboa, A. y Calvo M. *Metodología de la enseñanza de la Matemática* (Tomo II). Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 2000
- [3] Biggs, J. *Approaches to learning an to essay writing*. (R. S. (Ed.), Ed.) Learning strategies and learning styles. 1988.
- [4] Calduch, R. *Métodos y técnicas de investigación internacional*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid. 2014.

- [5] Castellanos, D. *Teorías actuales del aprendizaje*. Caracas, Venezuela: Imprenta Universitaria UBV. 2007.
- [6] Castellanos, D., Castellanos, B., Llivina Lavigne, M. J., & colectivo, S. M. *Aprender y enseñar en la escuela: una concepción desarrolladora*. La Habana: Pueblo y Educación. 2002. Disponible en: <http://esdocs.org/docs/index-16868.html>
- [7] Cevallos, W. A. DSPACE ESPOL, (22 de Octubre de 2010). Disponible en [http://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/123456789/13388/1/Resumen\\_Tesis\\_CICYT-ESPOL\\_Antonio\\_Cevallos%5B1%5DULTIMA.pdf](http://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/123456789/13388/1/Resumen_Tesis_CICYT-ESPOL_Antonio_Cevallos%5B1%5DULTIMA.pdf)
- [8] Colectivo de docentes Universidad de Matanzas. (2000). *Técnicas Creativas*. La Habana, Cuba: Editorial Universitaria.
- [9] Delgado, T. (2013). *DSPACE ESPOL*. Disponible en <http://www.dspace.espol.edu.ec/handle/123456789/24826>.
- [10] Fariñas, G. *Psicología Educativa*. Selección de lecturas. La Habana, Cuba: Félix Varela. 2001.
- [11] Hillier, F. *Introducción a la Investigación de Operaciones*. 9ª edición. McGraw Hill. 2010
- [12] Jiménez, H. M. *Estrategias para resolver problemas en Análisis Matemático*. Memorias de la X Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Ponencia. 1996.
- [13] Jiménez, H. M. *Metodología para la instrumentación del enfoque desarrollador en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Superior*. ADMES. La Habana: Informe sobre resultado de investigación. Universidad de Ciencias Pedagógicas “E. J. Varona”. 2010.
- [14] Lopez, D. *Buenosaires*, (1 de Octubre de 2009). Disponible en [http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/niveles/especial/documentos.php?menu\\_id=32092](http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/niveles/especial/documentos.php?menu_id=32092)
- [15] Martínez, M. *La investigación cualitativa etnográfica en educación*. México: Trillas. 2004
- [16] Matemática, M. (Ed.). (s.f.). *Blog de Formación Inicial Docente*. Disponible en <http://www2.minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial/>
- [17] Mendieta, G. Informantes y muestreo en investigación cualitativa. *Investigaciones Andina*, 17, 1148-1150. 2015
- [18] Monereo, C. *Estrategias de aprendizaje y enseñanza*. (Colección de aprendizaje ed.). (U. d. Girona, Ed.) Catalunya, España: Eds. Universitat. 1984.
- [19] Plata, W. *DSPACE ESPOL*. 2009. Disponible en <https://www.dspace.espol.edu.ec/handle/123456789/8104>
- [20] Pozo, J. *Teorías cognitivas del aprendizaje*. 10<sup>ma</sup> Edición. Madrid, España: Ediciones Morata. 1985. Disponible en <http://www.edmorata.es/libros/teorias-cognitiva-del-aprendizaje>
- [21] Pozo, J. *Aprendices de maestros. La nueva cultura del aprendizaje*. Madrid: Alianza Editorial. 1998.

- [22] Santos, L. *El trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las Matemáticas*. Educación Matemática, Vol. 4 (No. 2). 1992.
- [23] Schoenfeld, A. *Ideas y tendencias en la resolución de problemas. La enseñanza de la Matemática a debat*. Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia. 1985.
- [24] Universitat. (14 de Noviembre de 2014). Disponible en <http://fci.uib.es/Servicios/libros/veracruz/nasso/Proceso-de-Ensenanza-Aprendizaje-en-Educacion.cid210315>
- [25] Yuni, J y Urbano, C. *Investigación Etnográfica. Investigación acción*. Argentina: Brujas. 2005

# Problemas y Soluciones

## *Problems and Solutions*

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@gmail.com)  
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias  
Universidad del Zulia, Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor por correo electrónico, en español o inglés, a la dirección arriba indicada (preferiblemente como un archivo fuente en  $\text{\LaTeX}$ ). Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

*Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editor, in Spanish or English, to the address given above (preferably as a  $\text{\LaTeX}$  source file). Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.*

## 1 Problemas propuestos

El problema propuesto a continuación se planteó en la XX Olimpiada Centroamericana y del Caribe, celebrada en La Habana, Cuba, en junio del 2018.

144. Sean  $x, y$  números reales tales que los tres números

$$x - y, \quad x^2 - y^2, \quad x^3 - y^3$$

son positivos y números primos. Demuestre que  $x - y = 3$ .

## 2 Soluciones

Recordamos que no se han recibido soluciones a los problemas 24–28, 44, 51, 54, 59, 69, 79, 82–91, 94–106, 108–113, 116, 118–123, 126, 128–130 y 133–143. Invitamos a los lectores a enviarnos sus soluciones para esos problemas.

80. [12(1) (2004) p. 95.] En una pizarra se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Dos jugadores  $A$  y  $B$  juegan por turnos. Cada jugador en su turno escoge uno de los números que quedan en la pizarra y lo borra, junto con todos sus múltiplos (si los hay). El jugador que borra el último número pierde.  $A$  juega primero. Determinar si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explicar cuál es esa estrategia.

Nota: Un jugador tiene una estrategia ganadora si puede garantizar su victoria, sin importar cómo juegue su rival.

*Solución de Giovanni Soto (estudiante de la Licenciatura en Matemática), Universidad del Zulia, Facultad de Ciencias:* Mostraremos una estrategia ganadora para el jugador  $A$ . Al iniciar el juego  $A$  escoge el número 4 y se borran 4 y 8 de la pizarra. Ahora hay varios casos:

Si  $B$  escoge el 3 los números restantes en la pizarra serían  $\{1, 2, 5, 7\}$  que son primos entre sí.  $A$  toma cualquiera de ellos,  $B$  otro,  $A$  otro y  $B$  toma el último, perdiendo.

Si  $B$  escoge el 5 o el 7 basta con que  $A$  escoja el 3, ya que los números restantes en la pizarra serían  $\{1, 2, 7\}$  o  $\{1, 2, 5\}$ . Entonces  $B$  toma cualquiera de ellos,  $A$  otro y  $B$  toma el último, perdiendo.

Si  $B$  escoge el 2,  $A$  escoge el 3 ya que de esta manera los números que quedan en la pizarra serán  $\{1, 5, 7\}$  que son primos entre si y como antes  $B$  toma el último.

Si  $B$  escoge el 6,  $A$  escoge el 9 y los números en la pizarra serán  $\{1, 2, 3, 5, 7\}$  que son todos primos entre sí, y  $B$  tomará el último.

Si  $B$  escoge el 9,  $A$  escoge el 6 y gana como en el caso anterior.

81. [12(1) (2004) p. 96.] Se define una sucesión  $a_0, a_1, a_2, \dots$  de la siguiente manera:  $a_0 = a_1 = 1$  y para  $k \geq 2$ ,  $a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + 1$ . Determinar cuántos enteros entre 1 y 2004 se pueden expresar de la forma  $a_m + a_n$  con  $m$  y  $n$  enteros positivos y  $m \neq n$ .

*Solución de Giovanni Soto (estudiante de la Licenciatura en Matemática), Universidad del Zulia, Facultad de Ciencias:* Los  $a_k$  entre 1 y 2004 son:

$$\begin{array}{cccc} a_1 = 1 & a_2 = 3 & a_3 = 5 & a_4 = 9 \\ a_5 = 15 & a_6 = 25 & a_7 = 41 & a_8 = 67 \\ a_9 = 109 & a_{10} = 177 & a_{11} = 287 & a_{12} = 465 \\ a_{13} = 753 & a_{14} = 1219 & a_{15} = 1973. & \end{array}$$

Los pares de enteros  $(m, n)$  con  $m, n = 1, \dots, 15$  y  $m \neq n$  son  $\binom{15}{2} = 105$ . Los pares tales que  $a_m + a_n > 2004$  son los de la forma  $a_{15} + a_k$  con  $k = 7, \dots, 14$ . Por lo tanto, la cantidad de enteros de la forma  $a_m + a_n$  que hay entre 1 y 2004 con  $m$  y  $n$  enteros positivos y  $m \neq n$  es a lo sumo  $\binom{15}{2} - 8 = 105 - 8 = 97$ . Si existiesen pares de enteros diferentes  $(m, n)$  y  $(m', n')$  tales que  $a_m + a_n = a_{m'} + a_{n'}$  la cantidad podría ser menor que 97. Pero esto no puede ocurrir: si por ejemplo  $m > m' > n'$ , como  $a_1, a_2, \dots$  es una sucesión creciente de enteros positivos, tendremos que  $a_m + a_n > a_m = a_{m-1} + a_{m-2} + 1 > a_{m'} + a_{n'}$ . Por lo tanto la respuesta es 97.

132. [16(2) (2008) p. 327.] Halle el menor entero positivo  $N$  tal que la suma de sus cifras sea 100, y la suma de las cifras de  $2N$  sea 110.

*Solución del editor:* Sea  $S(n)$  la suma de las cifras del entero positivo  $n$ . Observemos que si todos los dígitos de  $n$  son menores que 5, entonces obviamente  $S(2n) = 2S(n)$ . Pero por cada dígito de  $n$  mayor o igual que 5, al sumar  $n + n$  se produce el acarreo de una unidad, lo que hace que  $S(2n)$  disminuya 9 unidades respecto de  $2S(n)$ . En otras palabras,  $S(2n) = 2S(n) - 9x$ , donde  $x$  es el número de unidades llevadas, que es igual al número de dígitos de  $n$  que son mayores o iguales que 5. En este problema  $2S(N) - S(2N) = 200 - 110 = 90$ , por lo tanto  $N$  debe contener 10 cifras mayores o iguales que 5. Como estamos interesados en el menor  $N$  posible, pongamos estas 10 cifras iguales a nueve, para disminuir el número total de cifras. Para completar  $S(N) = 100$  con cifras menores que 5, se necesitan al menos

tres cifras, que podrían ser 4, 4 y 2 o 4, 3 y 3. Nos conviene la primera opción para poner el 2 en el primer lugar, y así formamos el número  $N = 244999999999$ .

(Verificación:  $S(N) = 2+4+4+10\cdot 9 = 100$ ,  $S(2N) = S(489999999998) = 4+8+10\cdot 9+8 = 110$ .)

# Guía para los Autores

**Divulgaciones Matemáticas** es una revista arbitrada que considera para su publicación trabajos inéditos de investigación, en todas las áreas de la Matemática y sus aplicaciones, historia o enseñanza. Contribuciones adecuadas trabajos de investigación, de divulgación e históricos y de enseñanza matemática. Se presta especial atención a los temas tratados en la reunión anual e itinerante de las **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** celebradas en Venezuela. Además, contempla una sección de problemas y soluciones, la cual presenta problemas que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado, sin conocimientos especializados.

El primer requisito para que un artículo sea publicable es su corrección matemática. En segundo lugar, el estilo expositivo debe ser atractivo y lo más fluido y organizado que sea posible. En los trabajos de investigación se tomarán en cuenta la relevancia y originalidad de los resultados obtenidos. El tercer requisito para que el cuerpo editorial de la revista acepte un artículo, para someterlo a evaluación y posible publicación, es que el mismo debe estar elaborado en LaTeX, utilizando una plantilla predefinida por la revista, se le pide a los autores respetar las instrucciones internas indicadas en la plantilla mencionada. El archivo fuente (.tex) y una versión en formato .dvi, .pdf o .ps (imprimible) debe enviarse por correo electrónico a [divulgaciones@demat-fecluz.org](mailto:divulgaciones@demat-fecluz.org). Si el artículo contiene figuras, éstas deben adjuntarse como archivos separados en formatos .png o .jpg.

Los lenguajes aceptados por la revista son español e inglés. Al someter un artículo, el autor debe remitir una carta en la que se haga constar que el artículo que se está sometiendo no ha sido publicado o sometido a otra revista de forma total o parcial. Dicha carta debe contener los siguientes datos: Nombre completo del autor o autores, título del artículo, firma del autor que somete el artículo (autor de correspondencia), y declaración expresa de conformidad de los demás autores (cuando exista más de un autor).

El autor, o autores, en el mensaje de sometimiento del manuscrito deben indicar la sección de la revista en la que sugiera debe ser incluido su trabajo, a saber: artículo de investigación, artículo de divulgación e histórico, artículo de enseñanza matemática. Los artículos deben organizarse en las siguientes secciones: Identificación, Resumen, Abstract, Introducción, Desarrollo, Agradecimiento (opcional), y Referencias bibliográficas (usar el estilo ejemplificado en la plantilla).

**Identificación.** Esta debe incluir: Título completo del trabajo en castellano e inglés; Título corto para el trabajo; Nombre completo y dirección completa del autor o autores; Afiliación institucional; Dirección electrónica; Dos clasificaciones, una primaria y otra secundaria, de cinco caracteres de la AMS (MSC 2010).

**Resumen:** Texto de no más de doscientas palabras que simplifique en esencia lo que se presenta a lo largo del trabajo. Debe tomar en cuenta aspectos como: Objetivos del trabajo; Metodología utilizada; Resultado. A continuación del resumen se deben incluir de tres a seis palabras o frases claves.

**Abstract:** Una traducción al idioma inglés de todo lo expuesto en el resumen.

Cabe resaltar que **LA REVISTA SOLO PROCESARÁ LOS ARTÍCULOS QUE CUMPLAN CON TODOS LOS REQUISITOS ANTES EXPUESTOS.**

# Guide for Authors

**Divulgaciones Matemáticas** is a refereed journal, which considers for publication, unpublished research papers in all branches of mathematics and its applications, history or teaching. Suitable contributions can be research papers, historical and/or teaching papers and bibliographical reviews. Special attention is paid to those topics covered by the annual itinerant meeting **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** held in Venezuela. In addition, the journal contemplates a section of problems and solutions, which contains problems that can be addressed by undergraduate students of mathematics without expertise.

Mathematical correctness is the first requirement for an article to be published. In second place, the exposition style should be attractive and most fluid and organized as possible. For research works the relevance and originality of the results will be taken into account. The third requirement to agree on the evaluation and possible publication of an article is its preparation in LaTeX using a predefined template by the journal. We ask the authors to respect the internal instructions given in the provided template. The source file (.tex) and a version .dvi, .pdf or .ps (printable) should be sent by email to [divulgaciones@demat-fecluz.org](mailto:divulgaciones@demat-fecluz.org). If the article contains figures, these should be attached as separate files in .jpg or .png formats.

The languages accepted by the journal are Spanish and English. When submitting an article, the author must include a separate letter stating that the article has not been published or submitted to another journal in total or partial way. The letter should contain the following information: Full name of author or authors, article title, signature of the author who submits the article (corresponding author), and a declaration of conformity of the other authors.

When submitting a manuscript, the author or authors, should suggest the section of the journal in which the work should be included, namely research papers, expository and historical papers, mathematics teaching papers. Articles should be organized into the following sections: Identification, Abstract, Resumen, Introduction, Development, Acknowledgment (optional), and References (use the style exemplified in the template).

**Identification.** This should include: Full title in Spanish and English; short title for the article; Full name and full address of author or authors; Institutional affiliation; Electronic address; Two classifications, one primary and one secondary, of five characters of the AMS (MSC 2010).

**Abstract:** Text of not more than two hundred words simplify essentially what is presented throughout the work. You should take into account aspects such as work objectives; Methodology used; Result. Following the abstract should include three to six key words or phrases.

**Resumen:** A Spanish language translation of the above in the abstract.

Should be noted that **THE JOURNAL WILL ONLY PROCESS ARTICLES THAT MEET ALL THE REQUIREMENTS MENTIONED ABOVE.**

DIVULGACIONES MATEMÁTICAS, Vol. 19, No. 2  
Se terminó de editar en Enero del 2019  
en el Departamento de Matemática (DEMAT)  
Maracaibo - Venezuela.

# La Universidad del Zulia

## AUTORIDADES

Jorge Palencia  
**Rector**

Judith Aular de Durán  
**Vicerrectora Académica**

María Artigas  
**Vicerrectora Administrativa (E)**

Marlene Primera Galué  
**Secretaria de LUZ**

## Facultad Experimental de Ciencias

Merlin Rosales  
**Decano**

Neida Murcia  
**Directora del Departamento de Matemáticas**

# Divulgaciones Matemáticas

Vol. 19, No. 1, 2018

## Contenido (Contents):

### Artículos de Investigación (Research papers)

**Medidor y graficador de voltaje, corriente y potencia aparente con monitor en tiempo real por Internet y local usando Arduino y Raspberry PI.**

Measurer and plotter of voltage, current and apparent power with real-time monitor by Internet and local using Arduino and Raspberry PI.

Yemala Castillo Brito, Gerardo Herrera Roldan, Jesús Gómez 1-15

**Coincidences in the Padovan and Tribonacci sequences.**

Coincidencias en las sucesiones de Padovan y Tribonacci.

Santos Hernández Hernández 16-22

**On contra  $e^{\theta}$ -continuous functions.**

En funciones contra  $e^{\theta}$ -continuas.

Burcu Sünbül Ayhan, Murad Özkoç 23-35

**Some new sequente spaces of interval number based on Zweier sequences and Fibonacci numbers.**

Algunos nuevos espacios de secuencia de número de intervalo basados en secuencias de Zweier y números de Fibonacci.

Shyamal Debnath, Ayhan Esi, Subrata Saha 36-43

**Representación de grafos divisores de cero para anillos.**

Representation of graphs zero divisores for rings.

Juan Otero, José Salazar, Felicia Villarroel 44-51

### Artículos de Divulgación e Históricos (Expository and historical papers)

**Propiedad multiplicativa, simultánea, de la derivada y la integral en funciones de clase  $C^1$ .**

Simultaneous multiplicative property of the derivative and integral in functions of  $C^1$  class.

Tobías Rosas S., Irma Abrigo C., Mayra García C., Eduardo Suárez V. 52-64

### Artículos de Enseñanza Matemática (Mathematical teaching papers)

**Geoplano circular trigonométrico: Un recurso didáctico para la enseñanza de la Geometría.**

Trigonometric circular geoplany: A didactic resource for the teaching of Geometry.

Derling José Mendoza Velazco 65-81

**Optimización lineal como estrategia de aprendizaje desarrollador de la investigación operativa en administración de empresas.**

Linear optimization as a learning strategy developer of operational research in business administration.

Yoandry Rivero Padrón, Ernesto Fernández Rivero 82-94

### Problemas y Soluciones (Problems and Solutions)

José H. Nieto S. (Editor)

95-97