Universidad del Zulia

Facultad Experimental de Ciencias

Divulgaciones Matemáticas

Departamento de Matemática

Depósito legal: pp 199302ZU392
ISSN 1315-2068

Maracaibo - Venezuela

Vol. 21 - No. 1-2 - 2020

Divulgaciones Matemáticas

Revista Matemática de la Universidad del Zulia
Facultad Experimental de Ciencias
Departamento de Matemática

Revista arbitrada, publicada de forma digital, de libre acceso, indizada en Latindex, Wordcat, Mir@bel, Mathematical Reviews, MathSci online/CD-ROM, Zentralblatt für Mathematik y Revencyt. Se publica un volumen anual compuesto por dos números, que aparecen en junio y diciembre.

Dirección Postal:

Revista Divulgaciones Matemáticas
Departamento de Matemática
Facultad Experimental de Ciencias
La Universidad del Zulia - Apartado Postal 526
Maracaibo, Estado Zulia
Venezuela

Correo electrónico: divulgaciones@demat-fecluz.org

URL: divmat.demat-fecluz.org
produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones

Depósito Legal pp 199302ZU392

Compuesta con LaTeX y $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-LaTeX en el Departamento de Matemática de la Facultad Experimental de ciencias, Universidad del Zulia.

Universidad del Zulia
Maracaibo, Venezuela

DIVULGACIONES MATEMÁTICAS

Vol. 21 2020 No. 1-2

Presentación

El Comité Editorial de ***Divulgaciones Matemáticas*** se complace en presentar el **Vol. 21**, **No. 1-2**, **2020**. Los artículos contenidos en el presente volumen fueron recibidos entre finales del año 2019 y durante el año **2020**, los mismos fueron evaluados y aceptados para su publicación, antes de la edición del presente volumen.

Es importante aclarar que el presente volumen contiene los dos números pertenecientes al año 2020, debido a la poca demanda de artículos por parte de autores y la complicada situación mundial con respecto a la pandemia de COVID-19 que se está viviendo, en particular, en nuestro país Venezuela. La revista solo muestra seis (6) artículos en la sección de Artículos de Investigación, un (1) artículo en la sección de Artículos de Divulgación e Históricos y un manuscrito con la solución de tres (3) problemas presentados en la sección de Problemas y Soluciones, presentando ésta un nuevo problema para resolver propuesto en la EGMO (European Girls Mathematical Olympiad) 2020, realizada de manera virtual.

El trabajo editorial relacionado con este volumen es el resultado de mucho esfuerzo de algunos miembros del Departamento de Matemática de la Facultad Experimental de Ciencias. Los Editores queremos expresar nuestro agradecimiento a todos aquellos que hicieron posible este volumen: a los autores de los trabajos que se presentan, que dieron su voto de confianza a la revista; a los árbitros que evaluaron los artículos, cuya labor desinteresada permitió satisfacer los estándares de calidad de la revista y mejorar sensiblemente la forma de los trabajos; al equipo editorial de ***Divulgaciones Matemáticas***; y en especial al Prof. José Heber Nieto por su aporte para la sección de ***Problemas y Soluciones***. A todos, mil gracias.

La revista está ahora en el portal de ***Revistas Científicas y Humanísticas de la Universidad del Zulia (ReviCyHLUZ)*** cuyo sitio web oficial es: `produccioncientificaluz.org`. Ahora los artículos están identificados con el membrete del ***Sistema de Servicios Bibliotecarios y de Información de LUZ (SERBILUZ)***. Por tanto, la revista tiene dos páginas web de uso oficial: `divmat.demat-fecluz.org` y `produccioncientificaluz.org`, donde serán publicados los artículos y se podrán descargar de forma gratuita. Todo esto con la finalidad de darle más expansión y reconocimiento a la revista.

Por último, el Comité Editorial de ***Divulgaciones Matemáticas*** pide disculpas a los autores de los artículos aquí publicados por los inconvenientes causados por la tardanza en la edición de este volumen, les agradecemos su espera. Además, invitamos a la comunidad matemática venezolana e internacional a seguir dándonos su voto de confianza sometiendo sus trabajos en la revista para evaluación y posible publicación.

[1] Dr. Tobías Rosas Soto.

[1]Editor en Jefe de *Divulgaciones Matemáticas* y editor del presente número

Presentation

The Editorial Board of ***Divulgaciones Matemáticas*** is pleased to present the **Vol. 21**, **No. 1-2**, **2020**. The articles contained in this volume are those received during the second semester of the year **2019** and during 2020, wich ones were evaluated and accepted for publication, before the edition of this volume.

It is important to clarify that this volume contains the two numbers pertaining to the year 2020, due to the low demand of articles by authors and the complicated global situation regarding the COVID-19 pandemic that is being experienced, in particular, in our country Venezuela. The journal only shows six (6) articles in the Research Articles section, one (1) article in the Expository and Historical Articles section and a manuscript with the solution of three (3) problems presented in the Problems and Solutions section, presenting this a new problem to solve proposed in the EGMO (European Girls Mathematical Olympiad) 2020, carried out virtually.

The editorial work related to this volume is the result of the efforts of some members of the Department of Mathematics of the Experimental Faculty of Sciences. The Editors want to express their gratitude to all of those who made this volume possible: to the authors of the presented works, who gave their vote of confidence to the journal; to the referees, who evaluated the articles with selfless work, guaranteeing the quality standards of the journal and significantly improving the way of working; to the editorial team of ***Divulgaciones Matemáticas***; and especially to Professor José Heber Nieto, for his contribution to the ***Problems and Solutions*** section. To all of them, thanks a lot.

The journal is now in the portal of ***Revistas Científicas y Humanísticas de la Universidad del Zulia (ReviCyHLUZ)*** wich oficial webpage is: `produccioncientificaluz.org`. Now the articles are identify with the letterhead of ***Sistema de Servicios Bibliotecarios y de Información de LUZ (SERBILUZ)***. Furthermore, the journal have two oficial webpages: `divmat.demat-fecluz.org` and `produccioncientificaluz.org`, where will be published the articles y it will may download in a free way. All these with the purpose to give more expantion and recognition to the journal.

Finally, the Editorial Board of ***Divulgaciones Matemáticas*** ask for apologize to the authors of the articles published here for the inconvenient the delate of the edition of this volumes made, we thanks your wait. Furthermore, we invite the Venezuelan and international mathematical community to continue giving their support by submitting their articles to our journal for evaluation and possible publication.

[2] Dr. Tobías Rosas Soto.

[2]Chief Editor of *Divulgaciones Matemáticas* and editor of the present volume

DIVULGACIONES MATEMÁTICAS
Vol. 21, No. 1-2, 2020

Contenido (Contents):

Artículos de Investigación
(Research papers)

Divulgación e Históricos
(Expository and Historical)

Problemas y Soluciones
(Problems and Solutions)

Divulgaciones Matemáticas Vol. 21, No. 1-2(2020), pp. 1–8

A note on P-I-convergence

Una nota sobre P-I-convergencia

Carlos Granados (carlosgranadosortiz@outlook.es)
Corporación Universitaria Latinoamericana
Barranquilla-Colombia

Abstract

In this article, we use the notions of pre-open and pre-I-open sets to introduce the idea of pre-I-convergence which we will denoted by P-I-convergence, we also show some of its properties. Besides, some basic properties of pre-I-Fréchet-Urysohn space is shown. Moreover, notions related to pre-I-sequential and pre-I-sequentially are proved. Furthermore, we show some relations of pre-I-irresolute functions between preserving pre-I-convergence functions and pre-I-covering functions.

Key words and phrases: pre-I-convergence, pre-I-irresolute functions, preserving pre-I-convergence functions, pre-I-sequentially open, pre-I-sequential spaces, pre-I-covering functions, pre-I-Fréchet-Urysohn spaces.

Resumen

En este artículo, usamos las nociones de conjuntos pre-abierto y pre-I-abierto para introducir la idea de pre-I-convergencia la cual vamos a denotar por P-I-convergencia, también mostramos algunas de sus propiedades. Además, algunas propiedades básicas del espacio pre-I-Fréchet-Urysohn son mostradas. Adicionalmente, nociones relativas a espacios pre-I-secuenciales y pre-I-secuencialmente abiertos son probadas. Además, mostramos algunas relaciones entre funciones pre-I-irresolutas, funciones que preservan pre-I-convergencia y funciones de pre-I-cobertura.

Palabras y frases clave: pre-I-convergencia, funciones pre-I-irresolutas, funciones que preservan pre-I-convergencia, pre-I-secuencialmente abierto, espacios pre-I-secuenciales, funciones de pre-I-cobertura, espacios pre-I-Fréchet-Urysohn.

1 Introduction

The notion of ideal was introduced by Kuratowski in 1933 in [4], an ideal I on a space X is a collection of elements of X which satisfies: (1) $\emptyset \in I$; (2) If $A, B \in I$ then $A \cup B \in I$; and (3) if $B \subset I$ and $A \subset B$, then $A \in I$. This notion has been grown in several concepts of general topology. In 2019, Zhou and Lin in [7] used the notion of ideal on the set $\mathbb{N}$ to extend the notion of I-convergence, those results were useful for the developing of this paper. On the other hand, in 1982, Mahhour et al. in [6] introduced the concept of pre-open sets in a topological spaces, after that

Received 08/06/2020. Revised 12/07/2020. Accepted 30/09/2020.
MSC (2010): 54A05, 54A20.
Corresponding author: Carlos Granados

in 1999, Dontchev in [2] presented the idea of pre-I-open sets and pre-I-continuous functions in ideal topological spaces. In this article, we took whole the notions mentioned above and we define other properties on pre-I-convergence and we study the relation between pre-I-sequentially open and pre-I-sequential space. Moreover, we define and study some basic properties of preserving pre-I-convergence functions and pre-I-covering functions, furthermore we prove some relations with pre-I-irresolute functions. Besides, the idea of pre-I-Fréchet-Urysohn spaces is defined.

Throughout this paper, the terms (X, τ) and (Y, σ) means topological spaces on which no separation axioms are assumed unless otherwise mentioned. Additionally, we sometimes write X or Y instead of (X, τ) or (Y, σ), respectively. By other hand, $|A|$ will denote the cardinality of set A.

2 pre-I-convergence

We first introduce some definitions.

Definition 2.1. Let (X, τ) be a topological space, $A \subset X$ and $x \in X$. Then, A is said to be pre-neighbourhood of x if and only if there exits a a pre-open set B such that $x \in B \subset A$.

Definition 2.2. An ideal $I \subseteq \mathbb{N}$ is said to be non-trivial, if $I = \varnothing$ and $I \neq \mathbb{N}$. A non-trivial ideal $I \subseteq K$ is called admissible if $I \supseteq \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$.

Definition 2.3. Let I be an ideal on $\mathbb{N}$ and X be a topological space. A sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is called pre-I-convergent to a point $x \in X$, provided for any pre-neighbourhood V of x, it has $A_V = \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin V\} \in I$, which is denoted by p-I-$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ or $x_n \to^{pI} x$ and the point x is called the p-I-limit of the sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition 2.4. Let (X, τ) be a topological space and $A \subset X$. Then, A is called pre-I-sequentially open if and only if no sequence in $X - A$ has a pre-I-limit in A. i.e. sequence can not pre-I-converge out of a pre-I-sequentially closed set.

Definition 2.5. Let I be an ideal on $\mathbb{N}$ and X be a topological space, then

1. A subset J of X is said to be pre-I-closed if for each sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq J$ with $x_n \to^{pI} x \in X$, then $x \in J$.

2. A subset V of X is said to be pre-I-open if $X - V$ is pre-I-closed.

3. X is said to be a pre-I-sequential space if each pre-I-closed set in X is closed.

Definition 2.6. Let (X, τ) be a topological space. Then, X is pre-I-sequential when any set A is pre-open if and only if it is pre-I-sequentially open.

Now, we show some results.

Lemma 2.1 (cf. [7])**.** *Let I be an ideal on $\mathbb{N}$ and X be a topological space. If a sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ I-converges to a point $x \in X$ and $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence in X with $\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\} \in I$, then the sequence $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ I-converges to $x \in X$*

Lemma 2.2 (cf. [7])**.** *Let $I \subseteq J$ be two ideals of $\mathbb{N}$. If $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence in a topological space X such that $x_n \to^I x$, then $x_n \to^J x$.*

Lemma 2.3. *Let (X, τ) be a topological space. Then, $B \subset X$ is pre-I-sequentially open if and only if every sequence with pre-I-limit in B has all but finitely many terms in B. Where the index set of the part in B of the sequence does not belong to I.*

Proof. Suppose that B is not a pre-I-sequentially open, then there is a sequence with terms in $X - B$, but pre-I-limit in B. Conversely, suppose that $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence with infinitely many terms in $X - B$ such that pre-I-converges to $y \in B$ and the index set of the part in B of the sequence does not belong to I. Then, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ has a subsequence in $X - B$ that has to still converges to $y \in B$ and so B is not pre-I-sequentially open. $\square$

Lemma 2.4. *Let I and J be two ideals of $\mathbb{N}$ where $I \subseteq J$ and X is a topological space. If $V \subseteq X$ is pre-J-open, then it is pre-I-open.*

Proof. Let $V \subseteq X$ be pre-I-open. Then, $X - V$ is pre-I-closed set, so every sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $X - V$ with $x_n \to^{pI} x$, hold that $x_n \to^{pJ} x$, by Lemma 2.2. So, $x \in X - V$ and therefore, V is pre-J-open. $\square$

Corollary 2.1. *Let I and J be two ideals of $\mathbb{N}$, where $I \subseteq J$. If a topological space X is pre-I-sequential, then it is pre-J-sequential.*

Lemma 2.5. *Let I be an ideal on $\mathbb{N}$ and X be a topological space. If a sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pre-I-convergent to a point $x \in X$ and $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence in X with $\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\} \in I$, then the sequence $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pre-I-convergent to $x \in X$.*

Proof. The proof is followed by the Lemma 2.1 and Definition 2.3. $\square$

Lemma 2.6. *Let X be a topological space X, $A \subset X$ and I be an ideal on $\mathbb{N}$. Then, the following statements are equivalent.*

1. *A is pre-I-open.*
2. *$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in A\} \notin I$ for each sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X with $x_n \to^{pI} x \in A$.*
3. *$|\{n \in \mathbb{N} : x_n \in A\}| = \theta$ for each sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X with $x_n \to^{pI} x \in A$.*

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) : Suppose that A is a pre-I-open set of X and let $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence in X satisfying $x_n \to^{pI} x \in A$. Now, take $N_0 = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in A\}$. If $N_0 \in I$, then $N_0 \neq \mathbb{N}$ and so $A \neq X$. Now, take a point $a \in X - A$ and define the sequence $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X by

$$y_n = \begin{cases} a & \text{if} \quad n \in N_0 \\ x_n & \text{if} \quad n \notin N_0 \end{cases}.$$

By Lemma 2.5, the sequence $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pre-I-converges to x. We can see that $X - A$ is pre-I-closed and $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X - A$, in consequence $x \in X - A$ and this is a contradiction. Therefore, $N_0 \notin I$.

The implication (2) $\Rightarrow$ (3) it follows form the notion that the ideal I is admissible.

Now, it shows the following implication. (3) $\Rightarrow$ (1) : Let A not be pre-I-open in X. Then, $X - A$ is no pre-I-closed and there is a sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X - A$ with $x_n \to^{pI} x \in A$ and this is a contradiction. $\square$

Theorem 2.1. *Every pre-I-sequential space is hereditary with respect to pre-I-open (pre-I-closed) subspaces.*

Proof. Let X be a pre-I-sequential space. Now, suppose that A is a pre-I-open set of X. Then, A is pre-open in X. Now, we can see that A is pre-I-sequential. Let V be a pre-I-open set in A, thus V is pre-open in X. Indeed, by the Definition 2.6, if we show that V is pre-I-open in X, it will be sufficient.

Now, suppose that there is a point $y \in X - V$ and take an arbitrary $x \in V$ and a sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ with $x_n \to^{pI} x$ in X. Since, A is pre-open in X and $x \in A$, the set $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin A\} \in I$. We define the sequence $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X by

$$y_n = \begin{cases} x_n & \text{if} \quad x_n \in A \\ y & \text{if} \quad x_n \notin A \end{cases}.$$

By the Lemma 2.5, the sequence $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pre-I-converges to x. Since $|\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin V\}| = |\{n \in \mathbb{N} : y_n \notin V\}|$ and by the Lemma 2.6, V is pre-I-open in X.

Now, let A be a pre-I-closed set of X. Then, A is pre-closed in X. For any pre-I-closed set J of A. It has to show that J is pre-closed in X. Since X is a pre-I-sequential space, it is enough that J is pre-I-closed in X. Hence, let $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be an arbitrary sequence in J with $x_n \to^{pI} x \in X$. It obtains that $x \in J$. Indeed, since A is pre-closed, it has that $x \in A$ and so $x \in J$ since J is a pre-I-closed set of A. □

Theorem 2.2. *pre-I-sequential spaces are preserved by topological sums.*

Proof. Let $\{X_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ be a family of pre-I-sequential spaces. Take $X = \bigoplus_{\delta\in\Delta} X_\delta$, being the topological sum of $\{X_\delta\}_{\delta\in\Delta}$. Now, it will show that the topological sum is a pre-I-sequential space. Let J be a pre-I-closed set in X. For each $\delta \in \Delta$, since X_δ is pre-closed in X, $J \cap X_\delta$ is pre-I-closed in X. We can see that $J \cap X_\delta \subseteq X_\delta$ and $J \cap X_\delta$ is pre-I-closed in X_δ. By the assumption, it has that $J \cap X_\delta$ is pre-closed in X_δ. By the definition of topological sums, it gets that J is pre-closed in X. Therefore, the topological sum X is a pre-I-sequential space. □

Remark 2.1. The union of a family of pre-I-open sets of a topological space is pre-I-open. Therefore, the intersection of finitely many sequentially pre-I-open sets is sequentially pre-I-open

Definition 2.7 (cf. [7])**.** Let I be an ideal on $\mathbb{N}$ and A be a subset of a topological space X. A sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X is I-eventually in A if there is $B \in I$ such that, for all $n \in \mathbb{N} - B$, $x_n \in A$.

Proposition 2.1. *Let I be a maximal ideal on $\mathbb{N}$ and X be a topological space. Then, A is a subset of X where A is pre-I-open if and only if each pre-I-convergent sequence in X, converging to a point of A is I-eventually in A.*

Proof. Let A be a pre-I-open and $x_n \to^{pI} x \in A$. Since I is maximal, by the Lemma 2.6, $B = \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin A\} \in I$. Therefore, for each $n \in \mathbb{N} - B, x_n \in A$, i.e., the sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is I-eventually in A. □

Theorem 2.3. *Let I be a maximal ideal of $\mathbb{N}$ and X be a topological space. If V, W are two pre-I-open sets of X, then $V \cap W$ is pre-I-open.*

Proof. It will be shown that every pre-I-convergent sequence converging to a point in $V \cap W$ is I-eventually in it. Let $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence in X such that $x_n \to^{pI} x \in V \cap W$. There are $A, S \in I$ such that for each $n \in \mathbb{N} - A, x_n \in V$ and for each $n \in \mathbb{N} - S, x_n \in W$. Since $A \cup S \in I$ and for each $n \in \mathbb{N} - (A \cup S), x_n \in V \cap W$, therefore $V \cap W$ is a pre-I-open set. □

3 Further properties

3.1 pre-I-irresolute functions

In this part, it is introduced pre-I-irresolute functions and it shows some relations among continuous and pre-I-continuous functions.

Definition 3.1. (cf. [1]). Let $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ be a functions. f is called sequentially continuous provided V is sequentially open in Y, then $f^{-1}(V)$ is sequentially open in X.

Definition 3.2. Let I be an ideal on $\mathbb{N}$, $(X, \tau), (Y, \sigma)$ be a topological spaces and $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ be a function, then.

1. f is said to be preserving pre-I-convergence provided for each sequences $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X with $x_n \to^{pI} x$, the sequence $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ pre-I-converges to $f(x)$.

2. f is said to be pre-I-irresolute if for each pre-I-open V in Y, then $f^{-1}(V)$ is pre-I-open in X (cf. [2]).

Lemma 3.1 (cf. [2])**.** *Every pre-I-irresolute function is pre-I-continuous.*

Theorem 3.1. *Let $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ be a function. If f is continuous, then f preserves pre-I-convergence.*

Proof. Suppose that f is continuous and let $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence in X such that $x_n \to^{pI} x \in X$. Now, let V be an arbitrary semi-neighbourhood of $f(x)$ in Y. Since f is continuous, $f^{-1}(V)$ is a semi-neighbourhood of x. Therefore, it has that $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin f^{-1}(V)\} \in I$. We can see that $\{n \in \mathbb{N} : f(x_n) \notin V\} = \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin f^{-1}(V)\}$. This implies that $\{n \in \mathbb{N} : f(x_n) \notin V\} \in I$. Hence, $f(x_n) \to^{pI} f(x)$. □

Theorem 3.2. *Let $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ be a function. If f preserves pre-I-convergence, then f is pre-I-irresolute.*

Proof. Suppose that f preserves pre-I-convergence and J is an arbitrary pre-I-closed set in Y. Let $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence in $f^{-1}(J)$ such that $x_n \to^{pI} x \in X$ .By the assumption, it has that $f(x_n) \to^{pI} f(x)$. Since $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq J$ and J is pre-I-closed in Y, hence $f(x) \in J$, i.e., $x \in f^{-1}(J)$. Therefore, $f^{-1}(J)$ is pre-I-closed in X and then f is pre-I-irresolute. □

Proposition 3.1. *Let $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ be a function. If f preserves pre-I-convergence, then f is pre-I-continuous.*

Proof. The proof is followed by the Lemma 3.1 and Theorem 3.2. □

Theorem 3.3. *Let I be a maximal ideal on $\mathbb{N}$. Then, a function $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ is pre-I-irresolute if and only if it preserves pre-I-convergent sequences.*

Proof. Assume that f is pre-I-irresolute and a sequence $x_n \to^{pI} x$ in X. It has to show that $f(x_n) \to^{pI} f(x)$ in Y. Now, let V a semi-neighbourhood of $f(x)$. Then, $x \in f^{-1}(V)$ is pre-I-open in X, because V is pre-I-open in Y. Hence, there is $B \in I$ such that for all $n \in \mathbb{N} - B, x_n \in f^{-1}(V)$. This means that for all $n \in \mathbb{N} - B, f(x_n) \in V$. Therefore, $\{n \in \mathbb{N} : f(x_n) \notin V\} \in I$ and hence $f(x_n) \to^{pI} f(x)$. □

Theorem 3.4. *Let X be a pre-I-sequential space and $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ be a function. Then, the following statements are equivalent.*

1. *f is continuous.*
2. *f preserves pre-I-convergence.*
3. *f is pre-I-irresolute.*

Proof. (1) $\Leftrightarrow$ (2) was proved in the Theorems 3.1 and 3.2.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Let f be pre-I-irresolute and J be an arbitrary semi-closed set in Y. Then, J is pre-I-closed in Y. Since f is pre-I-irresolute, $f^{-1}(J)$ is pre-I-closed in X. By assumption, it has that $f^{-1}(J)$ is semi-closed in X. Therefore, f is continuous. □

Proposition 3.2. *Let $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ be a function and X be a pre-I-sequential space. Then, the following statements are equivalent.*

1. *f is continuous.*
2. *f is pre-I-continuous.*

Proof. The proof is followed by the Proposition 3.1 and Theorem 3.4. □

Lemma 3.2. *Let X be a pre-I-sequential space, then the function $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ is continuous if and only if it is sequentially continuous.*

Proof. Let X be a pre-I-sequential space, then every pre-I-closed set is closed, by [1] who proved that f is continuous if and only if f is sequentially continuous, indeed we have completed the proof. □

Corollary 3.1. *Let X be a pre-Isequential space and for a function $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ the following statements are equivalent.*

1. *f is continuous.*
2. *f preserves pre-I-convergence.*
3. *f is pre-I-continuous.*
4. *f is sequentially continuous.*

Proof. (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) was proved in the Theorem 3.4, by the Lemma 3.2, we have (1) $\Leftrightarrow$ (4). □

3.2 pre-I-irresolute and pre-I-covering functions

Continuity and sequentially continuity are ones of the most important tools for studying sequential spaces on [5]. In this part, it is defined the concept of pre-I-covering functions and it is shown some of their properties.

Definition 3.3. (cf. [1]). Let $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ be a topological space. Then, f is said to be sequentially continuous provided $f^{-1}(V)$ is sequentially open in X, then V is sequentially open in Y.

Definition 3.4. (cf. [1]). Let $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ be a topological space. Then, f is said to be sequence-covering if, whenever $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence in Y covering to y in Y, there exits a sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of points $x_n \in f^{-1}(y_n)$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $x \in f^{-1}(y)$ such that $x_n \to x$.

Definition 3.5. Let $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ be a function. Then, f is said to be pre-I-covering if, whenever $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence in Y, pre-I-converging to y in Y, there exits a sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of points $x_n \in f^{-1}(y_n)$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $x \in f^{-1}(y)$ such that $x_n \to^{pI} x$.

Theorem 3.5. *Every pre-I-covering function is pre-I-irresolute.*

Proof. Let $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ be a function and f be a pre-I-covering function. Now, assume that V is a non-pre-I-closed in Y. Then, there exits a sequence $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ such that $y_n \to^{pI} y \notin V$. Since f is pre-I-covering, there exits a sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of points $x_n \in f^{-1}(y_n)$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $x \in f^{-1}(y)$ such that $x_n \to^{pI} x$. Now, we can see that $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq f^{-1}(V)$ and so $x \notin f^{-1}(V)$, therefore $f^{-1}(V)$ is non-pre-I-closed. In conclusion, f is pre-I-irresolute. □

Theorem 3.6. *Let $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ be a function. Then, the following statements hold.*

1. *If X is a pre-I-sequential space and f is continuous, then Y is a pre-I-sequential space and pre-I-irresolute.*

2. *If Y is a pre-Y-sequential space and f is pre-I-irresolute, then f is continuous.*

Proof.

1. Let X be a pre-I-sequential space and f be continuous. Suppose that V is pre-I-open in Y. Since f is a continuous function and X is a pre-I-sequential space, take an arbitrary sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ such that $x_n \to^{pI} x \in f^{-1}(V)$ in X. Since f is a continuous function, by the Theorem 3.1, $f(x_n) \to^{pI} f(x) \in V$. Now, since V is pre-I-open in Y and by the Lemma 2.6, it has that $|\{n \in \mathbb{N} : f(x_n) \in V\}| = \theta$, i.e., $|\{n \in \mathbb{N} : x_n \in f^{-1}(V)\}| = \theta$. Therefore, $f^{-1}(V)$ is pre-I-open in X.

   Now, assume that $V \subseteq Y$ such that $f^{-1}(V)$ is pre-I-open in X. Then, $f^{-1}(V)$ is a open set of X since X is pre-I-sequential space. as well know that f is continuous, then V is open in Y. Hence, f is continuous.

2. Let Y be a pre-I-sequential space and f be pre-I-irresolute. If $f^{-1}(V)$ is a open set of X, then $f^{-1}(V)$ is a pre-I-open set of X. Since f is pre-I-irresolute, V is a pre-I-open set of Y. Now, we know that Y is a pre-I-sequential space and so V is an open set of Y. Therefore, f is continuous.

□

By the Theorems 3.4 and 3.6 it is had the following result.

Corollary 3.2. *Let $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ be a function, then f is continuous if and only if f is pre-I-irresolute and Y is a pre-I-sequential space.*

3.3 pre-I-Fréchet-Urysohn spaces

A topological space X is said to be Fréchet-Urysohn (cf. [3]) if for each $A \subseteq X$ and each $x \in Cl(A)$, there is a sequence in A converging to the point x in X. Now, in this part, it introduces the notion of pre-I-Fréchet-Urysohn and it shows a short result.

Definition 3.6. Let (X, τ) be a topological space. Then, X is said to be pre-I-Fréchet-Urysohn or simply P-I-FU, if for each $A \subseteq X$ and each $x \in pCl(A)$, there exits a sequence in A pre-I-converging to the point $x \in X$.

Lemma 3.3. *For two ideals I and J on $\mathbb{N}$ where $I \subseteq J$, if X is a P-I-FU-space, then it is a pre-J-FU-space.*

Proof. Let A be a subset of X and $x \in pCl(A)$. Since X is a P-I-FU-space, then there exits a sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A such that $x_n \to^{pI} x$, in consequence $x_n \to^{pI} x$ in X, and so X is pre-J-FU-space. □

Theorem 3.7. *Let (X, τ) be a topological space. Then, X is a P-I-FU-space, then X is a pre-I-sequential space.*

Proof. Let $\{A_\delta : \delta \in \Delta\}$ be a family of pre-I-closed subsets of X where $\delta \in \Delta \in X$, since X is a P-I-FU-space, by the Definition 3.6 $A_\delta \subseteq X$ and each $x \in pCl(A_\delta)$. Now, since A_δ is pre-I-closed $pCl(A_\delta) = A_\delta \in Cl(A)$, but by the Definition 3.6, there exits a pre-I-converging to the point $x \in pCl(A) \in Cl(A) \in X$, therefore $\{A_\delta : \delta \in \Delta\}$ is a closed set of X. In consequence X is a pre-I-sequential space. □

References

[1] Boone, J. and Siwiec, F., Sequentially quotient mappings, *Czechoslov. Math. J.*, **26**(2018), 174–182.

[2] Dontchev, J., Idealization of Ganster-Reily decomposition theorem, http://arxiv.org/abs/Math.GN/9901017, 5 Jan. 1999.

[3] Franklin, S., Spaces in which sequences suffice, *Fund. Math.*, **57**(1965), 107–115.

[4] Kuratowski, K., Topologie, Monogrfie Matematyczne tom 3, PWN-ploish Scientific Publishers, Warszawa, 1933.

[5] Lin, S. and Yun, Z., Generalized metric spaces and mapping, *Atlantis Studies in Mathematics*, **6**(2016).

[6] Mahhour, A, Hassanein, I. and El-Deeb, S., A note on semi-continuity and precontinuity, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **13**(10)(1982), 1119–1123.

[7] Zhou, X. and Lin, S., On topological spaces defined by I-convergence, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 2019.

Divulgaciones Matemáticas Vol. 21, No. 1-2 (2020), pp. 9–20

On characterizations of weakly e^*-continuity

Sobre caracterizaciones de la e^*-continuidad débil

Burcu Sünbül Ayhan (burcu.ayhan@tau.edu.tr)
Turkish-German University
Rectorship Department of Data Processing
34820 Istanbul, Turkey.

Murad Özkoç (murad.ozkoc@mu.edu.tr)
Muğla Sıtkı Koçman University
Faculty of Science Department of Mathematics
48000 Mentese-Muğla, Turkey.

Abstract

The aim of this paper is to investigate some of the fundamental properties of weakly e^*-continuous functions introduced by Ayhan and Özkoç in [3]. Moreover, several characterizations and some properties concerning weakly e^*-continuous functions are obtained. Then, we investigate relationships between weak e^*-continuity and some other types of continuity. Also, we investigate the relationships between weakly e^*-continuous functions and connectedness and graph of functions.

Key words and phrases: e^*-open, weakly e^*-continuity, almost e^*-continuity, faintly e^*-continuity.

Resumen

El objetivo de este trabajo es investigar algunas de las propiedades fundamentales de las funciones e^*-continuas débilmente introducidas por Ayhan y Özkoç en [3]. Además, se obtienen varias caracterizaciones y algunas propiedades relativas a funciones e^*-continuas débilmente. Luego, investigamos las relaciones entre la dbil e^*-continuas débil y algunos otros tipos de continuidad. Además, investigamos las relaciones entre las funciones e^*-continuas débilmente y la conectividad y gráfica de funciones.

Palabras y frases clave: e^*-abierto, e^*-continuidad débil, casi e^*-continuidad, e^*-continuidad ligera.

1 Introduction

One of the most important subjects in mathematics is the notion of continuity. Recently, several studies have been carried out on continuous functions which are indispensable objects of topology. In these studies, the concepts which are both stronger and weaker than the concept of continuity

Received 09/03/2020. Revised 21/06/2020. Accepted 10/10/2020.
MSC (2010): Primary 54C08, 54C10; Secondary 54C05.
Corresponding author: Murad Özkoç

have been introduced and some fundamental results have been obtained. For instance in 1961, the concept of weak continuity is introduced by Levine in [8]. In the following years various weak forms of weak continuity were defined and studied by many mathematicians. The concept of weak e^*-continuity which is defined by Ayhan and Özkoç in [3], weaker than weak e-continuity introduced by Özkoç and Aslım in [12], weak β-continuity introduced by Popa and Noiri in [14], weak b-continuity introduced by Şengül in [15], almost e^*-continuity and weak a-continuity introduced by Ayhan and Özkoç in [3], but stronger than faint e^*-continuity introduced by Jafari and Rajesh in [7]. In this paper, we study weak e^*-continuity via e^*-open sets defined by Ekici in [5].

2 Preliminaries

Throughout this present paper, (X, τ) and (Y, σ) (or simply X and Y) represent topological spaces on which no seperation axioms are assumed. For a subset A of a space X, the closure and the interior of A are denoted by $cl(A)$ and $int(A)$, respectively. The family of all open (resp. closed, clopen) sets of a topological space X will be denoted by $O(X)$ (resp. $C(X)$, $CO(X)$). A subset A of a topological space X is said to be regular open (regular closed) if $A = int(cl(A))$ (resp. $A = cl(int(A))$) (cf. [16]). The family of all regular open (regular closed) of a topological space X is denoted by RO(X) (RC(X)). A point x of X is said to be δ-cluster point of A if $int(cl(U)) \cap A \neq \emptyset$ for each open neighbourhood U of x (cf. [17]). The set of all δ-cluster points of A is called the δ-closure of A and is denoted by $cl_\delta(A)$ (cf. [17]). If $A = cl_\delta(A)$, then A is called δ-closed, and the complement of a δ-closed set is called δ-open (cf. [17]). The set $\{x : \exists\ U \in RO(X) \text{ with } x \in U \subseteq A\}$ (equally $\{x : \exists\ U \in \tau \text{ with } x \in U \text{ and } int(cl(U)) \subseteq A\}$) is called the δ-interior of A and is denoted by $int_\delta(A)$.

A subset A is called a-open (resp. semiopen, preopen, b-open, β-open, e-open, e^*-open) if $A \subseteq int(cl(int_\delta(A)))$ (resp. $A \subseteq cl(int(A))$, $A \subseteq int(cl(A))$, $A \subseteq cl(int(A)) \cup int(cl(A))$, $A \subseteq cl(int(cl(A)))$, $A \subseteq cl(int_\delta(A)) \cup int(cl_\delta(A))$, $A \subseteq cl(int(cl_\delta(A))))$ (cf. [4, 9, 10, 2, 1, 6, 5] respectively). The complement of an a-open (resp. semiopen, preopen, b-open, β-open, e-open, e^*-open) set is called a-closed (resp. semiclosed, preclosed, b-closed, β-closed, e-closed, e^*-closed), see [4, 9, 10, 2, 1, 6, 5] respectively. The intersection of all e^*-closed sets of X containing A is called the e^*-closure of A and is denoted by $e^*\text{-}cl(A)$ (cf. [5]). The union of all e^*-open sets of X contained in A is called the e^*-interior of A and is denoted by $e^*\text{-}int(A)$ (cf. [5]).

A point x of X is called a θ-cluster point of A if $cl(U) \cap A \neq \emptyset$ for every open set U of X containing x (cf. [17]). The set of all θ-cluster points of A is called the θ-closure of A and is denoted by $cl_\theta(A)$ (cf. [17]). Equivalently $cl_\theta(A) = \bigcap\{F : A \subseteq int(F) \text{ and } F \in C(X)\}$. A subset A is said to be θ-closed if $A = cl_\theta(A)$ (cf. [17]). The complement of a θ-closed set is called a θ-open set (cf. [17]). A point x of X said to be a θ-interior point of a subset A, denoted by $int_\theta(A)$, if there exists an open set U of X containing x such that $cl(U) \subseteq A$ (cf. [17]). Equivalently $int_\theta(A) = \bigcup\{U : cl(U) \subseteq A \text{ and } U \in O(X)\}$.

The family of all open (resp. closed, e-open, e-closed, e^*-open, e^*-closed, β-open, β-closed, δ-open, δ-closed, θ-open, θ-closed, semiopen, semiclosed, preopen, preclosed, a-open, a-closed) subsets of X is denoted by $O(X)$ (resp. $C(X)$, $eO(X)$, $eC(X)$, $e^*O(X)$, $e^*C(X)$, $\beta O(X)$, $\beta C(X)$, $\delta O(X)$, $\delta C(X)$, $\theta O(X)$, $\theta C(X)$, $SO(X)$, $SC(X)$, $PO(X)$, $PC(X)$, $aO(X)$, $aC(X)$). The family of all open (resp. closed, e^*-open, e^*-closed, β-open, β-closed, δ-open, δ-closed, θ-open, θ-closed, semiopen, semiclosed, preopen, preclosed, a-open, a-closed) sets of X containing a point x of X is denoted by $O(X, x)$ (resp. $C(X, x)$, $eO(X, x)$, $eC(X, x)$, $e^*O(X, x)$, $e^*C(X, x)$, $\beta O(X, x)$,

$\beta C(X,x)$, $\delta O(X,x)$, $\delta C(X,x)$, $\theta O(X,x)$, $\theta C(X,x)$, $SO(X,x)$, $SC(X,x)$, $PO(X,x)$, $PC(X,x)$, $aO(X,x)$, $aC(X,x)$).

We shall use the well-known accepted language almost in the whole of the proofs of the theorems in this article.

The following basic properties of e^*-closure and e^*-interior are useful in the sequel:

Lemma 2.1 (cf. [5])**.** *Let A be a subset of a space X, then the followings hold:*

1. $e^*\text{-}cl(X \setminus A) = X \setminus e^*\text{-}int(A)$.
2. $x \in e^*\text{-}cl(A)$ *if and only if* $A \cap U \neq \emptyset$ *for every* $U \in e^*O(X,x)$.
3. A *is* $e^*C(X)$ *if and only if* $A = e^*\text{-}cl(A)$.
4. $e^*\text{-}cl(A) \in e^*C(X)$.
5. $e^*\text{-}int(A) = A \cap cl(int(cl_\delta(A)))$.

Lemma 2.2. *Let X be a topological space and $A \subseteq X$. Then the following properties hold:*

1. *If A is an open set in X, then* $cl(A) = cl_\delta(A) = cl_\theta(A)$.
2. $cl_\theta(A) \in C(X)$.

Proof.

1. Let $A \in O(X)$ and $x \in cl_\theta(A)$, then for all $U \in O(X,x)$ is obtained $cl(U) \cap A \neq \emptyset$. Therefore, for all $U \in O(X,x))$ we get that $cl(U \cap A) \supseteq cl(U) \cap A \neq \emptyset$, because $A \in O(X)$. So, for all $U \in O(X,x)$, $U \cap A \neq \emptyset$ and, therefore, $x \in cl(A)$. Then we have
$$cl_\theta(A) \subseteq cl(A) \tag{1}$$
On the other hand, we have always
$$cl(A) \subseteq cl_\delta(A) \subseteq cl_\theta(A) \tag{2}$$
By equations (1) and (2) we get that $cl(A) = cl_\delta(A) = cl_\theta(A)$.
2. It is obvious from the fact that $cl_\theta(A) = \bigcap\{F : A \subseteq int(F) \text{ and } F \in C(X)\}$.

$\square$

Lemma 2.3 (cf. [3])**.** *Let X be a topological space and $A, B \subseteq X$. If A is an a-open set and B is an e^*-open set, then $A \cap B$ is an e^*-open set in X.*

Lemma 2.4 (cf. [13])**.** *Let X and Y two topological spaces and $A \subseteq X$ and $B \subseteq Y$. Then*
$$cl_\delta(A \times B) = cl_\delta(A) \times cl_\delta(B).$$

Definition 2.1. A function $f : X \to Y$ is said to be:

1. δ-continuous if $f^{-1}[V]$ is δ-open in X for each δ-open set V of Y (cf. [11]).
2. β-continuous if for each $x \in X$ and each open set V of Y containing $f(x)$, there exists $U \in \beta O(X,x)$ such that $f[U] \subseteq V$ (cf. [1]).

3. e^*-continuous if for each $x \in X$ and each open set V of Y containing $f(x)$, there exists $U \in e^*O(X,x)$ such that $f[U] \subseteq V$ (cf. [5]).
4. Weakly b-continuous (briefly w.b.c.) if for each $x \in X$ and each open set V of Y containing $f(x)$, there exists $U \in BO(X,x)$ such that $f[U] \subseteq cl(V)$ (cf. [15]).
5. Weakly β-continuous (briefly w.β.c.) if for each $x \in X$ and each open set V of Y containing $f(x)$, there exists $U \in \beta O(X,x)$ such that $f[U] \subseteq cl(V)$ (cf. [14]).
6. Weakly e-continuous (briefly w.e.c.) if for each $x \in X$ and each open set V of Y containing $f(x)$, there exists $U \in eO(X,x)$ such that $f[U] \subseteq cl(V)$ (cf. [12]).
7. Weakly a-continuous (briefly w.a.c.) if for each $x \in X$ and each open set V of Y containing $f(x)$, there exists $U \in aO(X,x)$ such that $f[U] \subseteq cl(V)$ (cf. [3]).
8. Almost e^*-continuous (briefly a.e^*.c.) if for each $x \in X$ and each open set V of Y containing $f(x)$, there exists $U \in e^*O(X,x)$ such that $f[U] \subseteq int(cl(V))$ (cf. [3]).
9. Faintly e^*-continuous (briefly f.e^*.c.) if for each $x \in X$ and each θ-open set V of Y containing $f(x)$, there exists $U \in e^*O(X,x)$ such that $f[U] \subseteq V$ (cf. [3]).

Lemma 2.5 (cf. [11]). *Let $f : X \to Y$ be a function. Then the function is δ-continuous if and only if $f^{-1}[cl_\delta(A)] \subseteq cl_\delta(f^{-1}[A])$ for each subset A of X.*

3 Weakly e^*-continuous functions

Definition 3.1. Let X and Y be topological spaces. $f : X \to Y$ is a weakly e^*-continuous (briefly w.e^*.c.) at $x \in X$ if for each open set V containing $f(x)$, there exists an e^*-open set U in X containing x such that $f[U] \subseteq cl(V)$ (cf. [3]). The function f is w.e^*.c. if and only if f is w.e^*.c. for all $x \in X$.

Remark 3.1. From Definition 3.1 and Definition 2.1, we have the following diagram. The converses of these implications are not true in general, as shown in the following examples. Also, examples for the other implications are shown in the related papers.

$$\begin{array}{ccccc}
\text{weakly } b\text{-continuity} & \longrightarrow & \text{weakly } \beta\text{-continuity} & \longleftarrow & \beta\text{-continuity} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
\text{weakly } e\text{-continuity} & \longrightarrow & \text{weakly } e^*\text{-continuity} & \longleftarrow & e^*\text{-continuity} \\
 & \nearrow & \downarrow & \nwarrow & \\
\text{almost } e^*\text{-continuity} & & \text{faintly } e^*\text{-continuity} & & \text{weakly } a\text{-continuity}
\end{array}$$

Examples 3.1.

1. Let $X = \{a,b,c,d\}$ and $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$. It is not difficult to see $e^*O(X) = 2^X \setminus \{\{d\}\}$. Define the function $f : X \to X$ by $f = \{(a,d),(b,b),(c,c),(d,a)\}$. Then f is weakly e^*-continuous but it is not e^*-continuous.
2. Let $X = \{a,b,c,d\}$ and $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$. It is not difficult to see $eO(X) = 2^X \setminus \{\{d\}, \{a,d\}, \{c,d\}\}$ and $e^*O(X) = 2^X \setminus \{\{d\}\}$. Define the function $f : X \to X$ by $f = \{(a,b),(b,a),(c,c),(d,d)\}$. Then f is faintly e^*-continuous but it is not weakly e^*-continuous.

3. Let $X = \{a, b, c, d\}$ and $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$. It is not difficult to see $eO(X) = 2^X \setminus \{\{d\}, \{a, d\}, \{c, d\}\}$ and $e^*O(X) = 2^X \setminus \{\{d\}\}$. Define the function $f : X \to X$ by $f = \{(a, d), (b, b), (c, c), (d, a)\}$. Then f is weakly e^*-continuous but it is not weakly e-continuous.

4. Let $X = \{a, b, c, d\}$ and $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$. It is not difficult to see $\beta O(X) = 2^X \setminus \{\{c\}, \{d\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$ and $e^*O(X) = 2^X$. Define the function $f : X \to X$ by $f = \{(a, d), (b, b), (c, c), (d, a)\}$. Then f is weakly e^*-continuous but it is not weakly β-continuous.

Theorem 3.1. *The following properties are equivalent for a function $f : X \to Y$:*

1. *f is weakly e^*-continuous at $x \in X$.*
2. *For each neighbourhood V of $f(x)$, $x \in cl(int(cl_\delta(f^{-1}[cl(V)])))$.*
3. *For each neighbourhood V of $f(x)$ and each neighbourhood U of x, there exists a nonempty open set $G \subseteq U$ such that $G \subseteq cl_\delta(f^{-1}[cl(V)])$.*
4. *For each neighbourhood V of $f(x)$, there exists $U \in SO(X, x)$ such that $U \subseteq cl_\delta(f^{-1}[cl(V)])$.*

Proof.

$\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ Let $V \in O(Y, f(x))$. By item *1.* we get that there exists $U \in e^*O(X, x)$ such that $f[U] \subseteq cl(V)$. So, there exists $U \in e^*O(X, x)$ such that $U \subseteq f^{-1}[cl(V)]$. Then, there exists $U \in e^*O(X, x)$ such that $U \subseteq cl(int(cl_\delta(U))) \subseteq cl(int(cl_\delta(f^{-1}[cl(V)])))$. Therefore $x \in cl(int(cl_\delta(f^{-1}[cl(V)])))$.

$\boxed{2. \Rightarrow 3.}$ Let $V \in O(Y, f(x))$, then $x \in cl(int(cl_\delta(f^{-1}[cl(V)])))$, by item *2.*. Now, let $U \in O(X, x)$, then $x \in U \cap cl(int(cl_\delta(f^{-1}[cl(V)])))$. So, $U \cap cl(int(cl_\delta(f^{-1}[cl(V)]))) \neq \emptyset$ and, therefore, $cl\left(U \cap int(cl_\delta(f^{-1}[cl(V)]))\right) \neq \emptyset$. This implies that $U \cap int(cl_\delta(f^{-1}[cl(V)])) \neq \emptyset$. Define now $G := U \cap int(cl_\delta(f^{-1}[cl(V)]))$, then $G \in \tau \setminus \{\emptyset\}$, $G \subseteq U$ and

$$G \subseteq int(cl_\delta(f^{-1}[cl(V)])) \subseteq cl_\delta(f^{-1}[cl(V)]).$$

$\boxed{3. \Rightarrow 4.}$ Let $V \in O(Y, f(x))$ and $U \in O(X, x)$, then by item *3.* we get there exists $G_U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ such that $G_U \subseteq U$ and $G_U \subseteq cl_\delta(f^{-1}[cl(V)])$. Define now $G := \bigcup\{G_U | U \in O(X, x)\}$, then $G \in \tau$, $x \in cl(G)$ and $G \subseteq cl_\delta(f^{-1}[cl(V)])$. Also, defining $U_0 := G \cup \{x\}$, we get that $G \subseteq U_0 \subseteq cl(G)$ and $U_0 \subseteq cl_\delta(f^{-1}[cl(V)])$. Therefore $U_0 \in SO(X, x)$ and $U_0 \subseteq cl_\delta(f^{-1}[cl(V)])$.

$\boxed{4. \Rightarrow 1.}$ Let $V \in O(Y, f(x))$. By item *4.* we get that $x \in f^{-1}[V]$ and there exists $G \in SO(X, x)$ such that $G \subseteq cl_\delta(f^{-1}[cl(V)])$ and, therefore

$$x \in f^{-1}[V] \cap G \subseteq f^{-1}[cl(V)] \cap cl(int(G)) \subseteq f^{-1}[cl(V)] \cap cl(int(cl_\delta(f^{-1}[cl(V)])))$$

Now defining $U := e^*\text{-}int(f^{-1}[cl(V)]) = f^{-1}[cl(V)] \cap cl(int(cl_\delta(f^{-1}[cl(V)])))$, then $U \in e^*O(X, x)$ and $f[U] \subseteq cl(V)$. $\square$

Theorem 3.2. *The following properties are equivalent for a function $f : X \to Y$:*

1. *f is weakly e^*-continuous.*
2. *e^*-$cl(f^{-1}[int(cl(B))]) \subseteq f^{-1}[cl(B)]$ for every subset B of Y.*

3. e^*-$cl(f^{-1}[int(F)]) \subseteq f^{-1}[F]$ *for every regular closed set* F *of* Y.
4. $f^{-1}[B] \subseteq e^*$-$int(f^{-1}[cl(B)])$ *for every regular open set* B *of* Y.
5. e^*-$cl(f^{-1}[V]) \subseteq f^{-1}[cl(V)]$ *for every open set* V *of* Y.
6. $f^{-1}[int(F)] \subseteq e^*$-$int(f^{-1}[F])$ *for every closed set* F *of* Y.
7. $f^{-1}[V] \subseteq e^*$-$int(f^{-1}[cl(V)])$ *for every open set* V *of* Y.
8. e^*-$cl(f^{-1}[int(F)]) \subseteq f^{-1}[F]$ *for every closed set* F *of* Y.
9. $f^{-1}[V] \subseteq cl(int(cl_\delta(f^{-1}[cl(V)])))$ *for every open set* V *of* Y.
10. $int(cl(int_\delta(f^{-1}[int(F)]))) \subseteq f^{-1}[F]$ *for every closed set* F *of* Y.

Proof.

$\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ Let $B \subseteq Y$ and $x \notin f^{-1}[cl(B)]$, then $f(x) \notin cl(B)$ and there exists $V \in O(Y, f(x))$ such that $V \cap B = \emptyset$. So, there exists $V \in O(Y, f(x))$ such that $cl(V) \cap int(cl(B)) = \emptyset$. Also, by item *1.*, there exists $U \in e^*O(X, x)$ such that $f[U] \cap int(cl(B)) \subseteq cl(V) \cap int(cl(B))$. So, there exists $U \in e^*O(X, x)$ such that $U \cap f^{-1}[int(cl(B))] = \emptyset$ and, therefore $x \notin e^*$-$cl(f^{-1}[int(cl(B))]$.

$\boxed{2. \Rightarrow 3.}$ Let $F \in RC(Y)$, then $F \in C(Y)$ and therefore $F = cl(F)$. Now, by item *2.*, we get

$$e^*\text{-}cl(f^{-1}[int(F)]) = e^*\text{-}cl(f^{-1}[int(cl(F))]) \subseteq f^{-1}[cl(F)] = f^{-1}[F].$$

$\boxed{3. \Rightarrow 4.}$ Straightforward.

$\boxed{4. \Rightarrow 5.}$ Let $V \in O(Y)$, therefore $Y \setminus cl(V) \in RO(Y)$. So, by item *4.*, we get

$$f^{-1}[Y \setminus cl(V)] \subseteq e^*\text{-}int(f^{-1}[cl(Y \setminus cl(V))])$$

Then, $X \setminus f^{-1}[cl(V)] \subseteq X \setminus e^*$-$cl(f^{-1}[int(cl(V))])$ and, therefore

$$e^*\text{-}cl(f^{-1}[V]) \subseteq e^*\text{-}cl(f^{-1}[int(cl(V))]) \subseteq f^{-1}[cl(V)].$$

$\boxed{5. \Rightarrow 6.}$ Straightforward.

$\boxed{6. \Rightarrow 7.}$ Let $V \in O(Y)$, then $cl(V) \in C(Y)$. So, by item *6.*, we get

$$f^{-1}[V] \subseteq f^{-1}[int(cl(V))] \subseteq e^*\text{-}int(f^{-1}[cl(V)]).$$

$\boxed{7. \Rightarrow 8.}$ Straightforward.

$\boxed{8. \Rightarrow 9.}$ Let $V \in O(Y)$, then $Y \setminus V \in C(Y)$. So, by item *8.*, we get that

$$e^*\text{-}cl(f^{-1}[int(Y \setminus V)]) \subseteq f^{-1}[Y \setminus V]$$

Then, $X \setminus e^*$-$int(f^{-1}[cl(V)]) \subseteq X \setminus f^{-1}[V]$ and

$$f^{-1}[V] \subseteq e^*\text{-}int(f^{-1}[cl(V)]) = f^{-1}[cl(V)] \cap cl(int(cl_\delta(f^{-1}[cl(V)])))$$

Therefore, $f^{-1}[V] \subseteq cl(int(cl_\delta(f^{-1}[cl(V)])))$.

$\boxed{9. \Rightarrow 10.}$ Straightforward.

$\boxed{10. \Rightarrow 1.}$ Let $x \in X$ and $V \in O(Y, f(x))$, then $Y \setminus V \in C(Y)$ and $x \in f^{-1}[V]$. Now, by item *10.*, we get that $int(cl(int_\delta(f^{-1}[int(Y \setminus V)]))) \subseteq f^{-1}[Y \setminus V]$. So, $f^{-1}[V] \subseteq cl(int(cl_\delta(f^{-1}[cl(V)])))$ and, therefore, $x \in cl(int(cl_\delta(f^{-1}[cl(V)])))$. □

Theorem 3.3. *The following properties are equivalent for a function $f : X \to Y$:*

1. *f is weakly e^*-continuous.*
2. *e^*-$cl(f^{-1}[V]) \subseteq f^{-1}[cl(V)]$ for each $V \in PO(Y)$.*
3. *$f^{-1}[int(F)] \subseteq e^*$-$int(f^{-1}[F])$ for each $F \in PC(Y)$.*
4. *$f^{-1}[V] \subseteq e^*$-$int(f^{-1}[cl(V)])$ for each $V \in PO(Y)$.*
5. *e^*-$cl(f^{-1}[int(F)]) \subseteq f^{-1}[F]$ for each $F \in PC(Y)$.*

Proof.

$\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ Let $V \in PO(Y)$ and $x \notin f^{-1}[cl(V)]$, then $f(x) \notin cl(V)$ and there exists $W \in O(Y, f(x))$ such that $V \cap W = \emptyset$. So,

$$\begin{aligned} V \cap cl(W) &\subseteq int(cl(V)) \cap cl(W) \subseteq cl[int(cl(V)) \cap W] = cl[int(cl(V) \cap W)] \\ &\subseteq cl(int(cl(V \cap W))) \subseteq cl(V \cap W) = \emptyset \end{aligned}$$

By item *1.*, we get that there exists $U \in e^*O(X, x)$ such that $V \cap f[U] \subseteq V \cap cl(W)$. So, there exists $U \in e^*O(X, x)$ such that $f^{-1}[V] \cap U = \emptyset$ and, therefore, $x \notin e^*$-$cl(f^{-1}[V])$.

$\boxed{2. \Rightarrow 3.}$ Straightforward.

$\boxed{3. \Rightarrow 4.}$ Let $V \in PO(Y)$, then $cl(V) \in PC(Y)$ and $V \subseteq int(cl(V))$. Now, by item *3.*

$$f^{-1}[V] \subseteq f^{-1}[int(cl(V))] \subseteq e^*\text{-}int(f^{-1}[cl(V)]).$$

$\boxed{4. \Rightarrow 5.}$ Straightforward.

$\boxed{5. \Rightarrow 1.}$ This follows from item *6.* of Theorem 3.2, since every closed set is preclosed. □

Theorem 3.4. *The following properties are equivalent for a function $f : X \to Y$:*

1. *f is weakly e^*-continuous.*
2. *$f[e^*$-$cl(A)] \subseteq cl_\theta(f[A])$ for each subset A of X.*
3. *e^*-$cl(f^{-1}[B]) \subseteq f^{-1}[cl_\theta(B)]$ for each subset B of Y.*
4. *e^*-$cl(f^{-1}[int(cl_\theta(B))]) \subseteq f^{-1}[cl_\theta(B)]$ for each subset B of Y.*

Proof.

$\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ Let $A \subseteq X$, $x \in e^*$-$cl(A)$ and $V \in O(Y, f(x))$. By item *1.*, we get that there exists $U \in e^*O(X, x)$ such that $f[U] \subseteq cl(V)$. So, $U \cap A \neq \emptyset$ and $\emptyset \neq f[U] \cap f[A] \subseteq cl(V) \cap f[A]$. Therefore, $cl(V) \cap f[A] \neq \emptyset$. Then we have $f(x) \in cl_\theta(f[A])$.

$\boxed{2. \Rightarrow 3.}$ Let $B \subseteq Y$, so $f^{-1}[B] \subseteq X$. By item *2.*, we get that

$$f[e^*\text{-}cl(f^{-1}[B])] \subseteq cl_\theta(f[f^{-1}[B]]) \subseteq cl_\theta(B)$$

Then, $e^*\text{-}cl(f^{-1}[B]) \subseteq f^{-1}[cl_\theta(B)]$.

$\boxed{3. \Rightarrow 4.}$ Let $B \subseteq Y$, then $int(cl_\theta(B)) \subseteq Y$. By item *3.* we get that

$$\begin{aligned} e^*\text{-}cl(f^{-1}[int(cl_\theta(B))]) &\subseteq f^{-1}[cl_\theta(int(cl_\theta(B)))] \\ &\overset{\text{Lemma 2.2(1)}}{=} f^{-1}[cl(int(cl_\theta(B)))] \\ &\overset{\text{Lemma 2.2(2)}}{\subseteq} f^{-1}[cl_\theta(B)]. \end{aligned}$$

$\boxed{4. \Rightarrow 1.}$ It is obvious from item *7.* from Theorem 3.2. □

Corollary 3.1. *Let $f : X \to Y$ be a function. If f is $w.e^*.c.$, then $f^{-1}[V]$ is e^*-closed in X for every θ-closed set V of Y.*

Proof. Let $V \in \theta C(Y)$, then $cl_\theta(V) = V$. Since f is $w.e^*.c.$ and, taking into consideration the item *3.* from Theorem 3.4, we get that $e^*\text{-}cl(f^{-1}[V]) \subseteq f^{-1}[cl_\theta(V)] = f^{-1}[V]$ and, therefore, $f^{-1}[V] \in e^*C(X)$. □

Corollary 3.2. *Let $f : X \to Y$ be a function. If $f^{-1}[cl_\theta(B)]$ is e^*-closed in X for every subset B of Y, then f is $w.e^*.c.$*

Proof. Let $B \subseteq Y$, by hypothesis we get that $f^{-1}[cl_\theta(B)] \in e^*C(X)$. So,

$$e^*\text{-}cl(f^{-1}[B]) \subseteq e^*\text{-}cl(f^{-1}[cl_\theta(B)]) = f^{-1}[cl_\theta(B)]$$

Then f is $w.e^*.c.$ by item *3.* from Theorem 3.4. □

Theorem 3.5. *Let X and Y be two topological spaces, and $f : X \to Y$ a function. If the graph function $g : X \to X \times Y$ of f, defined by $g(x) = (x, f(x))$ for each $x \in X$, is $w.e^*.c.$, then f is $w.e^*.c.$*

Proof. Let $x \in X$ and $V \in O(Y, f(x))$, so $X \times V \in O(X \times Y, g(x))$. Since g is $w.e^*.c.$, then there exists $U \in e^*O(X, x)$ such that $g[U] \subseteq cl(X \times V) = X \times cl(V)$ and, therefore, there exists $U \in e^*O(X, x)$ such that $f[U] \subseteq cl(V)$. □

Corollary 3.3. *If in addition X is regular, then the converse of Theorem 3.5 is true.*

Proof. Let $x \in X$ and $W \in O(X \times Y, g(x))$, then there exists $U_1 \in O(X)$ and $V \in O(Y)$ such that $g(x) \in U_1 \times V \subseteq W$. Since f is $w.e^*.c.$, then there exists $U_2 \in e^*O(X, x)$ such that $f[U_2] \subseteq cl(V)$. By the other hand, X is regular and, therefore, $O(X) = \delta O(X) \subseteq aO(X)$. Now, taking into consideration the Lemma 2.3 and defining $U := U_1 \cap U_2 \in e^*O(X, x)$, we get that $g[U] \subseteq cl(W)$. □

4 Some fundamental properties

Lemma 4.1. *If $f : X \to Y$ is w.e*.c. and $g : Y \to Z$ is continuous, then the composition $g \circ f : X \to Z$ is w.e*.c.*

Proof. Let $x \in X$ and $W \in O(Z, g \circ f(x))$. Since g is continuous, then $g^{-1}[W] \in O(Y, f(x))$. Now, since f is $w.e^*.c.$, we get that there exists $U \in e^*O(X, x)$ such that

$$(g \circ f)[U] \subseteq g[cl(g^{-1}[W])] \subseteq cl(W).$$

□

Lemma 4.2. *Let $f : X \to Y$ be an open δ-continuous surjection and $g : Y \to Z$ a function. If $g \circ f : X \to Z$ is w.e*.c., then g is w.e*.c.*

Proof. Let $V \in O(Z)$. Since $g \circ f$ is $w.e^*.c.$, and taking into consideration the item *1.* from Theorem 3.2, we get that

$$(g \circ f)^{-1}[V] \subseteq cl(int(cl_\delta((g \circ f)^{-1}[cl(V)]))) = cl(int(cl_\delta(f^{-1}[g^{-1}[cl(V)]])))$$

Since f is δ-continuous, and taking account the Lemma 2.5, we obtain that

$$(g \circ f)^{-1}[V] = f^{-1}[g^{-1}[V]] \subseteq cl(int(f^{-1}[cl_\delta(g^{-1}[cl(V)])]))$$

Now, since f is surjection, we get that

$$\begin{aligned} g^{-1}[V] &\subseteq f[cl(int(f^{-1}[cl_\delta(g^{-1}[cl(V)])]))] \\ &\overset{\text{Lemma 2.2(1)}}{=} f[cl_\delta(int(f^{-1}[cl_\delta(g^{-1}[cl(V)])]))] \\ &\overset{f \text{ is } \delta\text{-con.}}{\subseteq} cl_\delta(f[int(f^{-1}[cl_\delta(g^{-1}[cl(V)])])]) \\ &\overset{f \text{ is open}}{\subseteq} cl_\delta(int(f[f^{-1}[cl_\delta(g^{-1}[cl(V)])]])) \\ &\overset{f \text{ is surjection}}{=} cl_\delta(int(cl_\delta(g^{-1}[cl(V)]))) \\ &\overset{\text{Lemma 2.2(1)}}{=} cl(int(cl_\delta(g^{-1}[cl(V)]))). \end{aligned}$$

Then g is $w.e^*.c.$ by item *1.* from Theorem 3.2. □

Let $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ and $\{Y_\alpha : \alpha \in I\}$ be any two families of topological spaces with the same index set I. The product space of $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ (resp. $\{Y_\alpha : \alpha \in I\}$) is simply denoted by $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ (resp. $\prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$). Let $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ be a function for each $\alpha \in I$. Let $f : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \to \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ be the product function defined as follows: $f(\{x_\alpha\}) = \{f_\alpha(x_\alpha)\}$ for each $\{x_\alpha\} \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. The natural projection of $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ (resp. $\prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$) onto X_β (resp. Y_β) is denoted by $p_\beta : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \to X_\beta$ (resp. $q_\beta : \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha \to Y_\beta$).

Lemma 4.3. *Let A_α be a subset of X_α for each $\alpha \in I$ and $A = \prod_{i=1}^{n} A_{\alpha_i} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_i}^{n} X_\alpha$ a nonempty subset of $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, where n is a positive integer. Then $A \in e^*O\left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha\right)$ if and only if $A_{\alpha_i} \in e^*O(X_{\alpha_i})$ for each $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Proof. Let $\alpha \in I$ and $A = \prod_{i=1}^{n} A_{\alpha_i} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_i}^{n} X_\alpha$, then

$$\begin{aligned}
cl(int(cl_\delta(A))) &= cl\left(int\left(cl_\delta\left(\prod_{i=1}^{n} A_{\alpha_i} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_i}^{n} X_\alpha\right)\right)\right) \\
&\overset{\text{Lemma 2.4}}{=} cl\left(int\left[cl_\delta\left(\prod_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}\right) \times cl_\delta\left(\prod_{\alpha \neq \alpha_i}^{n} X_\alpha\right)\right]\right) \\
&= cl\left(int\left[\prod_{i=1}^{n} cl_\delta\left(A_{\alpha_i}\right) \times \prod_{\alpha \neq \alpha_i}^{n} X_\alpha\right]\right) \\
&= cl\left[int\left(\prod_{i=1}^{n} cl_\delta\left(A_{\alpha_i}\right)\right) \times int\left(\prod_{\alpha \neq \alpha_i}^{n} X_\alpha\right)\right] \\
&= cl\left[\prod_{i=1}^{n} int\left(cl_\delta\left(A_{\alpha_i}\right)\right) \times \prod_{\alpha \neq \alpha_i}^{n} X_\alpha\right] \\
&= cl\left(\prod_{i=1}^{n} int\left(cl_\delta\left(A_{\alpha_i}\right)\right)\right) \times cl\left(\prod_{\alpha \neq \alpha_i}^{n} X_\alpha\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} cl\left(int\left(cl_\delta\left(A_{\alpha_i}\right)\right)\right) \times \prod_{\alpha \neq \alpha_i}^{n} X_\alpha
\end{aligned}$$

□

Theorem 4.1. *If $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ is w.e^*.c. for each $\alpha \in I$, then $f : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \to \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ is w.e^*.c.*

Proof. Let $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ and $W \in O(\prod_{\alpha \in I} Y_\alpha, f(x))$, then there exists $J = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subseteq I$. Defining

$$V_\alpha := \begin{cases} V_{\alpha_j} \in O(Y_{\alpha_j}) & , \quad \alpha \in J \\ Y_\alpha & , \quad \alpha \notin J \end{cases}$$

we get that $\prod_{\alpha \in I} V_\alpha \in O(\prod_{\alpha \in I} Y_\alpha, f(x))$ and $\prod_{\alpha \in I} V_\alpha \subseteq W$. Since, for all $\alpha \in I$, f_α is $w.e^*.c.$, then there exists $U_\alpha \in e^*O(X_\alpha, x_\alpha)$ such that $f_\alpha[U_\alpha] \subseteq cl(V_\alpha)$. Now, defining $U := \prod_{j=1}^{n} U_{\alpha_j} \times \prod_{\alpha \notin J} X_\alpha$ and taking into consideration the Lemma 4.3, we get that $U \in e^*O(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, x)$ and, therefore

$$f[U] \subseteq \prod_{j=1}^{n} f_\alpha\left[U_{\alpha_j}\right] \times \prod_{\alpha \notin J} Y_\alpha \subseteq \prod_{j=1}^{n} cl\left(V_{\alpha_j}\right) \times \prod_{\alpha \notin J} Y_\alpha \subseteq cl(W).$$

□

Corollary 4.1. *If in addition* $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ *is regular, then the converse of Theorem 4.1 is true.*

Proof. Let f be $w.e^*.c.$ and $\beta \in I$. Since q_β is continuous, and taking into consideration the Lemma 4.1, we get that $q_\beta \circ f$ is $w.e^*.c.$ Besides, $f_\beta \circ p_\beta = q_\beta \circ f$ and therefore

$$f_\beta \circ p_\beta \text{ is } w.e^*.c. \tag{3}$$

By the other hand $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ is regular, then

$$p_\beta \text{ is continuous} \Leftrightarrow p_\beta \text{ is } \delta\text{-continuous} \tag{4}$$

So, by equations 3 and 4 and taking into consideration the Lemma 4.2, we get that f_β is $w.e^*.c.$ □

Theorem 4.2. *If* $f : X \to Y$ *is* $w.e^*.c.$ *and* $g : X \to Y$ *is* $w.a.c.$ *and* Y *is Urysohn, then the set* $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ *is* e^**-closed in* X.

Proof. Let $x \notin A$, then $f(x) \neq g(x)$. As Y is Urysohn, then there exists $V \in O(Y, f(x))$ and $W \in O(Y, g(x))$ such that $cl(V) \cap cl(W) = \emptyset$. Since f is $w.e^*.c.$ and g is $w.a.c.$, then there exists $G \in e^*O(X, x)$ and $H \in aO(X, x)$ such that $f[G] \cap g[H] \subseteq cl(V) \cap cl(W) = \emptyset$. Now, defining $U := G \cap H$ and taking into consideration the Lemma 2.3, we get that $U \in e^*O(X, x)$ and $f[U] \cap g[U] \subseteq f[G] \cap g[H] = \emptyset$. So, $U \in e^*O(X, x)$ and $U \cap A = \emptyset$. Therefore $x \notin e^*\text{-}cl(A)$. □

Theorem 4.3. *If* $f : X \to Y$ *is a* $w.e^*.c.$ *surjection and* X *is* e^**-connected, then* Y *is connected.*

Proof. Suppose that Y is not connected, then there exists $V, W \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ such that $V \cap W = \emptyset$ and $V \cup W = Y$, therefore $V, W \in CO(X) \setminus \{\emptyset\}$. Since f is $w.e^*.c.$, and taking into consideration the item *7.* from Theorem 3.2, we get that

$$f^{-1}[V] \subseteq e^*\text{-}int(f^{-1}[cl(V)]) = e^*\text{-}int(f^{-1}[V])$$

$$f^{-1}[W] \subseteq e^*\text{-}int(f^{-1}[cl(W)]) = e^*\text{-}int(f^{-1}[W])$$

Also, $f^{-1}[V \cap W] = \emptyset$ and $f^{-1}[V \cup W] = X$. But f is surjection and, therefore, we get that $f^{-1}[V], f^{-1}[W] \in e^*O(X) \setminus \{\emptyset\}$ with

$$f^{-1}\left[V\right] \cap f^{-1}[W\right] = \emptyset \quad \text{and} \quad f^{-1}\left[V\right] \cup f^{-1}[W\right] = X.$$

□

Corollary 4.2. *If* $f : X \to Y$ *is an* $a.e^*.c.$ *surjection and* X *is* e^**-connected, then* Y *is connected.*

Proof. It is obvious from the fact that almost e^*-continuity implies weakly e^*-continuity. □

5 Acknowledgements

This study has been supported by the Scientific Research Project Fund of Muğla Sitki Koçman University under the project number 17/277.

References

[1] Abd El-Monsef, M. E.; El-Deeb, S. N. and Mahmoud, R. A.; β-open sets and β-continuous mappings, *Bull. Fac. Sci. Assiut Univ.*, **12** (1983), 77–90.

[2] Andrijević, D.; On b-open sets, *Mat. Vesnik* **48** (1996), 59–64.

[3] Ayhan, B. S. and Özkoç, M.; Almost e^*-continuous functions and their characterizations, *J. Nonlinear Sci. Appl.* **9** (2016), 6408–6423.

[4] Ekici, E.; On a-open sets, $\mathcal{A}^*$-sets and decompositions of continuity and super-continuity, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **51** (2008), 39–51.

[5] Ekici, E.; On e^*-open sets and $(\mathcal{D},\mathcal{S})^*$-sets, *Math. Morav.* **13**(1) (2009), 29–36.

[6] Ekici, E.; On e-open sets, $\mathcal{DP}^*$-sets and $\mathcal{DPE}^*$-sets and decompositions of continuity, *Arabian J. Sci. Eng.* **33**(2A) (2008), 269–282.

[7] Jafari, S. and Rajesh, N.; On faintly δ-β-continuous functions (submitted).

[8] Levine, N.; A decomposition of continuity in topological spaces, *Amer. Math. Monthly* **68** (1961), 44–46.

[9] Levine, N.; Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, *Amer. Math. Monthly* **70** (1963), 36–41.

[10] Mashhour, A. S.; Abd El-Monsef, M. E. and El-Deeb, S. N.; On precontinuous and weak precontinuous mappings, *Proc. Math. Phys. Soc. Egypt* **53** (1982), 47–53.

[11] Noiri, T.; On δ-continuous functions, *J. Korean Math. Soc.*, **16**(2) (1980), 161–166.

[12] Özkoç, M. and Aslım, G.; On weakly e-continuous functions, *Hacettepe J. Math. Stat.* **40**(6) (2011), 781–791.

[13] Özkoç, M. and Atasever, K. S.; On some forms of e^*-irresoluteness, *J. Linear Topol. Algebra*, **08**(1) (2019), 25–39.

[14] Popa, V. and Noiri, T.; On weakly β-continuous functions, *An. Univ. Timis. Ser. Mat.Inform.* **32**(2A) (1994), 83–92.

[15] Şengül, U.; Weakly b-continuous functions, *Chaos Solitons Fractals* **41** (2009), 1070–1077.

[16] Stone, M. H.; Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans. Amer. Math. Soc.* **41** (1937), 375–381.

[17] Veličko, N. V.; H-closed topological spaces, *Amer. Math. Soc. Transl.* **78**(2) (1968), 103–118.

Divulgaciones Matemáticas Vol. 21, No. 1-2 (2020), pp. 21–32

Best proximity point results for Geraghty p-proximal cyclic quasi-contraction in uniform spaces

Resultado del punto más próximo para una casi-contracción cíclica p-proximal Geraghty en espacio uniformes

Joy Chinyere Umudu (umuduj@unijos.edu.ng)
University of Jos
Jos, Plateau State, Nigeria.

Johnson Olajire Olaleru (jolaleru@unilag.edu.ng)
Adesanmi Alao Mogbademu (amogbademu@unilag.edu.ng)
University of Lagos
Akoka, Lagos State, Nigeria.

Abstract

In this work, we develop Geraghty p-proximal cyclic quasi-contraction in uniform spaces. The existence and uniqueness of best proximity points for these contractions are proved. The main results, apart from the fact that they are new in literature, generalize several other similar results in literature. An illustrative example is given to validate the applicability of the results obtained.

Key words and phrases: Best proximity point, cyclic contraction, Geraghty p-proximal quasi-contraction, Geraghty p-proximal cyclic quasi-contraction, uniform spaces.

Resumen

En este trabajo se desarrolla la cuasi-contracción cíclica p-proximal de Geraghty en espacios uniformes, comprobándose la existencia y unicidad de los mejores puntos de proximidad para estas contracciones. Los principales resultados, además del hecho de que son nuevos en la literatura, generalizan varios otros resultados similares en la literatura. Se da un ejemplo ilustrativo para validar la aplicabilidad de los resultados obtenidos.

Palabras y frases clave: Mejor punto de proximidad, contracción cíclica, cuasi-contracción p-proximal de Geraghty, cuasi-contracción cíclica p-proximal de Geraghty, espacios uniformes.

Received 28/11/2019. Revised 15/01/2020. Accepted 16/10/2020.
MSC (2010): Primary 47H10; Secondary 54H25.
Corresponding author: Joy Chinyere Umudu

1 Introduction

Several problems can be modelled as equations of the form $Tx = x$, where T is a given self-mapping defined on a subset of a metric space, a normed linear space or some suitable spaces. However, if T is a non-self mapping from A to B, then the aforementioned equation does not necessarily admit a solution. In this case, it is appropriate to find an approximate solution x in A such that the error $d(x, Tx)$ is minimum, where d is the distance function. In view of the fact that $d(x, Tx)$ is at least $d(A, B)$, a best proximity point theorem guarantees the global minimization of $d(x, Tx)$ by the requirement that an approximate solution x satisfies the condition $d(x, Tx) = d(A, B)$. Such optimal approximate solutions are called best proximity points of the mapping T. Interestingly, best proximity theorems also serve as a natural generalization of fixed point theorems, for a best proximity point becomes a fixed point if the mapping under consideration is a self mapping, see [18], [20, 21, 26].

In [11], Eldred and Veeramani extended the cyclic contractive condition to the case when $A \cap B$ is empty and proved the existence of best proximity point. For other recent results on cyclic contractive conditions, see [2], [17] and [22]. Basha in [4] established some necessary and sufficient conditions for the existence of best proximity points for proximal contractions and gave some best proximity and convergence results in metric spaces. Mongkolkeha et al. in [19] generalized the results of Basha (cf. [4]) by introducing proximal cyclic contractions in metric spaces and proved existence results for best proximity point of the contraction. Thereafter, Jleli and Samet in [15] introduced the class of proximal quasi-contractive mappings and established best proximity point results for such mappings.

Geraghty in [12] extended the famous Banach Contraction Principle (cf. [3]) by introducing the generalized contraction mapping for self mapping using functions instead of constants. In 2012, Cabellero et al. in [7] generalized Geraghty (cf. [12]) by considering a non-self map and provided sufficient conditions for the existence of a unique best proximity point for Geraghty contractions. For other results on Geraghty contractions see [5, 7, 8, 9, 13, 18, 27].

Further improvement on Banach Contraction Principle include the use of uniform spaces which generalizes the metric space (cf. [10, 14, 23, 24, 26]). Weil in [28] was the first to introduce uniform spaces in terms of a family of pseudometrics and Bourbaki in [6] provided the definition of uniform structure in terms of entourages. Aamri and El Moutawakil in [1] gave some results on common fixed point of some contractive and expansive maps in uniform spaces and further introduced the definition of A-distance and E-distance. Most results in uniform spaces are of self mappings, however not many results of non-self mapping in uniform spaces exist in literature, (cf. [23]). More recent in 2018, a modified class of Hardy-Rogers p-proximal cyclic contraction in uniform spaces was introduced by Olisama et al. in [24] where the best proximity point results for this type of contraction was established.

Inspired by these, we introduce a class of Geraghty p-proximal cyclic quasi-contraction in uniform spaces and establish new best proximity point results for this type of contraction in uniform spaces. An illustrative example is given to demonstrate the usefulness of the established results.

2 Preliminaries

Here are some basic definitions and concepts relating to the main result of this paper.

Definition 2.1. (cf. [6]) A uniform space (X, Γ) is a non-empty set equipped with a uniform structure, which is a family Γ of subsets of Cartesian product $X \times X$, satisfying the following conditions:

(i) If $U \in \Gamma$, then U contains the diagonal $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$.

(ii) If $U \in \Gamma$, then $U^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in U\}$ is also in Γ.

(iii) If $U, V \in \Gamma$, then $U \cap V \in \Gamma$.

(iv) If $U \in \Gamma$, and $V \subseteq X \times X$ which contains U, then $V \in \Gamma$.

(v) If $U \in \Gamma$, then there exists $V \in \Gamma$ such that whenever (x,y) and (y,z) are in V, then (x,z) is in U.

Note that Γ is called the uniform structure or uniformity of X and its elements U and V are called neighbourhoods. A uniform structure Γ defines a unique topology $\tau(\Gamma)$ on X for which the neighbourhoods of $x \in X$ are the sets $V(x) = \{y \in X : (x,y) \in V\}, V \in \Gamma$.

Definition 2.2. (cf. [1]) Let (X, Γ) be a uniform space. A function $p : X \times X \to \Re^+$ is said to be an:

(a) A-distance if for any $V \in \Gamma$, there exists $\delta > 0$ such that if $p(z,x) \leq \delta$ and $p(z,y) \leq \delta$ for some $z \in X$, then $(x,y) \in V$.

(b) E-distance if p is an A-distance and $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y)$, for $x, y, z \in X$.

Definition 2.3. (cf. [1]) Let (X, Γ) be a uniform space and p an A-distance on X.

(a) If $V \in \Gamma$, $(x,y) \in V$ and $(y,x) \in V$, then x and y are said to be V-close, and a sequence $(x_n)_{n=0}^{\infty} \in X$ is a Cauchy sequence for Γ if for any $V \in \Gamma$, there exists $N \geq 1$ such that x_n and x_m are V-close for $n, m \geq N$.

(b) A sequence in X is p-Cauchy if it satisfies the usual metric condition.

(c) X is S-complete if for every p-Cauchy sequence $(x_n)_{n=0}^{\infty} \in X$, there exists $x \in X$ such that $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = 0$. And X is p-Cauchy complete if for every p-Cauchy sequence $(x_n)_{n=0}^{\infty} \in X$, there exists $x \in X$ such that $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ with respect to $\tau(\Gamma)$.

(d) $f : X \times X$ is p-continuous if $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = 0$ implies $\lim_{n\to\infty} p(T(x_n), T(x)) = 0$.

(e) X is said to be p-bounded if $\delta_p(X) = \sup\{p(x,y) : x, y \in X\} < \infty$.

Definition 2.4. (cf. [1]) A uniform space (X, Γ) is said to be Hausdorff if and only if the intersection of all the $V \in \Gamma$ reduces to the diagonal Δ of X. In other words, $(x,y) \in V$ for all $V \in \Gamma$ implies $x = y$.

Let A and B be non-empty subsets of a uniform space (X, Γ) such that p is an E-distance on X.

(i) $A_0 = \{x \in A : p(x,y) = p(A,B) \text{ for some } y \in B\}$.

(ii) $B_0 = \{y \in B : p(x,y) = p(A,B) \text{ for some } x \in A\}$.

(iii) Let $T : A \to B$, a point $x \in A$ is called a best proximity point if $p(x, Tx) = p(A, B)$ where $p(A, B) = \inf\{p(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$.

The following lemma and definition are useful in this work.

Lemma 2.1. *(cf. [25]) Let (X, Γ) be a Hausdorff uniform space and p be an A-distance on X. Let $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ be arbitrary sequences in X and $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$, $(\beta_n)_{n=0}^{\infty}$ be sequences in $\Re^+$ converging to 0. Then, for $x, y, z \in X$, the following holds:*

(a) If $p(x_n, y) \leq \alpha_n$ and $p(x_n, z) \leq \beta_n$ $\forall n \in N$, then $y = z$. In particular, if $p(x, y) = 0$ and $p(x, z) = 0$, then $y = z$.

(b) If $p(x_n, y_n) = p(A, B)$ and $p(x_n, z_n) = p(A, B)$, then $y_n = z_n$, $\forall n \in N$ (cf. [24]).

(c) If $p(x_n, y_n) \leq \alpha_n$ and $p(x_n, z) \leq \beta_n$ $\forall n \in N$, then, $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ converges to z.

(d) If $p(x_n, x_m) \leq \alpha_n$ $\forall m > n$, then $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ is a p-Cauchy sequence in (X, Γ).

Definition 2.5. (cf. [24]) Let A, B be two non-empty subsets of a S-complete Hausdorff uniform space (X, Γ). Suppose $S : A \to B$ is a non self-mapping and $g : A \to A$ is an isometry, then S is said to preserve the isometric distance with respect to g if

$$p(S(g(x)), S(g(y))) = p(S(x), S(y)) \ \forall x, y \in A. \tag{1}$$

3 Main Results

First of all, we introduce the following new concepts.

Let F be the family of all functions $\beta : [0, \infty) \to [0, 1)$ which satisfy the condition

$$\lim_{n\to\infty} \beta(t_n) = 1 \implies \lim_{n\to\infty} t_n = c, \quad c > 0.$$

Note that if $c = 0$ above, the equation reduces to the family of functions defined by Geraghty in [12].

Definition 3.1. Let (A, B) be a pair of non-empty subsets of an S-complete Hausdorff uniform space (X, Γ) such that p is an E-distance on X. A mapping $T : A \to B$ is said to be a Geraghty p-proximal quasi-contraction if there exists $\beta \in F$ such that for all $u, v, x, y \in A$

$$\begin{cases} p(u, T(x)) = p(A, B) \\ p(v, T(y)) = p(A, B) \end{cases} \implies p(u, v) \leq \beta(M_T(x, y)) M_T(x, y), \tag{2}$$

where $M_T(x, y) = \max\{p(x, y);\ p(x, T(x));\ p(y, T(y));\ p(x, T(y));\ p(y, T(x))\}$.

Definition 3.2. Let (A, B) be a pair of non-empty subset of an S-complete Hausdorff uniform space (X, Γ) such that p is an E-distance on X. Suppose $T : A \to B$ and $G : B \to A$ are mappings. The pair (T, G) is said to be a Geraghty p-proximal cyclic quasi-contraction if there exists $\beta \in F$ such that for all $u, x \in A$, and $v, y \in B$

$$\begin{cases} p(u, T(x)) = p(A, B) \\ p(v, G(y)) = p(A, B) \end{cases} \implies p(u, v) \leq \beta(M_T(x, y)) M_T(x, y) + (1 - \beta(M_T(x, y))) p(A, B), \tag{3}$$

where $M_T(x, y) = \max\{p(x, y);\ p(x, T(x));\ p(y, G(y));\ p(x, T(y));\ p(y, T(x))\}$.

Suppose (A, B) are a pair of non-empty subsets of a complete metric space i.e $\Gamma = \{(x, y) \in X^2 : d(x, y) < \epsilon\}$, $\beta(M_T(x, y)) = \alpha$, $\alpha \in [0, 1)$ and $M_T(x, y) = d(x, y)$, then (2) and (3) reduces to the proximal contraction and proximal cyclic contraction maps defined in [4] and [19], respectively.

Moreover, it is easy to see that a self mapping that is a Geraghty proximal quasi-contraction is a Geraghty quasi-contraction. But a non-self Geraghty p-proximal quasi-contraction is not necessarily a Geraghty quasi-contraction map in general sense.

Now, we state and prove the main result.

Theorem 3.1. *Let (X, Γ) be an Hausdorff uniform space and p an E-distance on X. Suppose (A, B) is a pair of non-empty closed subset of the p-bounded and S-complete space (X, Γ) such that A_0, $B_0 \neq \emptyset$. Let $T : A \to B$, $G : B \to A$ and $h : A \cup B \to A \cup B$ satisfy the following conditions:*

(i) T and G are Geraghty p-proximal quasi-contractions,

(ii) h is an isometry,

(iii) the pair (T,G) is a Geraghty p-proximal cyclic quasi-contraction,

(iv) $T(A_0) \subseteq B_0$, $G(B_0) \subseteq A_0$,

(v) $A_0 \subseteq h(A_0)$ and $B_0 \subseteq h(B_0)$.

Then there exist unique points $x \in A$ and $y \in B$ such that

$$p(h(x), T(x)) = p(h(y), G(y)) = p(x, y) = p(A, B).$$

Moreover, for any best proximity point $x_0 \in A_0$, the sequence $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ defined by

$$p(h(x_{n+1}), T(x_n)) = p(A, B), \quad \forall n \geq 0$$

converges to the element $x \in A$.

Similarly, for any best proximity point $y_0 \in B_0$, the sequence $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ defined by

$$p(h(y_{n+1}), G(y_n)) = p(A, B), \quad \forall n \geq 0$$

converges to the element $y \in B$.

Proof. Let $x_0 \in A_0$, since $A_0 \neq \emptyset$ and $T(A_0) \subseteq B_0$, there exists $x_1 \in A_0$ such that $p(x_1, T(x_0)) = p(A, B)$. Also, since $T(x_1) \in B_0$, there exists $x_2 \in A_0$ such that $p(x_2, T(x_1)) = p(A, B)$. Now, we obtain a sequence $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subset A_0$ such that $p(x_{n+1}, T(x_n)) = p(A, B)$ $\forall n \in N$. Since T is a Geraghty p-proximal cyclic quasi-contraction, $\forall n \in N$ we have

$$\begin{aligned} p(x_{n+1}, T(x_n)) &= p(A, B), \\ p(x_n, T(x_{n-1})) &= p(A, B) \end{aligned} \tag{4}$$

and

$$p(x_{n+1}, x_n) \leq \beta(M_T(x_n, x_{n-1}))M_T(x_n, x_{n-1}) + (1 - \beta(M_T(x_n, x_{n-1}))p(A, B),$$

where

$$\begin{aligned} M_T(x_n, x_{n-1}) &= \max\{p(x_n, x_{n-1}); p(x_n, T(x_n)); p(x_{n-1}, T(x_{n-1})); \\ &\quad p(x_n, T(x_{n-1})); p(x_{n-1}, T(x_n))\} \\ &\leq \max\{p(x_n, x_{n-1}); [p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, T(x_n))]; \\ &\quad [p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, T(x_{n-1}))]; p(x_n, T(x_{n-1})); \\ &\quad [p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, T(x_n))]\} \\ &= p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, T(x_n)) \\ &= p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1}) + p(A, B). \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} p(x_{n+1}, x_n) &\leq \beta(M_T(x_n, x_{n-1}))\,[p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1}) + p(A, B)] \\ &\quad + (1 - \beta(M_T(x_n, x_{n-1}))p(A, B). \end{aligned}$$

Note that $p(x_{n+1}, x_n) \leq p(x_n, x_{n-1})$ for all $n \in \mathbb{N}$. Thus, the sequence $(p(x_{n+1}, x_n))_{n=0}^{\infty}$ is positive and decreasing. Since $\beta \in F$, by definition,

$$\lim_{n\to\infty} \beta(M_T(x_n, x_{n-1})) = 1 \implies \lim_{n\to\infty} M_T(x_n, x_{n-1}) = c.$$

Consequently,

$$\lim_{n\to\infty} p(x_{n+1}, x_n) = p(A, B). \tag{5}$$

Next, we show that $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ is a p-Cauchy sequence in the S-complete space X. That is,

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_m) = 0, \quad \text{for any} \quad n, m \in N.$$

Suppose, on the contrary, that $\epsilon = \lim\limits_{m,n\to\infty} p(x_n, x_m) > 0$. Since p is an E-distance, we have

$$\begin{aligned} p(x_n, x_m) &\leq p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{m+1}) + p(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq p(x_n, x_{n+1}) + \beta(M_T(x_n, x_m)M_T(x_n, x_m) + (1 - \beta(M_T(x_n, x_m)))p(A, B) \\ &\quad + p(x_{m+1}, x_m). \end{aligned}$$

But,

$$M_T(x_n, x_m) = \max\{p(x_n, x_m); p(x_n, T(x_n)); p(x_m, T(x_m)); p(x_n, T(x_m)); p(x_m, T(x_n))\}.$$

Taking limits as $m, n \to \infty$, $\lim\limits_{m,n\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$. This is a contradiction. Therefore, the sequence $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ is p-Cauchy in the S-complete space (X, Γ) whose limit is the unique best proximity point of T. Hence, $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ converges to some element $x \in A$.

Similarly, since $G(B_0) \subseteq (A_0)$ and $B_0 \subseteq h(B_0)$, there exists a sequence $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ such that it converges to some element $y \in B$. The pair (T, G) is a Geraghty p-proximal cyclic quasi-contraction, h is an isometry, by Lemma 2.1(b) and so,

$$p(h(x_{n+1}), T(x_n)) = p(h(y_{n+1}), G(y_n)) = p(A, B).$$

Now,

$$\begin{aligned}p(h(x_{n+1}), h(y_{n+1})) &= p(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ &\leq \beta(M_T(x_n, y_n))M_T(x_n, y_n) + (1 - \beta(M_T(x_n, y_n)))p(A, B),\end{aligned} \tag{6}$$

where,

$$M_T(x_n, y_n) = \max\{p(x_n, y_n);\ p(x_n, T(x_n));\ p(y_n, G(y_n));\ p(x_n, G(y_n));\ p(y_n, T(x_n))\}.$$

Using Lemma 2.1(d) and taking limit as $n \to \infty$ in (4) yields:

$$p(x, y) = p(A, B). \tag{7}$$

Thus, $x \in A_0$ and $y \in B_0$. Since $T(A_0) \subseteq B_0$ and $G(B_0) \subseteq A_0$, there exist $h(x) \in A$ and $h(y) \in B$ such that

$$p(h(x), T(x)) = p(A, B) \tag{8}$$

and

$$p(h(y), G(y)) = p(A, B).$$

Thus, from (5) and (6), we get

$$p(x, y) = p(h(x), T(x)) = p(h(y), G(y)) = p(A, B).$$

Next, we prove the uniqueness of x and y. Suppose that there exist $x^* \in A$ and $y^* \in B$ with $x \neq x^*$ and $y \neq y^*$ such that

$$p(h(x^*), T(x^*)) = p(A, B), \tag{9}$$

and

$$p(h(y^*), G(y^*)) = p(A, B). \tag{10}$$

Since h is an isometry, and (T, G) is a Geraghty p-proximal cyclic quasi-contraction, using equations (6), (7) and Lemma 2.1(b) we have,

$$\begin{aligned}p(h(x), h(x^*)) = p(x, x^*) &\leq \beta(M_T(x, x^*))M_T(x, x^*) + (1 - \beta(M_T(x, x^*))p(A, B) \\ &< M_T(x, x^*)\end{aligned} \tag{11}$$

where

$$\begin{aligned}M_T(x, x^*) &= \max\{p(x, x^*);\ p(x,T(x));\ p(x^*, T(x^*));\ p(x, T(x^*));\ p(x^*, T(x)) \\ &= \max\{p(x, x^*);\ p(A, B)\}.\end{aligned}$$

Inequality (11) either gives $p(x, x^*) < p(x, x^*)$ or $p(x, x^*) < p(A, B)$, both of which are contradictions. Hence, $p(x, x^*) = 0$ and so $x^* = x$. Similarly, we show that $p(x^*, x) = 0$. But p is an E-distance, therefore

$$p(x^*, x^*) \leq p(x^*, x) + p(x, x^*).$$

Thus, $p(x^*, x^*) = 0$ and so $p(x, x^*) = p(x^*, x) = 0$. By Lemma 2.1(a), we conclude that $x^* = x$. Similarly, $y^* = y$ and the proof is complete. □

We are motivated by the example in [24] to support our obtained result in Theorem 3.1.

Example 3.1. *Consider the space $X = \mathbb{R}$ with Euclidean metric. Take the sets $A = [-8, -2]$ and $B = [2, 8] \cup \{-12\}$. Note that $A_0 = -2,\ B_0 = 2$.*

Now, let $T : A \to B$ and $G : B \to A$ be defined by

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{24}{x} & if \quad x < 0 \\ \\ -\dfrac{13}{x} & if \quad x > 0 \end{cases}$$

and $G(y) = -\frac{20}{y}$, $y \neq 0$.

Suppose p is defined by:

$$p(x, y) = \begin{cases} \left|\dfrac{y}{2}\right| & if \quad x \leq y \\ 1 & if \quad x > y \end{cases} \quad (Note\ that\ p(A, B) = 1).$$

Then p is an E-distance.

Taking $x_1 = -9,\ x_2 = -4,\ y_1 = 2$ and $y_2 = 20$,

$$d(x_1, T(x_2)) = d(y_1, G(y_2)) = d(A, B) = 3.$$

We show that the pair (T, G) defined on a metric space, is not a Geraghty p-proximal cyclic quasi-contraction. By using (3),

$$d(x_1, y_1) \leq \beta(M_T(x_2, y_2)M_T(x_2, y_2) + (1 - \beta(M_T(x_2, y_2)))d(A, B),$$

$$\begin{aligned} d(-9, 2) \leq &\beta(M_T(x_2, y_2)) \max\{d(-4, 20);\ d(-4, -6);\ d(20, -1);\ d(-4, -1);\ d(20, -6)\} \\ &+ 3(1 - \beta(M_T(x_2, y_2))). \end{aligned}$$

Taking $\beta = \dfrac{1}{1+t}$, we get

$$11 > \frac{26}{27} + 3\left(1 - \frac{26}{27}\right),$$

a contradiction. Thus, (T, G) is not a Geraghty p-proximal cyclic quasi-contraction on a metric space.

Now, we consider the case where (T, G) is defined on a uniform space. Clearly, (T, G) satisfies the Geraghty p-proximal cyclic quasi-contraction, for all $x \in A$ and $y \in B$, and -2 is the unique best proximity point of T, while 2 is the unique best proximity point of G and $p(A, B) = 1$.

We now give the following corollaries to justify our case. Take $\beta(t) = k$, with $k \in [0, 1)$, then we have the following.

Corollary 3.1. *Let (X, Γ) be an Hausdorff uniform space and p an E-distance on X. Suppose (A, B) is a pair of non-empty closed subset of the p-bounded and S-complete space (X, Γ) such that $A_0,\ B_0 \neq \emptyset$. Let $T : A \to B$, $G : B \to A$ and $h : A \cup B \to A \cup B$ satisfy the following conditions:*

(i) T *and* G *are p-proximal quasi-contractions.*

(ii) h *is an isometry.*

(iii) The pair (T,G) is a p-proximal cyclic quasi-contraction.

(iv) $T(A_0) \subseteq B_0$, $G(B_0) \subseteq A_0$.

(v) $A_0 \subseteq h(A_0)$ *and* $B_0 \subseteq h(B_0)$.

Then there exist unique points $x \in A$ *and* $y \in B$ *such that*

$$p(h(x), T(x)) = p(h(y), G(y)) = p(x, y) = p(A, B).$$

Moreover, for any best proximity point $x_0 \in A_0$, *the sequence* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *defined by*

$$p(h(x_{n+1}), T(x_n)) = p(A, B), \quad \forall n \geq 0$$

converges to the element x.

Similarly, for any best proximity point $y_0 \in B_0$, *the sequence* $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ *defined by*

$$p(h(y_{n+1}), G(y_n)) = p(A, B), \quad \forall n \geq 0$$

converges to the element y.

If h becomes the identity mapping in Theorem 3.1 then we get the following.

Corollary 3.2. *Let* (X, Γ) *be an Hausdorff uniform space and* p *an* E*-distance on* X*. Suppose* (A, B) *is a pair of non-empty closed subset of the* p*-bounded and* S*-complete space* (X, Γ) *such that* A_0, $B_0 \neq \emptyset$*. Let* $T : A \to B$, $G : B \to A$ *and* $h : A \cup B \to A \cup B$ *satisfy the following conditions:*

(i) T *and* G *are Geraghty p-proximal quasi-contractions.*

(ii) The pair (T,G) is a Geraghty p-proximal cyclic quasi-contraction.

(iii) $T(A_0) \subseteq B_0$, $G(B_0) \subseteq A_0$.

Then there exist unique points $x \in A$ *and* $y \in B$ *such that*

$$p(x, T(x)) = p(y, G(y)) = p(x, y) = p(A, B).$$

If $M_T(x, y) = p(x, y)$ in Theorem 3.1, we obtain the following.

Corollary 3.3. *Let* (X, Γ) *be an Hausdorff uniform space and* p *an* E*-distance on* X*. Suppose* (A, B) *is a pair of non-empty closed subset of the* p*-bounded and* S*-complete space* (X, Γ) *such that* A_0, $B_0 \neq \emptyset$*. Let* $T : A \to B$, $G : B \to A$ *and* $h : A \cup B \to A \cup B$ *satisfy the following conditions:*

(i) T *and* G *are Geraghty p-proximal contractions.*

(ii) h *is an isometry.*

(iii) The pair (T,G) is a Geraghty p-proximal cyclic contraction.

(iv) $T(A_0) \subseteq B_0$, $G(B_0) \subseteq A_0$.

(v) $A_0 \subseteq h(A_0)$ *and* $B_0 \subseteq h(B_0)$.

Then there exist unique points $x \in A$ *and* $y \in B$ *such that*

$$p(h(x), T(x)) = p(h(y), G(y)) = p(x, y) = p(A, B).$$

Moreover, for any best proximity point $x_0 \in A_0$, *the sequence* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *defined by*

$$p(h(x_{n+1}), T(x_n)) = p(A, B), \quad \forall n \geq 0$$

converges to the element x.

Similarly, for any best proximity point $y_0 \in B_0$, *the sequence* $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ *defined by*

$$p(h(y_{n+1}), G(y_n)) = p(A, B), \quad \forall n \geq 0$$

converges to the element y.

Remark 3.1. Set $\Gamma = \{(x, y) \in X^2 : d(x, y) < \epsilon\}$ and suppose $M_T(x, y) = p(x, y)$, then Theorem 3.1 reduces to the result in [19]. In addition to that, if $\beta(t) = k$, $k \in [0, 1)$, then we obtain the result in [4]. Finally, if $\beta(t) = k$, $A = B$, h is the identity mapping and $\Gamma = \{(x, y) \in X^2 : d(x, y) < \epsilon\}$, then T has a unique fixed point and Theorem 3.1 reduces to the result in [9].

References

[1] Aamri, M. and El Moutawakil, D.. *Common fixed point theorems for E-contractive or E-expansive maps in uniform spaces*, Acta. Math. Acad. Paedagog. Nyhazi. (N.S), **20** (2004), (electronic), 83–89.

[2] Amini-Harandi, A.. *Best proximity point theorem for cyclic strongly quasi-contraction mappings*, J. Glob. Optim., doi:10.1007/s 1089-012-9953-9, (2012).

[3] Banach, S.. *Sur les operations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux equations integrales*, Fundam. Math., **3** (1922), 133–181.

[4] Basha, S. S.. *Best proximity points: Optimal solution,* J. Optim. Theory Appl., **151** (2011), 210–216.

[5] Bilgili, N.; Karapínar, E. and Sadarangani, K.. *A generalization for the best proximity point of Geraghty-contractions*, J. Inequal. Appl., **2013**:286, (2013).

[6] Bourbaki, N.. *Topologie generale, Chapitre 1: Structures topologiques, Chapitre 2: Structures uniformes.* Quatrieme edition. Actualites Scientifiques et Industrielles, No. **1142**. Hermann, Paris, 1965.

[7] Caballero, J.; Harjani, J. and Sadarangani, K.. *A best proximity point theorem for Geraghty-contractions*, Fixed Point Theory Appl., **2012**:231, (2012).

[8] Cho, S.; Bae, J. and Karapínar, E.. *Fixed point theorem of α- Geraghty contractive maps in metric spaces*, Fixed Point Theory Appl., doi:10.1186/1687-1812-2013-329, (2013).

[9] Ciric, L. B.. *A generalization of Banach's contraction principles*, Proc. Amer. Math. Soc. **45**(2) (1974), 267–273.

[10] Dhagat, V. B.; Singh, V. and Nath, S.. *Fixed point theorems in uniform spaces*, Int. J. Math. Anal., **3** (2009), 197–202.

[11] Eldred, A. A. and Veeramani, P.. *Existence and convergence of best proximity points,* J. Math Anal. Appl. **323** (2006), 1001–1006.

[12] Geraghty, M.;*On contractive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., **40** (1973), 604–608.

[13] Hamzehnejadi, J. and Lashkaripour, R.. *Best proximity points for generalized α-ϕ-Geraghty proximal contraction mappings and its applications*, Fixed Point Theory Appl., **2016**:72, (2016).

[14] Hussain, N.; Karapínar, E.; Sedghi, S.; Shobkolaei, N. and Firouzian, S.. *Cyclic* (ϕ)-*contractions in uniform spaces and related fixed point results*, Abstract and Applied Anal., **2014**, article ID 976859, (2014), 7 pages.

[15] Jleli, M. and Samet, B.. *An optimization problem involving proximal quasi-contraction mappings*, Fixed Point Theory Appl., **2014**:141, (2014).

[16] Karapínar, E. and Erhan, I. M.. *Best proximity point on different type of contractions*, Applied Math. Info. Sci., **5** (2011), 558–569.

[17] Kiany, F. and Amini-Harandi, A.. *Fixed point theory for generalised Ciric quasi-contraction maps in metric spaces*, Fixed Point Theory Appl., (2013), doi:10.1186/1687-1812-2013-26.

[18] Kirk, W. A.; Srinavasan, P. S. and Veeramani, P.. *Fixed points for mapping satisfying cyclical contractive conditions*, Fixed Point Theory Appl., **4** (2003), 79–89.

[19] Mongkolkeha, C.; Cho, Y. J. and Kumam, P.. *Best proximity point for Geraghty's proximal contraction mappings*, Fixed Point Theory Appl., **2013**:180, (2013).

[20] Olaleru, J. O.. *Some generalizations of fixed point theorems in cone metric spaces*, Fixed Point Theory Appl., **2009**:657914, (2010), 10 pages.

[21] Olaleru, J. O.. *Common fixed points of three self-mappings in cone metric spaces*, Appl. Math. E-Notes **11** (2010), 41–49.

[22] Olaleru, J. O.; Olisama, V. O. and Abbas, M.; *Coupled best proximity points for generalised Hardy-Rogers type cyclic (ω)-contraction*, Int. J. Math. Anal. Optim., **1** (2015), 33–54.

[23] Olisama, V. O.; Olaleru, J. O. and Akewe, H.. *Best proximity points results for some contractive mappings in uniform spaces*, Int. J. Anal., (2017), Article I.D. 6173468, 8 pages.

[24] Olisama, V. O.; Olaleru, J. O. and Akewe, H.. *Best proximity points results for Hardy-Rogers p-proximal cyclic contraction in uniform spaces*, Fixed Point Theory Appl., **2018**:18, (2018).

[25] Rodriguez-Montes, J. and Charris, J. A.. *Fixed points for W-contractive or W-expansive maps in uniform spaces: toward a unified approach*, Southwest J. Pure Appl. Math., **1** (2001), electronic, 93–101.

[26] Umudu, J. C.; Olaleru, J. O. and Mogbademu, A. A.. *Fixed points of involution mappings in convex uniform spaces*, Commun. Nonlinear Anal., **7(1)** (2019), 50–57.

[27] Umudu, J. C.; Olaleru, J. O. and Mogbademu, A. A.. *Fixed point results for Geraghty quasi-contraction type mappings in dislocated quasi-metric spaces*, Fixed Point Theory Appl., (2020), doi: 10.1186/s13663-020-00683-z.

[28] Weil, A.. *Sur les espaces a structure uniforme et sur la topologie generale*, Act. Sci. Ind., 551, Paris, 1937.

Divulgaciones Matemáticas Vol. 21, No. 1-2 (2020), pp. 33–41

A theoretical improvement of the Riemann-Liouville and Caputo fractional derivatives

Una mejora teórica de las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo

Gustavo Asumu MBoro NChama (becquerrr10@hotmail.com)
Universidad Nacional de Guinea Ecuatorial
Calle Hassan II, Malabo
Guinea Ecuatorial

Abstract

In this paper we propose new fractional derivatives which, from the theoretical viewpoint, improve the Riemann-Liouville and Caputo fractional derivatives. Furthermore, some useful properties of the new fractional derivatives are presented.

Key words and phrases: Riemann-Liouville fractional derivative; Caputo fractional derivative; Laplace transform.

Resumen

En este trabajo se proponen nuevas derivadas fraccionarias que, desde el punto de vista teórico, mejoran las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo. Por otro lado, se introducen algunas propiedades importantes de estas nuevas derivadas fraccionarias.

Palabras y frases clave: Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville; Derivada fraccionaria de Caputo; Transformada de Laplace.

1 Introduction

Fractional calculus (FC) is an extension of ordinary calculus with more than 300 years of history. The history of the Fractional Calculus goes back to seventeenth century, when in 1695 the derivative of order $\alpha = \frac{1}{2}$ was described by Leibnitz in his letter to L'Hospital (cf. [2]). That date is regarded as the exact birthday of the fractional calculus. Since then this branch has been treated by eminent mathematicians, such as Euler, Laplace, Fourier, Liouville, Riemann, Laurent, Weyl and Abel. Therefore many definitions of fractional derivative have been proposed (cf. [1, 3, 7, 10, 11], [13]-[20] and [4, 5, 6, 8, 9, 12]), as follows (just to name a few):

Definition 1.1. The Grunwald and Letnikov fractional derivative is given by the formula

$$(D^\alpha f)(x) = \lim_{n \to 0} \frac{(\nabla_h^\alpha f)(x)}{h^\alpha}$$

Received 24/11/2019. Revised 12/12/2019. Accepted 17/10/2020.
MSC (2010): Primary 47Fxx; Secondary 47Gxx.
Corresponding author: Gustavo Asumu MBoro NChama

where

$$(\nabla_h^\alpha f)(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x - jh)$$

with $n = [\alpha]$, where $[\alpha]$ denotes the integer part of a real number α.

Definition 1.2. Suppose $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$, with $\alpha > 0$ and $t > a$. The Riemann-Liouville fractional integral of order $\alpha > 0$ is defined by

$$I_{at}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

where Γ is the gamma function, given by $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-s} s^{\alpha-1} ds$.

Definition 1.3. Suppose $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$, with $\alpha > 0$ and $t > a$. The Riemann-Liouville fractional derivative of order $\alpha > 0$ is defined by

$$^{RL}D_{at}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-(1+\alpha)} f(s) ds \tag{1}$$

where $n = [\alpha] + 1$.

Definition 1.4. Suppose $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$, with $\alpha > 0$ and $t > a$. The Caputo fractional derivative of order $\alpha > 0$ is defined by

$$^{C}D_{at}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-(1+\alpha)} f^{(n)}(s) ds \tag{2}$$

where $n = [\alpha] + 1$.

In the present work, we shall introduce new fractional derivatives to improve theoretically the Riemann-Liouville and Caputo fractional derivatives. The outline of the paper is as follows: in section 2, new definitions of fractional derivative are introduced. Section 3 presents properties of new fractional derivatives. Finally, conclusions are summarized in section 4.

2 New fractional derivatives

Our new definitions are motivated by the following reasoning. Integrating (1) and (2) by parts for $n = 1$, we have

$$\begin{aligned} ^{RL}D_{at}^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \Big[0^{-\alpha} f(t) - \alpha \int_a^t (t-s)^{-(\alpha+1)} f(s) ds \Big] \end{aligned} \tag{3}$$

and

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{\alpha}_{at}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{-\alpha} f^{(1)}(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\Big[0^{-\alpha}f(t) - (t-a)^{-\alpha}f(a) - \alpha\int\limits_a^t (t-s)^{-(\alpha+1)}f(s)ds\Big] \end{aligned} \tag{4}$$

respectively. Considering the first term in (3) and (4), we can see that both definitions loose sense. To avoid this issue, we propose the following definitions:

Definition 2.1. Suppose $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$, with $\alpha > 0$ and $t > a$, then the new fractional derivative (Asumu fractional derivative in Riemann-Liouville sense) is given as:

$$ {}^{ARL}D^{\alpha}_{at}f(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\dfrac{d^n}{dt^n}\displaystyle\int_a^t (t-s)^{n-(1-\alpha)}f(s)ds, & n-1<\alpha<n \\ \dfrac{d^n}{dt^n}f(t), & \alpha = n \end{cases} $$

Definition 2.2. Suppose $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$, with $\alpha > 0$ and $t > a$, then the new fractional derivative (Asumu fractional derivative in Caputo sense) is given as:

$$ {}^{AC}D^{\alpha}_{at}f(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\displaystyle\int_a^t (t-s)^{n-(1-\alpha)}f^{(n)}(s)ds, & n-1<\alpha<n \\ \dfrac{d^n}{dt^n}f(t), & \alpha = n \end{cases} $$

3 Basic properties of new fractional order derivatives

Before we establish the main properties of the new fractional derivatives, we present their Laplace transform formulas in the following two theorems:

Theorem 3.1. *Suppose that $n-1<\alpha<n$ and f such that $f(0), f'(0), \cdots, f^{(n-1)}(0)$ exist. Then*

$$\mathfrak{L}\{{}^{AC}D^{\alpha}_{0t}f(t)\} = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{s^{n+\alpha}\cdot\Gamma(n-\alpha)}\left\{s^n\mathfrak{L}\{f(t)\} - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1}f^{(i)}(0)\right\} \tag{5}$$

Proof. From Definition 2.2 we have

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{{}^{AC}D^{\alpha}_{0t}f(t)\} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\cdot\mathfrak{L}\Big\{\int_a^t (t-s)^{n-(1-\alpha)}f^{(n)}(s)ds\Big\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\cdot\mathfrak{L}\Big\{t^{n-(1-\alpha)} * f^{(n)}(t)\Big\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\cdot\mathfrak{L}\Big\{t^{n-(1-\alpha)}\Big\}\cdot\mathfrak{L}\Big\{f^{(n)}(t)\Big\} \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha)}{s^{n+\alpha}\cdot\Gamma(n-\alpha)}\cdot\Big\{s^n\cdot\mathfrak{L}\{f\} - \sum_{i=0}^{n-1}s^{n-1-i}\cdot f^{(i)}(0)\Big\} \end{aligned}$$

as required. $\square$

Theorem 3.2. *Suppose that $n-1 < \alpha < n$. Then*

$$\mathfrak{L}\{^{ARL}D_{0t}^{\alpha}f(t)\} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \left\{ \frac{\Gamma(n+\alpha)}{s^{\alpha}} \cdot \mathfrak{L}\{f\} - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} \cdot \frac{d^i}{dt^i}\left\{ \int_0^t (t-s)^{n-(1-\alpha)} f(s)ds \right\}(0) \right\} \tag{6}$$

Proof. By Definition 2.1 we have that

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\{^{ARL}D_{0t}^{\alpha}f(t)\} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \mathfrak{L}\left\{ \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-(1-\alpha)} f(s)ds \right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \left\{ s^n \cdot \mathfrak{L}\left\{ \int_0^t (t-s)^{n-(1-\alpha)} f(s)ds \right\} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} \cdot \frac{d^i}{dt^i}\left\{ \int_0^t (t-s)^{n-(1-\alpha)} f(s)ds \right\}(0) \right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \left\{ \frac{s^n\Gamma(n+\alpha)}{s^{n+\alpha}} \cdot \mathfrak{L}\{f\} - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{d^i}{dt^i}\left\{ \int_0^t (t-s)^{n-(1-\alpha)} f(s)ds \right\}(0) \right\}
\end{aligned}$$

This completes the proof □

The following two theorems permit us to write the new fractional derivatives in other way:

Theorem 3.3. *Let $n \in \mathbb{N}$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$ such that $n-1 < \alpha < n$ and $f(a), f'(a), \cdots, f^{(n-1)}(a)$ exist. Then*

$$\begin{aligned}
{}^{AC}D_{at}^{\alpha}f(t) = &-\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\alpha+n-1)!}{(\alpha+n-1-i)!}(t-a)^{n-1+\alpha-i} f^{(n-1-i)}(a) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \left[\prod_{i=0}^{n-1}(i+\alpha) \right] \cdot \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds
\end{aligned} \tag{7}$$

Proof. We will use the principle of mathematical induction. Let $P(n)$ be

$$\begin{aligned}
P(n) \equiv{}& ^{AC}D_{at}^{\alpha}f(t) \\
={}& -\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\alpha+n-1)!}{(\alpha+n-1-i)!}(t-a)^{n-1+\alpha-i} f^{(n-1-i)}(a) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \left[\prod_{i=0}^{n-1}(i+\alpha) \right] \cdot \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds
\end{aligned}$$

For our base case, we need to show $P(1)$ is true, meaning that

$$\begin{aligned}{}^{AC}D^{\alpha}_{at}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\Bigg[&-\sum_{i=0}^{1-1}\frac{(\alpha+0)!}{(\alpha+0-i)!}(t-a)^{0+\alpha-i}f^{(0-i)}(a) \\ &+\left[\prod_{i=0}^{1-1}(i+\alpha)\right]\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds\Bigg],\end{aligned}$$

This is trivial, since

$$\begin{aligned}{}^{AC}D^{\alpha}_{at}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha}f^{(1)}(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[-(t-a)^{\alpha}f(a)+\alpha\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\Bigg[-\sum_{i=0}^{1-1}\frac{(\alpha+0)!}{(\alpha+0-i)!}(t-a)^{0+\alpha-i}f^{(0-i)}(a) \\ &\quad +\left[\prod_{i=0}^{1-1}(i+\alpha)\right]\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds\Bigg],\end{aligned}$$

For the inductive step, assume that for some n, $P(n)$ holds, so

$$\begin{aligned}{}^{AC}D^{\alpha}_{at}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{k-(1-\alpha)}f^{(k)}(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)}\Bigg[-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\alpha+k-1)!}{(\alpha+k-1-i)!}(t-a)^{k-1+\alpha-i}f^{(k-1-i)}(a) \\ &\quad +\left[\prod_{i=0}^{k-1}(i+\alpha)\right]\cdot\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds\Bigg] \qquad (8)\end{aligned}$$

We need to show that $P(n+1)$ holds, meaning that

$$\begin{aligned}{}^{AC}D^{\alpha}_{at}f(t) = &-\frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)}\sum_{i=0}^{n}\frac{(\alpha+n)!}{(\alpha+n-i)!}(t-a)^{n+\alpha-i}f^{(n-i)}(a) \\ &+\frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)}\cdot\left[\prod_{i=0}^{n}(i+\alpha)\right]\cdot\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds\end{aligned}$$

To see this, note that

$$
\begin{aligned}
&{}^{AC}D_{at}^{\alpha}f(t)\\
&= \frac{1}{\Gamma(k+1-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{k+1-(1-\alpha)} f^{(k+1)}(s)ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(k+1-\alpha)}\Big[-(t-a)^{k+\alpha}f^{(k)}(a)+(k+\alpha)\int_a^t (t-s)^{k+\alpha-1}f^{(k)}(s)ds\Big]\\
&= \frac{1}{\Gamma(k+1-\alpha)}\Big\{-(t-a)^{k+\alpha}f^{(k)}(a)+(k+\alpha)\Big[-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\alpha+k-1)!}{(\alpha+k-1-i)!}(t\\
&\quad -a)^{k-1+\alpha-i}f^{(k-1-i)}(a)+\Big[\prod_{i=0}^{k-1}(i+\alpha)\Big]\cdot\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds\Big]\Big\}\\
&= \frac{1}{\Gamma(k+1-\alpha)}\Big[-(t-a)^{k+\alpha}f^{(k)}(a)-\sum_{i=1}^{k}\frac{(\alpha+k)!}{(\alpha+k-i)!}(t\\
&\quad -a)^{k+\alpha-i}f^{(k-i)}(a)+\Big[\prod_{i=0}^{k}(i+\alpha)\Big]\cdot\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds\Big]\\
&= \frac{1}{\Gamma(k+1-\alpha)}\Big[-\sum_{i=0}^{k}\frac{(\alpha+k)!}{(\alpha+k-i)!}(t-a)^{k+\alpha-i}f^{(k-i)}(a)\\
&\quad +\Big[\prod_{i=0}^{k}(i+\alpha)\Big]\cdot\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds\Big] \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Thus $P(n+1)$ holds when $P(n)$ is true, so $P(n)$ is true for all natural numbers n. □

Theorem 3.4. *Let $n \in \mathbb{N}$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$ such that $n-1<\alpha<n$. Then*

$$
{}^{ARL}D_{at}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\cdot\Big[\prod_{i=0}^{n-1}(i+\alpha)\Big]\cdot\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds \qquad (10)
$$

Proof. Let $P(n)$ be

$$
P(n) \equiv^{ARL} D_{at}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\cdot\Big[\prod_{i=0}^{n-1}(i+\alpha)\Big]\cdot\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds.
$$

We will show, by induction, that $P(n)$ holds for all $n \in \mathbb{N}$. We note that

$$
\begin{aligned}
{}^{ARL}D_{at}^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t (t-s)^{\alpha}f(s)ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\cdot\alpha\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\Big[\prod_{i=0}^{1-1}(i+\alpha)\Big]\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds.
\end{aligned}
$$

Thus, $P(1)$ is true. Asume that $P(n)$ is true for some natural number n, i.e.,

$$\begin{aligned}
{}^{ARL}D_{at}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-(1-\alpha)} f(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \left[\prod_{i=0}^{n-1} (i+\alpha) \right] \cdot \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds
\end{aligned}$$

We need to proof that $P(n+1)$ is true whenever $P(n)$ is true. We have

$$\begin{aligned}
{}^{ARL}D_{at}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \int_a^t (t-s)^{n+1-(1-\alpha)} f(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{n+\alpha} f(s) ds \right] \\
&= \frac{n+\alpha}{\Gamma(n+1-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-(1-\alpha)} f(s) ds \\
&= \frac{n+\alpha}{\Gamma(n+1-\alpha)} \cdot \left[\prod_{i=0}^{n-1} (i+\alpha) \right] \cdot \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \cdot \left[\prod_{i=0}^{n} (i+\alpha) \right] \cdot \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.
\end{aligned}$$

Thus, we get what we want. Hence, by the principle of mathematical induction, $P(n)$ is true for all natural numbers n. □

The following theorem can therefore be established:

Theorem 3.5. *Let $n \in \mathbb{N}$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$ such that $n-1 < \alpha < n$ and $f(a), f'(a), \cdots, f^{(n-1)}(a)$ exist. Then, the following relation is obtained*

$$ {}^{ARL}D_{at}^{\alpha} f(t) = {}^{AC} D_{at}^{\alpha} f(t) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\alpha+n-1)!}{(\alpha+n-1-i)!} (t-a)^{n-1+\alpha-i} f^{(n-1-i)}(a). \tag{11}$$

Proof. In terms of (7) and (10), then it follows (11). □

The following two theorems characterize the well-posed of the new fractional derivatives:

Theorem 3.6. *Let f such that $I_{at}^{\alpha} f(t)$ exists, then the operator ${}^{ARL}D_{at}^{\alpha} f(t)$ is well-defined.*

Proof. The proof follows from Theorem 3.4. □

Theorem 3.7. *Let f such that $f(a), f'(a), \cdots, f^{(n-1)}(a)$ and $I_{at}^{\alpha} f(t)$ exist, then the operator ${}^{AC}D_{at}^{\alpha} f(t)$ is well-defined.*

Proof. The proof follows from Theorem 3.3. □

4 Conclusions

The aim of this paper was to suggest new fractional derivatives to improve theoretically the Riemann-Liouville and Caputo fractional derivatives. In this sense, one of the derivative is based upon the Riemann-Liouville viewpoint and the other one on the Caputo approach. Also we have given some properties of the proposed new fractional derivatives.

Conflict of Interest
The author declare that he has no conflict of interest.

5 Acknowledgements

This paper is supported by UNGE, Universidad Nacional de Guinea Ecuatorial.

References

[1] Agarwal, Praveen; Choi, Junesang and Paris, R. B.. *Extended Riemann-Liouville fractional derivative operator and its applications.* J. Nonlinear Sci. Appl.**8** (2015), 454–455.

[2] C., Anselmi; P., Desantis and A., Scipioni. *Nanoscale echanical and dynamical properties of DNA single molecules.* Biophys Chem. **113** (2005), 209–221.

[3] Blaszczyk, Tomasz. *A Numerical Solution of a Fractional Oscillator Equation in a non-Resisting Medium with Natural Boundary Conditions.* Romanian Reports in Physics **67**(2) (2015), 350–351.

[4] S., Coyal and Perkins C., Perkins N.. *Looping mechanics of rods and DNA with non-homogeneous and discontinuous stiffness.* Int. J. Non-Linear Mech. **43**(10) (2008), 1121–1128.

[5] A., Gorosko O. and K., Hedrih (Stevanovic). *Analiticka dinamika (mehanika) diskretnih naslednih sistema. (Analytical Dynamics (Mechanics) of Discrete Hereditary Systems).* Monograph, p. 426, YU ISBN 86-7181-054-2,2001.

[6] A., Gorosko O. and K., Hedrih (Stevanovic). *The construction of the Lagrange Mechanics of the discrete hereditary systems.* Facta Universitatis, Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics **6**(1) (2007), 175–176.

[7] Herzallah, Mohamed A. E.. *Notes on Some Fractional Calculus Operators and their properties.* Journal of Fractional Calculus and Applications, **5**(19), 1–2.

[8] A., Hedrih. *Mechanical models of the double DNA.* International Journal of Medical Engineering and Informatics **3**(4) (2011), 394–410.

[9] K., Hedrih (Stevanovic). *Dynamics of coupled systems.* Nonlinear Analysis: Hybrid Systems **2** (2008), 310–334.

[10] Katugampola, Udita N.. *A New Approach to Generalized Fractional Derivatives.* Bulletin of Mathematical Analysis and Applications **6** (2014), 1–6.

[11] Kilbas, Anatoly A.; Srivastava, Hari M. and Trujillo, Juan J.. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies **204** (2006), 125–126.

[12] Lazarevi, Mihailo et.al.. *Advanced Topics on Applications of Fractional Calculus on Control Problems, System Stability and Modeling*, Published by WSEAS Press (2014).

[13] Liang, Song; Wu, Ranchao and Chen, Liping. *Laplace Transform of Fractional Order Differential Equations*. Electronic Journal of Differential Equations **2015**(139) (2015), 1–3.

[14] Medina, Gustavo D.; Ojeda, Nelson R.; Pereira, José H. and Romero,Luis G.. *Fractional Laplace Transform and Fractional Calculus*. International Mathematical Forum **12**(20) (2017), 991–997.

[15] Podlubny, Igor. *Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation*. Fract. Calc. App. Anal. **5** (2002), 367–386.

[16] Polat, Refet. *Finite Difference Solution to the Time-Fractional Differential-Difference Burgers Equation*. Journal of Science and Technology **12** (2019), 258–259.

[17] Rahimy, Mehdi. *Applications of Fractional Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences **4**(50) (2010), 2454–2455.

[18] Romero, Luis Guillermo; Luque, Luciano L.; Dorrego, Gustavo Abel and Cerutti, Rubén A.. *On the k-Riemann-Liouville Fractional Derivative*. Int. J. Contemp. Math. Sciences **8**(1) (2013), 41–42.

[19] Singh, Dimple. *Integral Transform of Fractional Derivatives*. International Journal of Recent Research Aspects bf 4 (2017), 74–75.

[20] Thaiprayoon, Chatthai; Ntouyas, Sotiris K. and Tariboon, Jessada. *On the nonlocal Katugampola fractional integral conditions for fractional Langevin equation*. Advances in Difference Equations (2015), DOI 10.1186/s13662-015-0712-3.

Divulgaciones Matemáticas Vol. 21, No. 1-2 (2020), pp. 42–46

Un teorema sobre $P(\mathbb{N})/fin$

A theorem about $P(\mathbb{N})/fin$

Franklin Galindo (franklingalindo178@gmail.com)
Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia.
Universidad Central de Venezuela.
Colaborardor Visitante del Departamento de Matemáticas
Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas.

Resumen

El objetivo de este artículo es presentar una demostración original del siguiente teorema: Existe una extensión genérica del modelo de Solovay $L(\mathbb{R})$ donde hay un orden lineal de $P(\mathbb{N})/fin$ que extiende al orden parcial $(P(\mathbb{N})/fin), \leq^\star)$. Los órdenes lineales de $P(\mathbb{N})/fin$ son importantes porque, entre otras razones, permiten construir conjuntos no medibles.

Palabras y frases clave: orden lineal de $P(\mathbb{N})/fin$, orden parcial del $P(\mathbb{N})/fin$, modelo de Solovay.

Abstract

The objective of this article is to present an original proof of the following theorem: There is a generic extension of the Solovay's model $L(\mathbb{R})$ where there is a linear order of $P(\mathbb{N})/fin$ that extends to the partial order $(P(\mathbb{N})/fin), \leq^\star)$. Linear orders of $P(\mathbb{N})/fin$ are important because, among other reasons, they allow constructing non-measurable sets.

Key words and phrases: linear order on $P(\mathbb{N})/fin$, partial order on $P(\mathbb{N})/fin$, Solovay's model.

1 Introducción

El objetivo de este artículo es presentar una demostración original del siguiente teorema: *Existe una extensión genérica del modelo de Solovay $L(\mathbb{R})$ donde hay un orden lineal de $P(\mathbb{N})/fin$ que extiende al orden parcial $(P(\mathbb{N})/fin), \leq^\star)$*. Los órdenes lineales de $P(\mathbb{N})/fin$ son importantes porque, entre otras razones, permiten construir conjuntos no medibles (considerados como subconjuntos del espacio de Cantor $(2^{\aleph_0}, t)$), por ejemplo los "ultraflitters"(ver [1]) . En las definiciones preliminares, la formulación y demostración del teorema, supondremos al lector familiarizado con la teoría axiomática de conjuntos, específicamente con el método de forcing y con la técnica de constructibilidad relativizada, según los textos [2,3]. Agradezco al profesor Carlos Di Prisco por algunas sugerencias que me hizo a los fines de demostrar el teorema que se presenta en este artículo.

Recibido 20/02/2020. Revisado 15/04/2020. Aceptado 09/12/2020.
MSC (2010): Primary 03Exx; Secondary 03E20.
Autor de correspondencia: Franklin Galindo

2 Existe una extensión genérica del modelo de Solovay, $L(\mathbb{R})[G]$, donde hay un orden lineal de $P(\mathbb{N})/fin$ que extiende al orden parcial $(P(\mathbb{N})/fin, \leq^\star)$

Para construir al Modelo de Solovay $L(\mathbb{R})$ necesitamos suponer que existen cardinales inaccesibles y después utilizar dos métodos de construcción de modelos de la teoría de conjuntos: Primero "Forcing"(específicamente, el *Colapso de Lévy*), y luego "Constructibilidad relativizada"(también se puede usar en este segundo caso la técnica de los modelos $HOD(A)$, es decir, la clase de todos los conjuntos hereditariamente definibles con ordinales, con elementos de A, y el propio A). Veamos la construcción de $L(\mathbb{R})$ en tres pasos:

(I) Las principales propiedades del Colapso de Lévy se presentan mediante el siguiente teorema de forcing:

Teorema 2.1. *Sea κ un cardinal regular y $\lambda > \kappa$ un cardinal inaccesible. Entonces existe un orden parcial $(P, <)$ tal que:*

(a) Cualquier α, $\kappa \leq \alpha < \lambda$, tiene cardinal κ en $M[G]$.

(b) Cualquier cardinal $\leq \kappa$ y cualquier cardinal $\geq \lambda$ sigue siendo un cardinal en $M[G]$,

En particular $M[G] \models \lambda = \kappa^+$.

Una demostración de este teorema puede encontrarse en [2]. El orden parcial $(P, <)$ utilizado, que se denota por $Col(\kappa, < \lambda)$, es el siguiente:

P son todas las funciones cuyo dominio está contenido en $\lambda \times \kappa$ tal que:

(i) $|dom(p)| < \kappa$,

(ii) $p(\alpha, \xi) < \alpha$, para todo $(\alpha, \xi) \in dom(p)$.

El orden parcial de P es: $p < q \leftrightarrow p \supseteq q$.

(II) *Constructibilidad relativizada* $L(A)$: Sea A un conjunto cualquiera. Definimos el modelo $L(A)$ por inducción transfinita sobre los ordinales de la siguiente manera (ver [2]):

(Definiciones previas: Un conjunto X es *transitivo* si y sólo si para todo z se tiene que $z \in X \to z \subseteq X$. Dado un conjunto B, la *clausura transitiva* de B es el menor conjunto (respecto a $\subseteq$) transitivo que contiene a B, y se denotará por $Cl(B)$.)

$$L_0(A) = Cl(\{A\})$$

$$L_{\alpha+1}(A) = \{X \subseteq L_\alpha(A) : X \text{ es definible con parámetros en la estructura } (L_\alpha(A), \in)\}$$

$$L_\lambda(A) = \bigcup_{\beta\in\lambda} L_\beta(A) \ , \quad \lambda \text{ límite}$$

$$L(A) = \bigcup_{\alpha\in Ord} L_\alpha(A).$$

Es importante resaltar que la definición presentada de $L(A)$ se puede formalizar en ZFC. Se cumple que $L(A)$ es un modelo transitivo de ZF que contiene a todos los ordinales y, además, es el menor modelo transitivo de ZF que contiene a los ordinales y a A.

(III) Sea M un modelo transitivo de ZFC (M puede ser V, L, o un conjunto numerable). Sean λ un cardinal inaccesible en M y $M[G]$ la extensión genérica que se obtiene aplicando el Colapso de Lévy: $Col(\aleph_0, < \lambda)$. Sean $\mathbb{R}$ en $M[G]$ y $L(\mathbb{R})$ en $M[G]$. $L(\mathbb{R})$ es el Modelo de Solovay, y la manera como se construyó es una de las formas que se utiliza para hacerlo (hay otras, por ejemplo usando $HOD(A)$ en vez de $L(A)$, como ya se dijo, ver [2]).

Se cumple que $L(\mathbb{R})$ es un modelo de ZF (el Axioma de elección es falso en $L(\mathbb{R})$), más el Principio de elecciones dependientes (DC), más todo conjunto de reales es medible Lebesgue y tiene la propiedad de Baire, más todo subconjunto no numerable de reales contiene un subconjunto perfecto. Ver [2] para las definiciones y la demostración de este teorema.

Veamos ahora el siguiente resultado sobre $L(\mathbb{R})$ y $(P(\mathbb{N})/fin, \leq^\star)$. Donde $P(\mathbb{N})/fin$ es el conjunto cociente determinado por la relación de equivalencia en $P(\mathbb{N})$ definida así: $x \sim y$ si y sólo si $x \bigtriangleup y$ es finito (es decir, x es equivalente a y si ellos son casi iguales). Y $\leq^\star$ es el siguiente orden parcial: $[A] \leq^\star [B]$ si y sólo si $A - B$ es finito ($A \subseteq^\star B$).

Teorema 2.2. *Existe una extensión genérica de $L(\mathbb{R})$, $L(\mathbb{R})[G]$, donde hay un orden lineal de $P(\mathbb{N})/fin$ que extiende a $\leq^\star$.*

Demostración. Sea el orden parcial $(P(\mathbb{N})/fin, \leq^\star)$ definido en $L(\mathbb{R})$. Sea el orden parcial $(P, \leq)$, donde P es el conjunto de todos los órdenes lineales finitos que son una extensión de algún orden parcial finito del orden parcial $(P(\mathbb{N})/fin, \leq^\star)$, es decir, cada elemento $K \in P$ es un orden lineal finito que es una extensión de un orden parcial finito $K' = \leq^\star \upharpoonright X$, donde X es un subconjunto finito de $P(\mathbb{N})/fin$ (X es el universo de K'). Vale la pena resaltar que el universo de cada orden lineal finito que pertenece a P también es un suconjunto finito de $P(\mathbb{N})/fin$, donde

$$K_1 \leq K_2 \Longleftrightarrow K_1 \supseteq K_2.$$

Sean $G \subseteq P$ un P-genérico sobre $L(\mathbb{R})$ y $\bigcup G \in L(\mathbb{R})[G]$. Se probará que el conjunto de pares $\bigcup G$ es un orden lineal de $P(\mathbb{N})/fin$ que extiende a $\leq^\star$, es decir, se debe probar que $\bigcup G$ tiene las propiedades de reflexidad, antisimetría, transitividad y tricotomía, y además que extiende a $\leq^\star$. (En algunos casos se usarán argumentos de densidad).

(I) $\bigcup G$ cumple con la propiedad de reflexividad: En efecto $([A], [A]) \in \bigcup G$, para toda $[A] \in P(\mathbb{N})/fin$. Pues para cada $[A] \in P(\mathbb{N})/fin$ el conjunto $S_{[A]}$,

$$S_{[A]} = \{U \in P : ([A], [A]) \in U\},$$

pertenece a $L(\mathbb{R})$ y es denso.

Prueba de la densidad: Sea $K \in P$, entonces existe un conjunto finito $Z \subseteq P(\mathbb{N})/fin$ tal que K es una extensión lineal de $\leq^\star \upharpoonright Z$. Hay que probar que existe un $Q \leq K$ tal que $Q \in S_{[A]}$. Si $[A] \in Z$, entonces $([A], [A]) \in \leq^\star \upharpoonright Z$, porque $\leq^\star \upharpoonright Z$ es un orden parcial, y por lo tanto $([A], [A]) \in K$, pues K es una extensión lineal de $\leq^\star \upharpoonright Z$. En este caso el Q buscado es el mismo K. Si $[A] \notin Z$, entonces consideramos $Z' = Z \cup \{[A]\}$ y $W = \leq^\star \upharpoonright Z'$. Tomemos $K \cup W$, el cual es un orden parcial finito con respecto a Z'. Sea K' un orden lineal finito que es una extensión de $K \cup W$. Se cumple que $K' \in P$, pues K' es un orden lineal que extiende a $W = \leq^\star \upharpoonright Z'$. Como W es un orden parcial, el par $([A], [A]) \in W$. Por lo tanto $([A], [A]) \in K'$. Entonces, como por la construcción de K' se cumple que $K' \supseteq K$, es decir, $K' \leq K$, se conluye que el Q buscado es K'. En consecuencia, $S_{[A]}$ es denso. Como $S_{[A]}$ es denso y G es P-genérico sobre $L(\mathbb{R})$, se infiere que $S_{[A]} \cap G \neq \emptyset$, es decir, $([A], [A]) \in \bigcup G$.

(II) $\bigcup G$ cumple con la propiedad de antisimetría: Sean $([A],[B]) \in \bigcup G$ y $([B],[A]) \in \bigcup G$. Entonces existe $K_1 \in G$ y $K_2 \in G$ tal que $([A],[B]) \in K_1$ y $([A],[B]) \in K_2$. En consecuencia, como G es un filtro, existe un $K_3 \in G$ tal que $K_3 \leq K_1$ y $K_3 \leq K_2$, es decir, $K_3 \supseteq K_1$ y $K_3 \supseteq K_2$. Por lo tanto $([A],[B]) \in K_3$ y $([B],[A]) \in K_3$, y como K_3 es antisimétrico se concluye que $[A] = [B]$.

(III) $\bigcup G$ tiene la propiedad de transitividad: Sean $([A],[B]) \in \bigcup G$ y $([B],[D]) \in \bigcup G$, entonces existe $K_1 \in G$ y $K_2 \in G$ tal que $([A],[B]) \in K_1$ y $([B],[D]) \in K_2$. En consecuencia, como G es un filtro, existe un $K_3 \in G$ tal que $K_3 \leq K_1$ y $K_3 \leq K_2$, es decir, $K_3 \supseteq K_1$ y $K_3 \supseteq K_2$. Por lo tanto $([A],[B]) \in K_3$ y $([B],[D]) \in K_3$, y como K_3 es transitivo (es un orden lineal) se concluye que $([A],[D]) \in K_3$. Luego, $([A],[D]) \in \bigcup G$.

(IV) $\bigcup G$ satisface la propiedad de tricotomía: Sean $[A],[B] \in P(\mathbb{N})/fin$ tal que $[A] \neq [B]$. Se debe probar que $([A],[B]) \in \bigcup G$ o $([B],[A]) \in \bigcup G$. Sea T el siguiente conjunto,

$$T = \{U \in P : ([A],[B]) \in U \ o \ ([B],[A]) \in U\}.$$

Se cumple que, $T \in L(\mathbb{R})$. Se probará que T es denso. Sea $K \in P$, entonces existe un conjunto finito $Z \subseteq P(\mathbb{N})/fin$ tal que K es una extensión lineal de $\leq^\star \restriction Z$. Hay que probar que existe un $Q \leq K$ tal que $Q \in T$. Si $([A],[B]) \in K$ o $([B],[A]) \in K$, entonces el Q buscado es el mismo K. Si $([A],[B]) \notin K$ y $([B],[A]) \notin K$, entonces pueden ocurrir alguno de los siguientes tres casos:

Caso 1: $([A] \notin Z$ y $[B] \in Z)$.
Consideramos $Z' = Z \cup \{[A]\}$ y $W = \leq^\star \restriction Z'$. Sea $K \cup W$, el cual es un orden parcial finito con respecto a Z'. Sea K' un orden lineal finito que es una extensión de $K \cup W$. $K' \in P$ por razones análogas a las expresadas en la prueba de la propiedad de reflexividad. Como K' es un orden lineal, se cumple que $([A],[B]) \in K'$ o $([B],[A]) \in K'$. En consecuencia $K' \in T$ y $K' \supseteq K$, es decir, K' es el Q buscado.

Caso 2: $([B] \notin Z$ y $[A] \in Z)$.
Consideramos $Z' = Z \cup \{[B]\}$ y tomamos $W = \leq^\star \restriction Z'$. Luego aplicamos un razonamiento análogo al Caso 1 para obtener el $Q \in T$ y $Q \leq K$ buscado.

Caso 3: $([A] \notin Z$ y $[B] \notin Z)$.
Consideramos $Z' = Z \cup \{[A],[B]\}$ y tomamos $W = \leq^\star \restriction Z'$. Después aplicamos un razonamiento análogo al Caso 1 para obtener el $Q \in T$ y $Q \leq K$ buscado. Por lo tanto T es denso y, como G es P-genérico sobre $L(\mathbb{R})$, se infiere que $T \cap G \neq \emptyset$. Es decir, $([A],[B]) \in \bigcup G$ o $([B],[A]) \in \bigcup G$.

(IV) Veamos ahora que el orden lineal $\bigcup G$ extiende al orden parcial $\leq^\star$ de $P(\mathbb{N})/fin$: Sean $[A],[B] \in P(\mathbb{N})/fin$ tal que $([A],[B]) \in \leq^\star$. Se debe probar que $([A],[B]) \in \bigcup G$. Sea S el siguiente conjunto,

$$S = \{U \in P : ([A],[B]) \in U\}.$$

Se cumple que, $S \in L(\mathbb{R})$. Se debe probar que S es denso. Sea $K \in P$, entonces existe un conjunto finito $Z \subseteq P(\mathbb{N})/fin$ tal que K es una extensión lineal de $\leq^\star \restriction Z$. Hay que probar que existe un $Q \leq K$ tal que $Q \in T$. Si $([A],[B]) \in K$, entonces el Q buscado es el mismo

K. Si $([A],[B]) \notin K$, entonces como en la prueba de la propiedad de tricotomía pueden ocurrir alguno de los siguientes tres casos:

Caso 1: $([A] \notin Z$ y $[B] \in Z)$.
Consideramos $Z' = Z \cup \{[A]\}$ y tomamos $W = \leq^\star \restriction Z'$. Se cumple que $([A],[B]) \in W$, pues por hipótesis $([A],[B]) \in \leq^\star$. Sea $K \cup W$, el cual es un orden parcial con respecto a Z'. Sea K' un orden lineal finito que es una extensión de $K \cup W$. $K' \in P$ por razones análogas a las expresadas en la prueba de la propiedad de reflexividad. Como K' es un orden lineal que extiende a $K \cup W$ se cumple que $([A],[B]) \in K'$. En consecuencia $K' \in S$ y $K' \supseteq K$. Es decir, K' es el Q buscado.

Caso 2: $([B] \notin Z$ y $[A] \in Z)$.
Consideramos $Z' = Z \cup \{[B]\}$ y tomamos $W = \leq^\star \restriction Z'$. Luego aplicamos un razonamiento análogo al Caso 1 para obtener el $Q \in T$ y $Q \leq K$ buscado.

Caso 3: $([A] \notin Z$ y $[B] \notin Z)$.
Consideramos $Z' = Z \cup \{[A],[B]\}$ y tomamos $W = \leq^\star \restriction Z'$. Después aplicamos un razonamiento análogo al Caso 1 para obtener el $Q \in T$ y $Q \leq K$ buscado. Por lo tanto S es denso y, como G es P-genérico sobre $L(\mathbb{R})$, se infiere que $S \cap G \neq \emptyset$, es decir, $([A],[B]) \in \bigcup G$.

$\square$

Referencias

[1] Di Prisco, C. and Henle, H., *Doughnuts, Floating Ordinals, Square Brackets, and Ultraflitters.* Journal of Symbolic Logic **65** (2000) 462-473.

[2] Jech, T., *Set Theory.* Springer. 2000.

[3] Kunen, K., *Set Theory.* Elsevier. 2006.

Divulgaciones Matemáticas Vol. 21, No. 1-2 (2020), pp. 47–53

Lungs and blood oxygenation; Mathematical modeling

Oxigenación de pulmones y sangre; Modelo matemático

Sandy Sánchez Domínguez (sandys@uo.edu.cu)
Maikel Menéndez Castillo (maikelm@uo.edu.cu)
Faculty of Natural and Exact Sciences
University of Oriente
Cuba

Antonio Iván Ruiz Chaveco (iruiz2005@yahoo.es)
Rainey Ferreira Do Nascimento (raineynascimento@hotmail.com)
Karem Oliveira (karemdeoliveira@gmail.com)
University of the State of Amazonas,
Brazil

Leide Maria Leão (leide@ufam.edu.br)
Federal University of Amazonas,
Brazil

Vandresa Souza (vandreza.souza@hotmail.com)
Federal University of Río Grande do Norte,
Brazil

Paola Lima Franca (paolalimafranca1@gmail.com)
Federal University of Juiz de Fora,
Brazil

Mariano Lacortt (lacorttifsul@gmail.com)
Federal Institute of Río Grande do Sul,
Brazil

Fabiana Andrade (fandrade@gmail.com)
Federal University of Río de Janeiro,
Brazil

Recibido 24/06/2020. Revisado 15/08/2020. Aceptado 14/12/2020.
MSC (2010): Primary 34Dxx; Secondary 34Cxx.
Autor de correspondencia: Sandy Sánchez Domínguez

Abstract

In this article, a general study is made about the lungs, their characteristics, their main function, detailing some aspects of the respiratory process; the main pulmonary diseases are indicated and how to prevent them. A model is made by means of a system of differential equations that simulates the blood oxygenation process, a qualitative study is made, and conclusions are given regarding the functioning in a healthy person; in the critical case of a zero and a negative eigenvalue, the system is reduced to the quasi-normal form to facilitate qualitative study.

Key words and phrases: Lung, qualitative study, mathematical model, breathing.

Abstract

En este artículo, se realiza un estudio general sobre los pulmones, sus características, su función principal, que detalla algunos aspectos del proceso respiratorio. Se indican las principales enfermedades pulmonares y cómo prevenirlas. Se elabora un modelo mediante un sistema de ecuaciones diferenciales que simula el proceso de oxigenación de la sangre, se realiza un estudio cualitativo y se dan conclusiones sobre el funcionamiento en una persona sana; en el caso crítico de un valor propio cero y uno negativo, el sistema se reduce a la forma casi normal para facilitar el estudio cualitativo.

Palabras y frases clave: Pulmón, estudio cualitativo, modelo matemático, respiración.

1 Introduction

The lungs are spongy and elastic organs formed by millions of air-filled alveoli. It is approximately 25 cm long and 700 g in weight. The right lung is larger in width than the left, as it has three lobes, one more than the left, but it is shorter in height, because on the right side the liver is present, causing the diaphragm to be higher. In the left lung there is a cardiac notch.

The lungs are attached to the pericardium through pulmonary ligaments and to the trachea and heart by structures called the hilum, comprising pulmonary vessels, lymphatic vessels, bronchial vessels, main bronchi and nerves that arrive and leave the lungs. The lungs are covered by a thin layer, the pleura that consists of a transparent and thin membrane. The inner pleura is attached to the pulmonary surface, and the outer pleura is attached to the wall of the rib cage. In the intermediate space of the pleura there is a small space, occupied by a lubricating liquid secreted by the pleura, this liquid is what holds the two pleuras together, due to surface tension, causing them to slide during breathing movements (cf. [6, 7]).

The base of each lung rests on the diaphragm, an organ that separates the chest from the abdomen, present only in mammals, promoting, together with intercostal muscles, respiratory movements. In the lungs, the bronchi ramify intensely, giving rise to increasingly thin tubes, the bronchioles. The highly branched set of bronchioles is the bronchial tree or respiratory tree.

In pulmonary breathing, air enters and leaves the lungs due to contraction and relaxation of the diaphragm. When the diaphragm contracts, it decreases the pressure in the lungs and the air outside the body enters rich in oxygen; process called inspiration. When the diaphragm relaxes, the pressure inside the lungs increases and the air that was inside now comes out with carbon dioxide; process called expiration.

People can stop breathing but no one can stop breathing for more than a few minutes, because the concentration of carbon dioxide in the blood gets so high that the body can no longer supply energy to the cells and the bulb, part of the nervous system that it forms the brain, sends nerve impulses to the diaphragm and intercostal muscles, so that they contract and breathing is resumed normally.

The person may suffer from different lung diseases such as, Bronchitis, Tuberculosis, Pulmonary emphysema, Pneumonia, Asthma, Lung cancer, etc. When inflammation occurs in an individual's lungs, more specifically in the alveoli, we call it pneumonia, due to infection caused by bacteria, viruses, fungi and other infectious agents. Pneumonia can cause death if left untreated; these diseases can damage the pulmonary alveoli, decreasing the lung's ability to perform its function (cf. [1, 2, 14, 16]).

The main purpose of the lungs is to supply our blood with oxygen, which is transported to the cells of the body. The other respiratory organs have the function of directing the air to the lungs, it is in them that the conversion of venous blood, blood low in oxygen and rich in carbon dioxide, into arterial blood, blood rich in oxygen occurs. When we breathe, we start a complex path, the air enters through the nose, or through the mouth, goes to the trachea following small tubes, the bronchi. From the bronchi, air is taken to other pulmonary regions; an involuntary movement that is controlled by the brain controls the entry and exit of air from the lungs.

Respiratory movement is controlled by a nerve center located in the spinal cord; under normal conditions, this center produces an impulse every 5 seconds, stimulating the contraction of the thoracic muscles and the diaphragm, where we inhale. However, when the blood becomes more acid due to the increase in carbon dioxide, the medullary respiratory center induces the acceleration of respiratory movements.

In the event of a decrease in the concentration of oxygen gas in the blood, the respiratory rate is also increased; this reduction is detected by chemical receptors located on the walls of the aorta and the carotid artery; however, when the air enters or leaves the organism through the mouth, however, the moistening and heating of the air is incomplete without the filtration of particles of dust, smoke, and even microscopic living beings, such as viruses and bacteria, capable of causing damage to our health. Some impurities are *filtered* in different organs of the respiratory system, but others are able to pass to the lungs, causing diseases.

Human beings have neurons in the bulb region that guarantee the regulation of breathing. The bulb perceives changes in the pH of the surrounding tissue liquid and triggers responses that guarantee changes in the respiratory rhythm. When carbon dioxide levels rise in the blood and cerebrospinal fluid, a drop in pH occurs. This happens due to the fact that the carbon dioxide present in these places can react with water and trigger the formation of carbonic acid.

The bulb then notices these changes, signals are sent to the intercostal muscles and diaphragm to increase the intensity and rate of breathing. When the pH returns to normal, there is a reduction in respiratory rate and intensity. It is worth noting that changes in the level of oxygen in the blood trigger few effects on the bulb. However, when the levels are very low, the breathing rate increases (cf. [3]).

Several works, books and articles related to processes in human life are known in which real problems are simulated by means of differential equations and systems of equations with the aim of being able to give conclusions about the processes, among others [5, 10, 12]. In cite 8 the authors simulate the process of polymer formation in the blood using autonomous systems of third and fourth order differential equations, giving conclusions about the formation of polymers and domains.

In [10] different problems of real life are treated by means of equations and systems of differential equations, all of them only in the autonomous case; where examples are further developed, and problems and exercises are placed so that they can be developed by the reader. The authors of [12] indicate a set of articles forming a collection of several problems that are modeled in different ways, but in general the qualitative and analytical theory of differential equations is used in both autonomous and non-autonomous cases.

A compartment system essentially consists of a finite number of interconnected subsystems, called compartments, which exchange between and with the environment, amount of concentration of materials or substances, each compartment is defined by its physical properties; in particular, the dynamics of a drug in the human body were treated; not all drugs have the same route, but in the ingestible case in [8], sufficient conditions are given for their elimination; the case of an inhalable drug is treated in [9] and injectable in [17], in all cases after the qualitative study of the system used in the modeling the future situation of the process is predicted.

Insulin is a hormone produced by the pancreas; its function is to act in the reduction of glycemia (blood glucose rate). It is responsible for the absorption of glucose by cells; when insulin-glucose dynamics are not natural in the human body, diabetes can be produced, this dynamics in both a normal and diabetic person is modeled in [4] and [13]. The case of tissue replacement is simulated in [11], the case of diabetic foot is treated.

Studies carried out in [13] have allowed the development of a mathematical model for the transmission of infectious diseases; this dynamic of contagion is modeled by means of sexual activity and, here, the concept of individuals susceptible to contagion with the disease is used.

The authors in [15], developed a mathematical model on the transmission of blennorrhagia, where they study exhaustively the behavior of the trajectories of the system that simulates the process in a neighborhood of the equilibrium points, offering conclusions regarding the future of the disease; giving a method for the identification of the coefficients, where there is a series of data corresponding to a given population.

2 Model formulation

In order to simulate the process of blood oxygenation through the lungs, it is necessary to take into account some basic principles regarding this process, firstly that the lungs do not provide more oxygen than our body needs, so in their variation will increase proportionally to the concentration of carbon dioxide and decrease proportionally to its own concentration; but in the variation of carbon dioxide, it is added proportionally to its concentration and decreased proportionally to the concentration of oxygen.

In order to formulate the model using a system of differentiable equations, the following variables will be introduced:
$\tilde{x}_1$ is the total concentration of oxygen in the lungs at the moment t.
$\tilde{x}_2$ is is the total concentration of carbon dioxide in the lungs at the moment t.
In addition, $\bar{x}_1$ and $\bar{x}_2$ the optimal values of oxygen and carbon dioxide in the lungs respectively.

Here the variables will be introduced x_1 and x_2 defined as follows:
$x_1 = \tilde{x}_1 - \bar{x}_1$ and $x_2 = \tilde{x}_2 - \bar{x}_2$ so if $\bar{x}_1 \to 0$ and $\bar{x}_2 \to 0$ the following conditions would be met $\tilde{x}_1 \to \bar{x}_1$ and $\tilde{x}_2 \to \bar{x}_2$, which would constitute the main objective of this work. So, the model will be given by the following system of equations

$$\begin{cases} x_1' = -a_1x_1 + a_2x_2 + X_1(x_1, x_2) \\ x_2' = -a_3x_1 + a_4x_2 + X_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{1}$$

Where the series $X_i(x_1, x_2)$, $i = 1, 2$ are disturbances of the system and have the following expressions:

$$X_i(x_1, x_2) = \sum_{|p|\geq 2} X_i^{(p)} x_1^{(p_1)} x_2^{(p_2)}, \quad |p| = p_1 + p_2, \quad (i = 1, 2).$$

The characteristic equation of the matrix of the linear part of the system (1) has the following form,

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -a_1 - \lambda & a_2 \\ -a_3 & a_4 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

This expression is equivalent to,

$$\lambda^2 + (a_1 - a_4)\lambda + a_2 a_3 - a_1 a_4 = 0 \tag{2}$$

In this case, applying the first approximation method, the following result is obtained.

Teorem 2.1. *The null solution of the system (1) is asymptotically stable if and only if the following conditions are met: $a_1 > a_4$ and $a_2 a_3 > a_1 a_4$, otherwise, it is unstable.*

The proof is a direct consequence of the conditions of the Hurwitz theorem, because in this case the main minors of the Hurwitz matrix are positive.

In this model it is absolutely possible the case where $a_2 a_3 = a_1 a_4$ and $a_1 > a_4$; this causes the matrix of the linear part of the system (1) to have a zero eigenvalue and a negative one; this constitutes a critical case, that is to say a case that cannot be solved by applying the method of first approximation. In that case, by means of a non-degenerate transformation $X = SY$, the system (1) can be transformed into the system,

$$\begin{cases} y_1' = Y_1(y_1, y_2) \\ y_2' = \lambda y_2 + Y_2(y_1, y_2) \end{cases} \tag{3}$$

Where $\lambda = -(a_1 + a_2) < 0$, as the system (3) constitutes a critical case, for which the first approximation method cannot be applied, in this case the second Lyapunov method will be applied once this system is reduced to the quasi-normal form.

Teorem 2.2. *The exchange of variables*

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + h_1(z_1) + h^0(z_1, z_2) \\ y_2 = z_2 + h_2(z_1) \end{cases} \tag{4}$$

transforms the system (3) into a quasi-normal form,

$$\begin{cases} z_1' = Z_1(z_1) \\ z_2' = \lambda z_2 + Z_2(z_1, z_2) \end{cases} \tag{5}$$

Where $h^0(z_1, z_2)$ and $Z_2(z_1, z_2)$ cancel each other out $z_2 = 0$.

Proof. Deriving the transformation (4) along the trajectories of the systems (3) and (5) the system of equations is obtained,

$$\begin{cases} p_2 \lambda h^0(z_1, z_2) = Y_1(z_1, z_2) - \dfrac{dh_1}{dz_1} Z_1(z_1) - \dfrac{\partial h^0}{\partial z_1} Z_1(z_1) \dfrac{\partial h^0}{\partial z_2} Z_2(z_1, z_2) \\ \lambda h_2(z_1) + Z_2(z_1, z_2) = Y_2(z_1, z_2) - \dfrac{dh_2}{dz_1} Z_1(z_1) \end{cases} \tag{6}$$

To determine the series that intervene in the systems and the transformation, we will separate the coefficients from the powers of degree $p = (p_1, p_2)$ in the following two cases:
Case I) Making in the system (6) $z_2 = 0$, is to say for the vector $p = (p_1, 0)$ results the system.

$$\begin{cases} Z_1(z_1) = Y_1(z_1 + h_1(z_1), h_2(z_1)) - \dfrac{dh_1}{dz_1} Z_1(z_1) \\ \lambda h_2(z_1) = Y_2(z_1 + h_1(z_1), h_2(z_1)) - \dfrac{dh_2}{dz_1} Z_1(z_1) \end{cases} \tag{7}$$

The system (7) allows determining the series coefficients, $Z_1(z_1)$, $h_1(z_1)$ and $h_2(z_1)$, where for being the resonant case $h_1(z_1) = 0$, and the remaining series are determined in a unique way.
Case II) For the case when $z_2 \neq 0$ of the system (6) it follows that,

$$\begin{cases} p_2 \lambda h^0 = Y_1(z_1, z_2 + h_2(z_1)) - \dfrac{\partial h^0}{\partial z_1} Z_1(z_1) - \dfrac{\partial h^0}{\partial z_2} Z_2(z_1, z_2) \\ Y_2(z_1 + h_1(z_1), z_2 + h_2(z_1)) = Z_2(z_1, z_2) \end{cases} \tag{8}$$

Because the system series (5) are known expressions, the system (8) allows you to calculate the series $h^0(z_1, z_2)$ and $Z_2(z_1, z_2)$. This proves the existence of variable exchange. In system (5) the function $Z_1(z_1)$ admits the following development in power series:

$$Z_1(z_1) = \alpha z_1^s + \dots$$

Where α is the first non-zero coefficient and s is the corresponding power. □

Teorem 2.3. *If $\alpha < 0$ and s is odd, so the trajectories of the system (5) are asymptotically stable, otherwise they are unstable.*

Proof. Consider the Lyapunov function defined positive,

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2)$$

The function $V(z_1, z_2)$ is such that its derivative along the trajectories of the system (5) has the following expression,

$$\alpha z_1^{s+1} + \lambda z_2^2 + R(z_1, z_2)$$

It can be seen that the derivative $V(z_1, z_2)$ is defined as negative, because with respect to z_1 in function $R(z_1, z_2)$ you only have terms of a degree greater than $s + 1$, however with respect z_2 the terms in this function are of a greater degree to the second. This coupled with that $V(z_1, z_2)$ is positive and guarantees the asymptotic stability of the null solution of the system (5). □

References

[1] Aguilar, B.; Libório, A.; Sánchez, S.; Ribeiro, Z.; Lacort, M.; Ferreira, R. and Ruiz, A. I.; *Mathematical Modeling of an Ingerable Drug*, IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM), **15** (2019), 75–80.

[2] Aguilar, B.; Leão, L.; Sánchez, S.; Oliveira, K.; Lacort, M.; Ferreira, R.; E. Rodrigues, E. and A. I Ruiz, A. I.; *Combined normal form in the model of an injectable drug*'. Journal of multidisciplinary engineering science and technology (JMEST), **7**, (2020), 11535–11540.

[3] Aguilar, B.; Fernándes, N.; Oliveira, K.; Rodrigues, E.; Leão, L.; Libório, A.; S. Sánchez, S. and A. I. Ruiz, A. I.; *Two critical cases of the model of an inhalable drug.* IOSR Journal of mathematics (IOSR-JM). **16**, (2020), 58–64.

[4] Cabal, C.; Sánchez, S.; Rodríguez, D.; Rodrigues, E.; Ribeiro, Z.; Ferreira, R.; Guerra, A. and Ruiz, A. I.; *Mathematical Modeling of Tissue regeneration in Diabetic Foot.* IOSR Journal of mathematics, **15**, (2019), 60–66.

[5] Chaveco, A. I. R. and others. *Modeling of Various Processes.* Appris, Brazil, 2018.

[6] Chaveco, A. I. R. and others. *Applications of Differential Equations in Mathematical Modeling.* CRV, Brazil, 2016.

[7] Chaveco, A. I. R.; Sánchez, S.; Fernández, A. *Mathematical modeling of the polymerization of hemoglobin S.* Lap Lambert Academic Publishing, Deutschland, 2015.

[8] Malek, E.; *Etology and Treatment of Community Acquired Pneumonia in Children.* J Pharm Belg, **62**, (2007), 21–24.

[9] R. H., Albert. *Diagnosis and treatment of acute bronchitis.* Am Fam Physician. **82** (2010), 1345–1350.

[10] Repilado, J. A.; Ruiz, A. I. and Bernal, A.; *Analysis and identification of a mathematical model of the transmission of infectious diseases.* Cienc. Mat, **16**, (1998), 65–69.

[11] Rodríguez, D.; Lacort, M.; Ferreira, R.; Sánchez, S.; Rodrigues, E.; Ribeiro, Z. and Ruiz, A. I.; *Model of the Dynamics Insulin-Glucose.* International Journal of Innovative Research in Electronics and Communications. **5**, (2018), 1–8.

[12] Rodríguez, D.; Lacort, M.; Ferreira, R.; Sánchez, S.; Chagas, F.; Ribeiro, Z. and Ruiz, A. I.; *Model of Dynamic Insulin-Glucose in Diabetic.* European Journal of Engineering Research and Science. **4**, (2019), 10–14.

[13] Sánchez, S.; Fernández, A.; Ribeiro, Z.; Lacortt, M.; Do Nascimento, R.; A. I. Ruiz, A. I.; *Model of Siklemia with Periodic Coefficients for a Combined Critical Case.* International Journal of Innovative Science, Engineering and Technology. **5** (2018), 117–124.

[14] Sánchez, S.; Fernández, A. and Ruiz, A. I.; *M*odel of Siklemia no autonomous with the coefficient periodic in general. Internacional Jurnal of Engineering and Applied Sciences. **5**, (2014), 30–34.

[15] Soto, E.; Fernándes, N.; Sánchez, S.; L. Leão, L.; Ribeiro, Z.; Ferreira, R. and Ruiz, A. I.; *Models of Sexually Transmitted Diseases.* European journal of engineering research and science. **4**, (2019), 1–11.

[16] Stocks, N.; *Lower Respiratory Tract Infections and Community Acquired Pneumonia in Adults.* Aust Fam Physician, **33**, 2004, 297–301.

[17] Xiao, K.; *Analysis of the Severity and Prognosis Assessment of Aged Patients with Community - Acquired neumonia: A Retrospective Study.* J Thorac Dis **5**, (2013), 626–633.

Divulgaciones Matemáticas Vol. 21, No. 1-2 (2020), pp. 54–77

Tópicos de Ultrafiltros

Topics of Ultrafilters

Franklin Galindo (franklingalindo178@gmail.com)
Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia.
Universidad Central de Venezuela.
Colaborardor Visitante del Departamento de Matemáticas del IVIC.

Resumen

Los ultrafiltros son objetos matemáticos muy importantes en la investigación matemática [6, 22, 23]. Existen una gran variedad de teoremas clásicos en diversas ramas de la matemática donde se aplican ultrafiltros en su demostración, y otros teoremas clásicos que tratan directamente sobre ultrafiltros. El objetivo de este artículo es contribuir (de una manera divulgativa) con la investigación sobre ultrafiltros describiendo las demostraciones de algunos de tales teoremas relacionados (de manera única o combinada) con topología, teoría de la medida, álgebra, combinaria infinita, teoría de conjuntos y lógica de primer orden, formulando además algunos problemas abiertos actuales de la teoría de conjuntos que se refieren a ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$, al Modelo de Mathias y al Modelo de Solovay.

Palabras y frases clave: ultrafiltros, aplicaciones de ultrafiltros, ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$.

Abstract

Ultrafilters are very important mathematical objects in mathematical research [6, 22, 23]. There are a wide variety of classical theorems in various branches of mathematics where ultrafilters are applied in their proof, and other classical theorems that deal directly with ultrafilters. The objective of this article is to contribute (in a divulgative way) to ultrafilter research by describing the demonstrations of some such theorems related (uniquely or in combination) to topology, measurement theory, algebra, combinatorial infinite, set theory and first-order logic, also formulating some updated open problems of set theory that refer to non-main ultrafilters on $\mathbb{N}$, the Mathias's model and the Solovay's model.

Key words and phrases: ultrafilters, ultrafilter applications, nonprincipal ultrafilter on $\mathbb{N}$.

1 Introducción

Los ultrafiltros son objetos matemáticos muy importantes en la investigación matemática [6, 22, 23]. Existen una gran variedad de teoremas clásicos en diversas ramas de la matemática donde se aplican ultrafiltros en su demostración, y otros teoremas clásicos que tratan directamente sobre

Recibido 20/02/2020. Revisado 28/04/2020. Aceptado 18/11/2020.
MSC (2010): Primary 03Exx; Secondary 03E05.
Autor de correspondencia: Franklin Galindo

ultrafiltros. El objetivo de este artículo es contribuir (de una manera divulgativa) con la investigación sobre ultrafiltros describiendo las demostraciones de algunos de tales teoremas relacionados (de manera única o combinada) con topología, teoría de la medida, álgebra, combinaria infinita, teoría de conjuntos y lógica de primer orden, formulando además algunos problemas abiertos actuales de la teoría de conjuntos que se refieren a ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$, al Modelo de Mathias y al Modelo de Solovay.

Según [6, p. V] un ultrafiltro es una asignación de valor de verdad a la familia de subconjuntos de un conjunto, y también es un método de convergencia infinita. De la primera manera de verlo (lógica) surge su conección con la lógica binaria y con la teoría de modelos, y de la segunda manera de verlo surge su conección con la topología y la teoría de conjuntos. Ambas maneras de considerarlo implican (por ejemplo) la propiedad de compacidad, en el primer caso la propiedad de compacidad de la lógica de primer orden (*Un conjunto de sentencias Σ tiene un modelo si, y solo si, cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo*) usando ultraproductos y el Teorema de Loś (ver [6, 5]), y en el segundo caso el Teorema de Tijonoj de la topología (*El producto de espacios topológicos compactos es un espacio compacto con la topología producto*, ver [6, 21]).

La definición de "Filtro" se debe a H. Cartan (ver [22]). Cartan fue quien primero los estudió hacia 1937-1940 (ver [3, 4]) y con tales entidades desarrolló completamente el tema de la convergencia en Bourbaki (ver [2]). Más recientemente los ultrafiltros han sido estudiados exhaustivamente por W. Confort y S. Negropontis (ver [6]), entre otros.

El orden expositivo del artículo es el siguente: En la primera sección se expondrán los conceptos de Filtros y Ultrafiltros, el Lema de Zorn y el Teorema del Ultrafiltro (siguiendo, entre otros, los textos [10, 20, 19]. Es importante destacar que al final de esta primera sección también se describirá una conexión de los ultrafiltros no principales y κ-completos con los cardinales grandes, específicamente con los cardinales medibles. En la segunda sección ("Ultrafiltros y Topología") se presentará una caracterización de la propiedad de compacidad de un espacio topológico cualquiera usando ultrafiltros, siguiendo el texto [12]. En la tercera sección ("Ultrafiltros y Teoría de la medida") se expondrá la demostración de un teorema que afirma que los ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$ no son medibles (considerados como subconjuntos del espacio de Cantor $(2^{\aleph_0}, t)$), tal demostración se realizará siguiendo, entre otros, los textos [1, 11] y la página web [30]. En la cuarta sección ("Ultrafiltros y Combinatoria infinita") se realizará una demostración del Teorema de Ramsey (infinito), siguiendo ideas del texto [5], tal demostración usa ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$ (vale la pena resaltar que existen demostraciones del Teorema de Ramsey que no usan ultrafiltros). En la quinta sección ("Ultrafiltros, Lógica, Álgebra y Topología") se presentará una demostración de que el teorema de compacidad para un lenguaje $\mathcal{L}$ de primer orden es equivalente a la compacidad del espacio de Stone correspondiente al álgebra de Lindenbaum de la lógica de primer orden, siguiendo, entre otros, la web [31] y los textos [5, 19, 24, 26] (El universo del espacio de Stone es un conjunto de ultrafiltros). En la sexta sección ("Ultrafiltros, Álgebra, Combinatoria infinita y Lógica") se expondrán las demostraciones de dos teoremas:

(1) El Teorema de Ramsey Finito, siguiendo las sugerencias del texto [21], tal teorema es un corolario del Teorema de Ramsey infinito, y por lo tanto se usan ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$ en su demostración (también se usa en su prueba el Teorema de Compacidad de la Lógica de primer orden), y

(2) la equivalencia entre cuatro versiones débiles (estrictamente) del Axioma de elección: El Teorema del Ideal Primo, el Teorema del Ultrafiltro, el Principio de Consistencia y el Teorema de Compacidad de la lógica de primer orden. Y en la séptima y última sección se

presentarán algunos problemas abiertos sobre los ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$, el Modelo de Mathias y el Modelo de Solovay ($L(\mathbb{R})$), dos modelos de ZF donde no vale el Teorema del Ultrafiltro. Tales problemas abiertos se pueden encontrar de manera implícita en los artículos [9, p. 468] y [8, p. 21] de Di Prisco y Henle.

Finalizo esta introducción agradeciendo al profesor Carlos Di Prisco por el apoyo que me ha brindado en mi investigación sobre ultrafiltros, una parte de dicha investigación esta presentada en este artículo.

2 Filtros, Ultrafiltros, Lema de Zorn, Teorema del Ultrafiltro

Definición 2.1. • Un *filtro* sobre un conjunto no vacío S es una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de S tal que:

(i) $S \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(ii) Si $X \in \mathcal{F}$ y $Y \in \mathcal{F}$, entonces $X \cap Y \in \mathcal{F}$.

(iii) Si $X \in \mathcal{F}$ y $X \subseteq Y$, entonces $Y \in \mathcal{F}$.

- Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto S. $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro si para cualquier $X \subseteq S$ se cumple que:
$$X \in \mathcal{F} \leftrightarrow S - X \notin \mathcal{F}.$$

- Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre un conjunto S. $\mathcal{F}$ es no principal si, y solo si, $\forall i \in S$, $\{i\} \notin \mathcal{F}$.

Ejemplos de filtros (ver [20, 5]):

(1) *Filtro trivial*: $\mathcal{F} = \{S\}$.

(2) Para cada $B \subseteq S$, $B \neq \emptyset$, el filtro $\mathcal{F}_B = \{Z \subseteq S : B \subseteq Z\}$ se llama *filtro principal* generado por B. Para $B = \{a\} \subseteq S$, $\mathcal{F}_B$ se escribe $\mathcal{F}_a$, $\mathcal{F}_a = \{Z \subseteq S : a \in Z\}$. Notar que $\mathcal{F}_a$ es un ultrafiltro principal.

(3) Sea S un conjunto infinito, el filtro $\mathcal{F} = \{X \in P(S) :\mid S - X \mid < \aleph_0\}$ se llama *filtro de Fréchet*. Notar que el filtro de Fréchet no es principal.

Dado cualquier conjunto infinito S siempre se puede construir un filtro no principal sobre S, que extiende al filtro de Fréchet sobre S usando la propiedad de intersección finita, tal como lo afirma el teorema que viene a continuación (Teorema 2.2(3)). Ya se demostró anteriormente que existen ultrafiltros principales, mediante un ejemplo, $\mathcal{F}_a$. Pero, ¿Existen ultrafiltros no principales?. La existencia de tales entidades matemáticas sólo se puede garantizar usando el Lema de Zorn, no hay otra manera [20, p. 75]. A continuación se presentará (después del Teorema 2.2) el Teorema del Ultrafiltro, el cual permitirá contar con tales entidades (ultrafiltros no princiales) las cuales son fundamentales para la investigación matemática como se ejemplificará en este artículo. El teorema del Ultrafiltro se prueba a partir del Lema de Zorn, lema que se formulará también en este trabajo.

Una familia G de conjuntos tiene la *propiedad de intersección finita* si para cualquier conjunto finito $H = \{X_1, \ldots, X_n\} \subseteq G$ se cumple que $H_1 \cap \ldots \cap H_n \neq \emptyset$.

Teorema 2.2. *1. Si Δ es una familia de filtros sobre S, entonces $\bigcap \Delta$ es un filtro sobre S.*

2. Si Ω es una $\subseteq$-cadena de filtros sobre S (es decir, $\forall X, Y \in \Omega$, $X \subseteq Y$ o $Y \subseteq X$), entonces $\bigcup \Omega$ es un filtro sobre S.

3. Si $G \subseteq P(S)$ tiene la propiedad de intersección finita, entonces existe un filtro $\mathcal{F}$ tal $\mathcal{F} \supseteq G$ ($\mathcal{F} = \{X \subseteq S : \exists Z_1, \ldots, Z_n \in G,\ Z_1 \cap \ldots \cap Z_n \subseteq X\}$).

Una prueba de este resultado puede encontrarse (entre otros) en [20, p.74] y [5, p. 212].

Teorema 2.3 (Teorema del Ultrafiltro (Tarski, 1930))**.** *Todo filtro se puede extender a un ultrafiltro.*

Como ya se dijo antes la demostración del Teorema del Ultrafiltro requiere del Lema de Zorn, una versión de dicha prueba puede encontrarse (entre otros) en [20, p. 75] y [5, p. 214]. A continuación se enuncia el Lema de Zorn después de presentar unas definiciones previas:

Definición 2.4. Sea A un conjunto y R una relación binaria en A (es decir, $R \subseteq A \times A$)

1. R es reflexiva si, y solo si, $\forall x \in A$ se tiene que (xRx).
2. R es simétrica si, y solo si, $\forall x, y \in A$ se se cumple que $xRy \to yRx$.
3. R es transitiva si, y solo si, $\forall x, y, z \in A$ se cumple la siguiente implicación $(xRy \wedge yRz) \to xRz$.
4. R es antisimétrica si, y solo si, $\forall x, y \in A$ se cumple que $(xRy \wedge yRx) \to x = y$.
5. R es una relación de equivalencia si R es una relación reflexiva, simétria y transitiva.

Definición 2.5. 1. Un orden parcial es un par $(P, \leq)$ donde P es un conjunto no vacío y "$\leq$" es una relación en P que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

2. Dado un orden parcial $(P, \leq)$ se dice $p < q \leftrightarrow (p \leq q \wedge p \neq q)$.
3. Sean (P, R) un orden parcial y $D \subseteq P$. $x \in P$ es un elemento minimal (máximal) de D si $x \in D$ y no existe ningún $z \in D$ tal que $z \neq x$ y zRx (xRz). x es una cota inferior (superior) de D si $\forall z \in D$ se tiene que $xRz \vee z = x$ $(zRx \vee z = x)$. x es un ínfimo (supremo) de D si x es cota inferior (superior) de D y, para todo $z \in P$, si z es una cota inferior (superior) de D, entonces $zRx \vee z = x$ $(xRz \vee z = x)$. x es un menor (mayor) elemento de D si $x \in D$ y $\forall z \in D$ se tiene que $xRz \vee z = x$ $(zRx \vee z = x)$.
4. Sea (P, R) un orden parcial. (P, R) es un orden lineal (o total) si la relación R satisface la propiedad de tricotomía: $\forall x, y \in P$ se tiene que $xRy \vee yRx \vee x = y$.
5. Sea (P, R) un orden parcial. (P, R) es un buen orden si para todo $X \subseteq P$ se cumple que: Si $X \neq \emptyset$, entonces X tiene un menor elemento. (Notar que todo conjunto bien ordenado es un conjunto linialmente ordenado). Un orden parcial o orden total o buen orden $(P, \leq)$ a veces se denotará por P.

Teorema 2.6 (Lema de Zorn)**.** *Sea (K, S) un conjunto parcialmente ordenado tal que cada $X \subseteq K$ totalmente ordenado tiene una cota superior en K. Entonces K tiene un elemento máximal.*

Es conocido que el Lema de Zorn es equivalente al Axioma de elección. Donde el Axioma de elección es la siguiente sentencia: *Todo conjunto tiene una función selectora.* (Dado un conjunto Z se dice que la función f es una función de elección - o una función selectora - para Z si el $Dom(f) = Z - \{\emptyset\}$ y para todo $W \in Dom(f)$, se tiene que $f(W) \in W$). Una prueba de la equivalencia puede encontrarse (entre otros) en [10, p. 83-85] y [13, p. 151-153]. También es conocido que el Lema de Zorn es equivalente al Principio del Buen Orden (*Todo conjunto se puede bien ordenar*). Una prueba de tal equivalencia puede encontrarse (entre otros) en [10, p. 82-85] y [13, p. 151-153, 196-197].

Volviendo a los filtros, otro ejemplo de filtro que no es ultrafiltro es el siguiente que se define después de presentar algunos conceptos previos (ver [10, 19]. Dicho filtro será importante en este artículo pues nos permitirá conectar ultrafiltros con los cardinales grandes, específicamente con los cardinales medibles:

Un número *ordinal* es un conjunto transitivo (x es transitivo si, y solo si, $\forall z$ se cumple $z \in x \to z \subseteq x$) estrictamente bien ordenado por la relación de pertenencia ($\in$). Cada número ordinal se puede considerar intuitivamente como el "tipo de orden" de un conjunto bien ordenado, pues todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único número ordinal. Un número ordinal es *límite* si no es sucesor de ningún otro ordinal. Un número *cardinal* es un número ordinal que no es equipotente a ninguno de sus elementos. Los números cardinales se pueden considerar intuitivamente como los números que miden la cantidad de elementos de un conjunto (finito o infinito).

Sea α un ordinal límite. Decimos que $\beta < \alpha$ es *cofinal* con α si existe una función creciente $f : \beta \longrightarrow \alpha$ tal que para todo $\xi < \alpha$, existe un $\delta < \beta$ tal $f(\delta) \geq \xi$ (es decir, la imagen de f es no acotada en α). Dado α, la *cofinalidad* de α, $cof(\alpha)$, es el menor ordinal cofinal con α. Con respecto a la cofinalidad se cumple lo siguiente: $cof(\alpha)$ es el menor cardinal β tal que existe una partición de α en β pedazos cada uno de los cuales tiene cardinalidad estrictamente menor que α. Un cardinal infinito κ es *regular* si es igual a su cofinalidad. Decimos que es *singular* en caso contrario ($cof(\alpha) < \alpha$). Un cardinal κ es un cardinal límite fuerte si para todo cardinal $\theta < \kappa$ se tiene que $2^\theta < \kappa$. Un cardinal $\kappa > \aleph_0$ es *inaccesible* si es regular y límite fuerte (Notar que si se quita la condición de que $\kappa > \aleph_0$ se tiene que $\aleph_0$ es un cardinal inaccesible).

Sea α un cadinal infinito. Un filtro D sobre I se llama α-*completo* si, y solo si,: $X \subseteq D$ y $| X | < \alpha$ implica $\bigcap X \in D$.

Sea $\kappa > \omega$ un cardinal regular. Se dice que un subconjunto $C \subseteq \kappa$ es *no acotado* (en κ) si para todo $\alpha < \kappa$ existe un $\beta \in C$ tal que $\beta \geq \alpha$. Se dice que un subconjunto $C \subseteq \kappa$ es *cerrado* si toda sucesión $\langle \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_\xi < \ldots \rangle$ $(\xi < \delta)$ de elementos de C, si $\delta < \kappa$, entonces el supremo de la sucesión, $\bigcup\{\alpha_\xi \mid \xi < \delta\}$, también pertenece a C. Un subconjunto $C \subseteq \kappa$ es *cerrado y no acotado* (CNA) en κ si es a la vez cerrado y no acotado en κ. Un conjunto $S \subseteq \kappa$ es *estacionario* si $S \cap C \neq \emptyset$ para todo CNA $C \subseteq \kappa$.

Consideremos el cardinal regular $\aleph_1$. Dos ejemplos de conjuntos cerrados y no acotados en $\aleph_1$ son: $\aleph_1$ (trivialmente) y $A = \{\alpha \in \aleph_1 : \alpha \text{ es límite}\}$. Y tres ejemplos de conjuntos estacionarios (en $\aleph_1$) es $\aleph_1$ (trivialmente), todo conjunto $C \subseteq \aleph_1$ que sea CNA, pues los conjuntos CNA forman una familia cerrada bajo intersecciones finitas (ver [10]), y $E^{\aleph_1}_\omega = \{\alpha < \aleph_1 : cof(\alpha) = \omega\}$ (ver [20]).

Sea κ un cardinal regular no numerable. La colección de todos los subconjuntos cerrados y no acotados de κ tiene la propiedad de intersección finita, y el filtro generado por dicha colección se puede expresar de la siguiente forma:

$$\{A \subseteq \kappa : \text{A contiene un subconjunto cerrado no acotado de } \kappa\}.$$

Tal filtro es no principal y es κ-completo. La demostración de que es κ-completo se encuentra en [[20], p. 57]. Se cumple que dicho filtro no es un ultrafiltro, pues existe un subconjunto estacionario de κ cuyo complemento es estacionario, una demostración de tal hecho puede encontrarse en [19, p. 59]. Pregunta: ¿cuándo aplicamos el Teorema del ultrafiltro a tal filtro y obtenemos un ultrafiltro que lo contiene, tal ultrafiltro es también no principal y κ-completo?. Si volvemos al Teorema del Ultrafiltro podemos ver que el mismo permite inferir que existen ultrafiltros no principales sobre ω que son ω-completo (por ejemplo, el ultrafiltro que se obtiene a partir del filtro de Fréchet sobre ω es no principal y ω-completo), al tratar de generalizar esta propiedad a cardinales no numerables (que es el sentido de la pregunta anterior) llegamos al concepto de cardinal medible (ver [10, p. 128]):

> Un cardinal $\alpha > \aleph_0$ se dice que es *medible* si, y solo si, existe un ultrafiltro no principal y α-completo sobre α (Notar que si se quita la condición de que $\kappa > \aleph_0$ se tiene que $\aleph_0$ es un cardinal medible).

Se cumple que los cardinales medibles κ son cardinales inaccesibles, y además que existen κ cardinales inaccesibles menores que κ. También se cumple que si existen cardinales medibles, entonces el Axioma de constructibilidad ($V = L$) es falso. Una prueba de ambos resultados puede encontrarse en [5], entre otros.

3 Ultrafiltros y Topología

En esta sección presentaremos una caracterización de la propiedad de compacidad de un espacio topológico cualquiera usando ultrafiltros.

Definición 3.1. 1. Un espacio topológico es un par $(X, \mathcal{T})$ donde X es un conjunto no vacío, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y se cumple:

   (i) $X \in \mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$

   (ii) Si $O_1 \in \mathcal{T}$ y $O_2 \in \mathcal{T}$, entonces, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$

   (iii) Si $\mathcal{Z} = \{Z \subseteq X : Z \in \mathcal{T}\}$, entonces $\bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z \in \mathcal{T}$.

   Se dice que $\mathcal{T}$ es una topología para X. Los elementos de $\mathcal{T}$ se llaman abiertos. $Y \subseteq X$ es cerrado si, y solo si, $X - Y$ es abierto. Sea $W \subseteq X$. El interior de W, W°, es el mayor subconjunto abierto de X que esta contenido en W. La clausura de W, $\overline{W}$, es el menor subconjunto cerrado de X que contiene a W. W es denso en X si $\overline{W} = X$. X es separable si tiene un subconjunto denso numerable.

2. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Sean $V \subseteq X$ y $x \in X$. V es una vecindad de x si, y solo si, existe un conjunto abierto G tal que $G \subseteq V$ y $x \in G$.

3. Una familia de conjuntos $\mathcal{R}$ es un cubrimiento de un conjunto B si, y solo si, $B \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{R}} A$. La familia $\mathcal{R}$ es un cubrimiento abierto de B si, y solo si, los miembros de $\mathcal{R}$ son todos conjuntos abiertos. Un subcubrimiento de $\mathcal{R}$ es una subfamilia de $\mathcal{R}$ que también es cubrimiento. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es compacto si, y solo si, todo cubrimiento abierto de X admite un subcubrimiento finito.

Definición 3.2. Un filtro $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ converge si, y solo si, existe un $x \in X$ tal que toda vecindad de x, $V(x)$, pertenece a $\mathcal{F}$.

Teorema 3.3. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. $(X, \mathcal{T})$ es compacto si, y solo si, cualquier ultrafiltro sobre X converge.*

Demostración. (ver [12])

($\Rightarrow$): (Por reducción al absurdo). Supongamos que existe un ultrafiltro $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ que no converge. Entonces para todo $x \in X$ existe una vecindad de x, $V(x)$, tal que $V(x) \notin \mathcal{F}$. Para cada $x \in X$, sea $V'(x) \subseteq V(x)$ un abierto que contiene a x. Es claro que por ser $\mathcal{F}$ un filtro, $V'(x) \notin F$, para cada $x \in X$. Los abiertos $V'(x)$ constituyen un cubrimiento abierto de X, es decir, $X \subseteq \bigcup_{x \in X} V'(x)$. Por lo tanto, como $(X, \mathcal{T})$ es compacto, existe un subcubrimieto finito de X, es decir, existen $\{V'(x_1), \ldots, V'(x_n)\} \subseteq \{V'(x) : x \in X\}$ tal que $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V'(x_i)$. Como $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro los complementos $X - V'(x_i) \in \mathcal{F}$, para todo $i = 1, ..., n$. Dado que $\mathcal{F}$ es un filtro la intersección finita de tales conjuntos pertenece al mismo, es decir, $[X - V'(x_1) \cap \ldots \cap X - V'(x_n)] \in \mathcal{F}$. Como $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V'(x_i)$, se tiene que $[X - V'(x_1) \cap \ldots \cap X - V'(x_n)] = \emptyset$, y por lo tanto $\emptyset \in \mathcal{F}$, esto contradice que $\mathcal{F}$ es un filtro. En conclusión, cualquier ultrafiltro sobre X converge.

($\Leftarrow$): (Por reducción al absurdo). Supongamos que X tiene un cubrimiento abierto, $X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, que no admite subcubrimiento finito. Entonces consideramos el conjunto F de todos los complementos de uniones finitas de tales abiertos A_i, es decir,

$$F = \{X - (A_0 \cup \ldots \cup A_n) : \{A_0, \ldots, A_n\} \subseteq \{A_i\}_{i \in I}\}.$$

Como F tiene la propiedad de intersección finita, se tiene, por el ítem *3.* del Teorema 2.2, que existe un filtro sobre X generado por F, sea $\mathcal{F}$ dicho filtro. Luego, por el Teorema del Ultrafiltro se tiene que existe un ultrafiltro sobre X que contiene a $\mathcal{F}$, sea $\mathcal{F}^*$ dicho ultrafiltro. Para cada $x \in X$ existe un abierto A_i tal que $x \in A_i$, pues $X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Por otro lado, se cumple (por la definición de F) que $X - A_i \in \mathcal{F}^*$, para todo $i \in I$. Como $\mathcal{F}^*$ es un ultrafiltro se tiene que $A_i \notin \mathcal{F}^*$, para todo $i \in I$. En consecuencia, para cada $x \in X$, $\mathcal{F}^*$ no converge a x, es decir, $\mathcal{F}^*$ no converge. Esto contradice la hipótesis, en conclusión $(X, \mathcal{T})$ es compacto. □

4 Ultrafiltros y Teoría de la medida

En esta sección presentaremos una demostración de que los ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$ no son medibles, considerados como subconjuntos del espacio de Cantor. Donde el espacio (topológico) de Cantor es el par $(2^{\aleph_0}, t)$ con t la topología generada por los abiertos básicos de la forma: $V_s = \{f \in 2^{\aleph_0} : s(i) = f(i), \forall i \in Dom(s)\}$, donde s es una sucesión finita de ceros y unos.

Para poder realizar nuestra demostración es necesario tener en cuenta que:

1. Se puede dotar al espacio de Cantor con una medida μ tal que $\mu(2^{\aleph_0})$ =1, es decir, μ es una medida de probabilidad, μ se llama *la medida producto en* $2^{\mathbb{N}}$, (ver [11, p. 119-120]).

2. Un conjunto $X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ es *final* (también se denomina *conjunto cola* o *conjunto cerrado bajo conjuntos finitos*) si para todo $z \in X$ y $w \in 2^{\mathbb{N}}$ se cumple que si $\{n \in \mathbb{N} : z(n) \neq w(n)\}$ es finito, entonces $w \in X$.

Además es necesario el siguiente lema:

Lema 4.1. *[Ley 0-1] Sea $X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ un conjunto final μ-medible, entonces $\mu(X) = 0$ o $\mu(X) = 1$.*

Teorema 4.2. *Los ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$ no son medibles (considerados como subconjuntos del espacio de Cantor $(2^{\aleph_0}, t)$).*

Demostración. Sea U un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$. U es un subconjunto de $P(\mathbb{N})$ que se puede ver como un subconjunto del espacio de Cantor $2^{\aleph_0}$ identificando los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que lo conforman con sus funciones características. Dotemos al espacio de Cantor con la medida producto μ, eśta se puede definir en varias etapas de la siguiente manera: En los abiertos básicos del espacio de Cantor se define $\mu(V_s) = \dfrac{1}{2^{Longitud(s)}}$, es decir, $\mu(V_s)$ está estrechamente relacionado con la longitud de s. Ejemplos:

$$\mu(V_{\langle 0\rangle}) = \frac{1}{2},\ \mu(V_{\langle 1\rangle}) = \frac{1}{2},\ \mu(V_{\langle 0,1\rangle}) = \frac{1}{4},\ \mu(V_{\langle 1,0\rangle}) = \frac{1}{4},\ \mu(V_{\langle 1,0,1\rangle}) = \frac{1}{8},\ \mu(V_{\langle 0,0,0\rangle}) = \frac{1}{8},\quad \text{etc.}$$

Esa medida se puede extender a todo conjunto abierto, pues todo conjunto abierto Z se puede expresar como la unión de vecindades básicas disjuntas dos a dos, $\mu(Z)$ es la suma infinita de la medida de las vecindades básicas. Luego, se extiende μ a $P(2^{\aleph_0})$ con una medida exterior $\mu^\star : P(2^{\aleph_0}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, donde $\overline{\mathbb{R}}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \cup \{+\infty\}$, usando el método de Carathéodory: Sea $A \subseteq 2^{\aleph_0}$,

$$\mu^\star(A) = inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_s{}^n) : (V_s{}^n)_{n=1}^{\infty},\ A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_s{}^n \right\}.$$

Después se define cuando un conjunto es $\mu^\star$-medible: Un conjunto $E \subseteq 2^{\aleph_0}$ se dice $\mu^\star$*-medible* si y sólo si para todo $A \subseteq 2^{\aleph_0}$ se tiene que,

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A \cap E^c).$$

Luego, se define la clase $\mathcal{M} \subseteq P(2^{\aleph_0})$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{M} = \{E \subseteq 2^{\aleph_0} : E \text{ es } \mu^\star \text{ -medible}\}.$$

Se cumple que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra sobre $2^{\aleph_0}$ que contiene a la σ-álgebra de los borelianos ($\mathcal{B}(2^{\aleph_0})$). También se cumple que $\mu^\star \restriction \mathcal{M}$ es una medida, por simplicidad se denotará a $\mu^\star \restriction \mathcal{M}$ por μ. Así, estamos trabajando en el espacio de medida de probabilidad $(2^{\aleph_0}, \mathcal{M}, \mu)$.

Aplicando la Ley 0-1 (Lema 4.2) procedemos de la siguiente manera: Supongamos que el ultrafiltro U de nuestra hipótesis es medible. Como U es un ultrafiltro, entonces U es una partición de $2^{\aleph_0}$, es decir, $2^{\aleph_0} = U \cup (2^{\aleph_0} - U)$. Entonces por la aditividad de μ se tiene que: $1 = \mu(2^{\aleph_0}) = \mu(U) + \mu(2^{\aleph_0} - U)$. En consecuencia, $\mu(U) = \frac{1}{2}$, pues la operación de intercambiar ceros y unos en una sucesión de ceros y unos (es decir, donde va 0 se coloca 1, y donde va 1 se coloca 0) es un automorfismo de $2^{\aleph_0}$ que preserva la medida (ver el caso de los abiertos básicos como un ejemplo), y este automorfismo manda U en $2^{\aleph_0} - U$, por lo tanto $\mu(U) = \mu(2^{\aleph_0} - U)$. Por otro lado, tenemos que por la Ley 0-1 se cumple que $\mu(U) = 0$ o $\mu(U) = 1$, pues U es un conjunto final o invariante por cambios finitos (ya que U no tiene conjuntos finitos por ser ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$). En consecuencia, $0 = \frac{1}{2}$ o $1 = \frac{1}{2}$, contradicción. Por lo tanto, U no puede ser medible. $\square$

Los detalles de la construcción de μ^*, y una prueba del Lema 4.1 (Ley 0-1), se pueden ver en el texto [11, p. 115-120]. También vale la pena ver los detalles de la construcción de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, usando el método de Carathéodory, que se encuentra en el texto [1, p. 26-37].

5 Ultrafiltros y Combinatoria infinita

En esta sección presentamos una demostración del Teorema de Ramsey (infinito) usando ultrafiltros no principales.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Definimos $[\mathbb{N}]^n = \{X \subseteq \mathbb{N} : |X| = n\}$. Es decir, el conjunto $[\mathbb{N}]^n$ es la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que tienen exactamente n elementos. Por otro lado, simbolizaremos por $^\wedge\{y_i\}_{i=1}^n$ al conjunto de elementos $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ tal que $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$.

Teorema 5.1 (Teorema de Ramsey, versión 1)**.** *Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $[\mathbb{N}]^n$ y $\{A_0, A_1\}$ una partición de $[\mathbb{N}]^n$ en dos pedazos, es decir, $[\mathbb{N}]^n = A_0 \cup A_1$ y $A_0 \cap A_1 = \emptyset$. Entonces existe un subconjunto infinito $J \subseteq \mathbb{N}$ tal que $[J]^n \subseteq A_0$ o $[J]^n \subseteq A_1$. (Se dice que el conjunto J es un homogéneo de la partición $\{A_0, A_1\}$).*

Demostración. (Ver [5]). Si $n = 1$, entonces el teorema se cumple trivialmente (es una versión infinita del "Principio del Palomar" o "Principio del Casillero").

Consideremos de ahora en adelante el orden usual de $\mathbb{N}$, es decir, $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \ldots < n < n+1 < \ldots$. Es claro que el conjunto $[\mathbb{N}]^n$ es equipotente al conjunto de todas la n-secuencias $<$-ordenadas de $\mathbb{N}$. Usaremos esta equipotencia en esta demostración.

Supongamos que $n > 1$. Sea D un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$, entonces se cumple que para cualquier $m \in \mathbb{N}$, $\{i \in \mathbb{N} : m < i\} \in D$.

Para cada $r < n$ se definen dos subconjuntos A_0^{n-r} y A_1^{n-r} de $[\mathbb{N}]^{n-r}$ por inducción sobre r como sigue:

Paso base: $r = 0$, entonces $A_0^n = A_0$ y $A_1^n = A_1$.

Paso inductivo: Supóngase que se han definido A_0^{n-r} y A_1^{n-r} tal que $[\mathbb{N}]^{n-r} \subseteq A_0^{n-r} \cup A_1^{n-r}$, entonces se definen $A_0^{n-(r+1)}$ y $A_1^{n-(r+1)}$ como sigue:

$$A_0^{n-(r+1)} = \{^\wedge\{y_i\}_{i=1}^{n-(r+1)} : \{i \in \mathbb{N} : y_{n-(r+1)} < i \text{ y } \{y_1, \ldots, y_{n-(r+1)}, i\} \in A_0^{n-r}\} \in D\},$$

$$A_1^{n-(r+1)} = \{^\wedge\{y_i\}_{i=1}^{n-(r+1)} : \{i \in \mathbb{N} : y_{n-(r+1)} < i \text{ y } \{y_1, \ldots, y_{n-(r+1)}, i\} \in A_1^{n-r}\} \in D\}.$$

(Observación sobre el paso inductivo: En la expresión anterior "$n - (r + 1)$" que se utiliza para generar los conjuntos restantes (A_0^{n-r} y A_1^{n-r} para todo $r < n$ distintos a A_0^n y a A_1^n) se procede a sustituir los valores desde $r = 0$ hasta $r = n - 2$, de esta manera se llega hasta $[\mathbb{N}]^1 \subseteq A_0^1 \cup A_1^1$, lo buscado.)

Por las propiedades de D se cumple que $[\mathbb{N}]^{n-(r+1)} \subseteq A_0^{n-(r+1)} \cup A_1^{n-(r+1)}$. En efecto, si se tiene que $[\mathbb{N}]^{n-(r+1)} \nsubseteq A_0^{n-(r+1)} \cup A_1^{n-(r+1)}$, entonces existe $^\wedge\{y_i\}_{i=1}^{n-(r+1)} \in [\mathbb{N}]^{n-(r+1)}$ tal que $^\wedge\{y_i\}_{i=1}^{n-(r+1)} \notin A_0^{n-(r+1)} \cup A_1^{n-(r+1)}$. En consecuencia:

$$\{i \in \mathbb{N} : y_{n-(r+1)} < i \text{ y } \{y_1, \ldots, y_{n-(r+1)}, i\} \in A_0^{n-r}\} \notin D,$$

$$\{i \in \mathbb{N} : y_{n-(r+1)} < i \text{ y } \{y_1, \ldots, y_{n-(r+1)}, i\} \in A_1^{n-r}\} \notin D.$$

De modo que, por ser D un ultrafiltro, se tiene que el complemento de dichos conjuntos pertenece a D, es decir,

$$S = \{i \in \mathbb{N} : (y_{n-(r+1)} < i) \rightarrow [\{y_1, \ldots, y_{n-(r+1)}, i\} \notin A_0^{n-r}]\} \in D$$

$$Q = \{i \in \mathbb{N} : (y_{n-(r+1)} < i) \to [\{y_1, \ldots, y_{n-(r+1)}, i\} \notin A_1^{n-r}]\} \in D.$$

Entonces, por ser D un filtro, se tiene que:

$$S \cap Q \in D.$$

Luego, como D es un ultrafiltro no principal, D no tiene conjuntos finitos, así que $S \cap Q$ es infinito. En consecuencia, existe un $k \in \mathbb{N}$, $k > y_{n-(r+1)}$ tal que $\{y_1, \ldots, y_{n-(r+1)}, k\} \notin A_0^{n-r}$ y $\{y_1, \ldots, y_{n-(r+1)}, k\} \notin A_1^{n-r}$. Por lo tanto, $[\mathbb{N}]^{n-r} \not\subseteq A_0^{n-r} \cup A_1^{n-r}$. Esto contradice la hipótesis inductiva. Se concluye entonces lo que se quiere: $[\mathbb{N}]^{n-(r+1)} \subseteq A_0^{n-(r+1)} \cup A_1^{n-(r+1)}$.

A partir del paso final del procedimiento inductivo anteriormente realizado tenemos el siguiente hecho $\mathbb{N} \subseteq A_0^1 \cup A_1^1$. Como $\mathbb{N} \in D$ y D es cerrado hacia arriba se tiene que $A_0^1 \cup A_1^1 \in D$, en consecuencia $A_0^1 \in D$ o $A_1^1 \in D$, porque D es un ultrafiltro. El hecho de que $A_0^1 \in D$ o $A_1^1 \in D$ también se puede demostrar por reducción al absurdo usando ideas parecidas a las que se utilizaron anteriormente para probar que $[\mathbb{N}]^{n-(r+1)} \subseteq A_0^{n-(r+1)} \cup A_1^{n-(r+1)}$.

El argumento que se realizará en lo sucesivo se divide en dos casos simétricos dependiendo de si $A_0^1 \in D$ o $A_1^1 \in D$.

Caso 1: ($A_0^1 \in D$). Se define de manera inductiva una sucesión infinita

$$j_0 < j_1 < j_2 < j_3 < j_4 < \ldots < j_m < j_{m+1} < \ldots$$

de elementos de $\mathbb{N}$ como sigue:

Paso base: Sea $j_0 \in A_0^1$ el primer elemento de A_0^1.

Paso inductivo: Sea $m \in \mathbb{N}$ y supongamos que $j_0 < \ldots < j_m$ han sido definidos de tal forma que se cumple la siguiente propiedad:

$$\forall\ r,\ 1 \leq r \leq n,\ \text{ y } \forall\, ^\wedge\{y_i\}_{i=1}^r \subset \{j_0, \ldots, j_m\},\ \text{ se tiene que } ^\wedge\{y_i\}_{i=1}^r \in A_0^r \tag{1}$$

Entonces se define j_{m+1} de la siguiente manera:

Por la propiedad (1) y por la definición de los subconjuntos A_0^{n-r} y A_1^{n-r} de $[\mathbb{N}]^{n-r}$, dado $^\wedge\{y_i\}_{i=1}^r \subset \{j_0, \ldots, j_m\}$ con $r < n$, el conjunto

$$X_{y_1 \ldots y_r} = \{i \in \mathbb{N} : y_r < i \text{ y } \{y_1, \ldots, y_r, i\} \in A_0^{r+1}\} \in D.$$

Dado que existen a lo más un número finito de conjuntos de la forma $^\wedge\{y_i\}_{i=1}^r$ con longitud a lo sumo $r = n-1$ cuyos elementos son del conjunto $\{j_0, \ldots, j_m\}$, pues para cada $r < n$ la cantidad de conjuntos $^\wedge\{y_i\}_{i=1}^r$ de logintud r es exactamente el número combinatorio o coeficiente binomial $C_{(m,r)} = \dfrac{m!}{r!.(m-r)!}$, se concluye que el número de conjuntos $X_{y_1 \ldots y_r}$ es finito, y por lo tanto su intersección Y está en D. Como D es un ultrafiltro no principal, Y es infinito, y nosotros podemos fijar un elemento $j_{m+1} \in Y$ tal que $j_{m+1} > j_m$ (tomamos el menor elemento de Y). Es claro, por la definición de j_{m+1}, que se cumple la propiedad (1) si se reemplaza m por $m+1$.

Procediendo de la manera anterior se puede apreciar que el conjunto infinito

$$J = \{j_0, j_1, j_2, j_3, j_4, \ldots, j_m, j_{m+1}, \ldots\}$$

puede ser construido. Por la propiedad (1), para cualquier conjunto $^\wedge\{y_i\}_{i=1}^n \subset J$ se cumple que $^\wedge\{y_i\}_{i=1}^n \in A_0^n = A_0$, es decir, $[J]^n \subseteq A_0$.

Caso 2: ($A_1^1 \in D$). Se procede de manera análoga al Caso 1, y se demuestra que $[J]^n \subseteq A_1$. $\square$

Corolario 5.2 (Teorema de Ramsey, versión 2)**.** *Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ y $[\mathbb{N}]^n$. Y sea $\{A_i\}_{i=1}^k$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$, una partición de $[\mathbb{N}]^n$, es decir, $[\mathbb{N}]^n = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$, y los A_i son disjuntos dos a dos. Entonces existe un subconjunto infinito $J \subseteq \mathbb{N}$ y existe un $d \in \mathbb{N}$, $0 \leq d \leq k$, tal que $[J]^n \subseteq A_d$.*

Demostración. Se demuestra aplicando reiteradamente el Teorema de Ramsey (versión 1) y aplicando reiteradamente la propiedad asociativa (de conjuntos) entre los elementos de la partición, siempre particionándolo en dos pedazos para poder aplicar el Teorema de Ramsey (versión 1). El conjunto homogéneo J se consigue en un número finito de pasos porque el número de pedazos de la partición es finito. □

6 Ultrafiltros, Lógica, Álgebra y Topología

En esta sección presentamos una demostración de que el Teorema de Compacidad para un lenguaje $\mathcal{L}$ de primer orden es equivalente a la compacidad del espacio de Stone correspondiente al álgebra de Lindenbaum de $\mathcal{L}$.

Teorema 6.1. *El teorema de compacidad para un lenguaje $\mathcal{L}$ de primer orden es equivalente a la compacidad del espacio de Stone correspondiente al álgebra de Lindenbaum de $\mathcal{L}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea K el conjunto de todas las sentencias de $\mathcal{L}$. Nosotros consideramos la relación de equivalencia $\vdash \sigma \leftrightarrow \rho$ sobre K. El conjunto cociente B de todas las clases de equivalencia $\{[\sigma] : \sigma \in K\}$, con las siguientes operaciones:

$$[\sigma] + [\rho] = [\sigma \vee \rho], \qquad [\sigma] \,.\, [\rho] = [\sigma \wedge \rho],$$

$$[\sigma]' = [\neg\sigma], \qquad 0 = [\sigma \wedge \neg\sigma],$$

$$1 = [\sigma \vee \neg\sigma].$$

es un álgebra booleana llamada *álgebra de Lindenbaum* y la denotaremos por $\mathcal{B}_\mathcal{L}$ (ver la definición de álgebra booleana en la sección 7.2 de este artículo, ver [31]).

El espacio topológico de Stone $(X, \mathcal{T})$ correspondiente a $\mathcal{B}_\mathcal{L}$ se define como sigue:

$$X = \{T_\mathcal{F} : T_\mathcal{F} \text{ es una teoría completa y consistente en el lenguaje } \mathcal{L} \text{ correspondiente al ultrafiltro } \mathcal{F} \text{ sobre } \mathcal{B}_\mathcal{L}\},$$

donde un conjunto de sentencias R del lenguaje $\mathcal{L}$ es una *teoría completa* si R es cerrada bajo la relación de deducibilidad (si $R \vdash \sigma$, entonces $\sigma \in R$. Esta propiedad significa que R es una teoría) y para cada sentencia ρ de $\mathcal{L}$ se cumple que: $\rho \in R$ o $\neg\rho \in R$ (esta propiedad significa que es R es completa). R es *consistente* si de R no se deduce una contradición: $\rho \wedge \neg\rho$. Es claro que el Teorema del Ideal Primo implica que X es distinto de vacío, pues dado $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre $\mathcal{B}_\mathcal{L}$ (por ejemplo el dual de un ideal primo sobre $\mathcal{B}_\mathcal{L}$ cuya existencia esta garantizada el Teorema del Ideal Primo) el conjunto de sentencias $T_\mathcal{F} = \{\sigma : [\sigma] \in \mathcal{F}\}$ es una teoría completa y consistente (por lo tanto $T_\mathcal{F}$ es una teoría maximal consistente). En efecto, para cada sentencia ρ de $\mathcal{L}$ se cumple que $1 = [\rho \vee \neg\rho] \in \mathcal{F}$, entonces $[\rho] + [\neg\rho] \in \mathcal{F}$, y por lo tanto $[\rho] \in \mathcal{F}$ o $[\neg\rho] \in \mathcal{F}$. De modo que $\rho \in T_\mathcal{F}$ o $\neg\rho \in T_\mathcal{F}$. $T_\mathcal{F}$ es cerrada bajo la relación de deducibilidad: Si $T_\mathcal{F} \vdash \rho$, entonces existen $\phi_1, \ldots, \phi_n \in T_\mathcal{F}$ tal que ρ se deduce de ellas, es decir, $\vdash (\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \rightarrow \rho$. En consecuencia, $[\phi_1]. \ldots .[\phi_n] \leq [\rho]$. Y como $\mathcal{F}$ es un filtro cerrado hacia arriba se concluye que

$\rho \in T$, pues $[\phi_1]. \ldots .[\phi_n] \in \mathcal{F}$. También se cumple que $T_{\mathcal{F}}$ es consistente, pues si $\rho \wedge \neg\rho \in T_{\mathcal{F}}$, entonces $0 = [\rho \wedge \neg\rho] \in \mathcal{F}$. Contradicción. Por lo tanto, $T_{\mathcal{F}}$ es consistente. El procedimiento inverso también se cumple, es decir, si Q es una teoría completa y consistente de $\mathcal{L}$, entonces el conjunto $\mathcal{F} = \{[\phi] : \phi \in Q\}$ es un ultrafiltro sobre $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$.

$\mathcal{T} \subseteq P(X)$ es la topología generada por los siguientes abiertos básicos:

$$U(\phi) = \{T_{\mathcal{F}} \in X : \phi \in T_{\mathcal{F}}\},$$

para cada sentencia ϕ del lenguaje $\mathcal{L}$. Denotaremos al espacio de Stone por $S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$. Notar que todos los abiertos básicos son también conjuntos cerrados pues $U(\sigma)$ es el complemento de $U(\neg\sigma)$, y viceversa.

Probemos que el Teorema de Compacidad de $\mathcal{L}$ implica la compacidad de $S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$. Sea $\{U(\phi_i) : i \in I\}$ un cubrimiento abierto de $S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$, es decir, $S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}}) = \bigcup_{i\in I} U(\phi_i)$. Esto significa que para cualquier teoría $T_{\mathcal{F}} \in S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$ existe $i \in I$ tal que $\phi_i \in T_{\mathcal{F}}$. Se afirma que tal cubrimiento admite un subcubrimento finito. En efecto: Si no admite un subcubrimiento finito, entonces el conjunto $\{\neg\phi_i : i \in I\}$ es finitamente consistente (cada subconjunto finito de dicho conjunto es consistente), porque dado un subconjunto finito $\{\neg\phi_{i1}, \ldots, \neg\phi_{in}\} \subseteq \{\neg\phi_i : i \in I\}$ existe (por la hipótesis de absurdo) una teoría $T_{\mathcal{F}} \in S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$ tal $T_{\mathcal{F}} \notin U(\phi_{i1}) \cup \ldots \cup U(\phi_{in})$. Luego, $\{\neg\phi_{i1}, \ldots, \neg\phi_{in}\} \subseteq T_{\mathcal{F}}$ y como $T_{\mathcal{F}}$ es consistente, se tiene que $\{\neg\phi_{i1}, \ldots, \neg\phi_{in}\}$ es consistente. De modo que $\{\neg\phi_i : i \in I\}$ es finitamente consistente (y por el Teorema de completitud de Gödel dicho conjunto es finitamente satisfacible, es decir, cada subconjunto finito del mismo tiene un modelo). En consecuencia, por el Teorema de Compacidad el conjunto $\{\neg\phi_i : i \in I\}$ tiene un modelo, y por lo tanto es consistente. Así que por el Lema de Lindenbaum (o por el Lema de Zorn) el conjunto $\{\neg\phi_i : i \in I\}$ se puede extender a un conjunto maximal consistente Σ, el cual es una teoría completa y consistente que se corresponde con un ultrafiltro sobre $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$, y en consecuencia, $\Sigma \in S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$, pero no existe un $i \in I$ tal que $\Sigma \in U(\phi_i)$. Contradicción. Por lo tanto, el cubrimiento abierto $\{U(\phi_i) : i \in I\}$ de $S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$ admite un subcubrimento finito.

Ahora probaremos que la propiedad de compacidad de $S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$ implica el Teorema de Compacidad de $\mathcal{L}$: (Probaremos el Teorema de Compacidad de $\mathcal{L}$ usando la ley lógica de contraposición).

Sea $\{\phi_i : i \in I\}$ un conjunto inconsistente de sentencias de $\mathcal{L}$, entonces el conjunto $\{U(\neg\phi_i) : i \in I\}$ forma un cubrimiento abierto de $S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$, pues para cada teoría $T_{\mathcal{F}} \in S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$ se cumple que $\{\phi_i : i \in I\} \nsubseteq T_{\mathcal{F}}$, ya que $T_{\mathcal{F}}$ es consistente. Por hipótesis este cubrimiento abierto admite un subcubrimiento finito: $\{U(\neg\phi_{i1}), \ldots, U(\neg\phi_{in})\}$. Por lo tanto, el conjunto $\{\phi_{i1}, \ldots, \phi_{in}\}$ es inconsistente. En efecto: Si $\{\phi_{i1}, \ldots, \phi_{in}\}$ es consistente, entonces usando el Lema de Lindenbaum (o el Lema de Zorn) se puede extender dicho conjunto a un conjunto maximal consistente E, el cual es una teoría completa y consistente que se corresponde con un ultrafiltro sobre $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$, es decir, se cumple que $E \in S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$. Pero $E \notin U(\neg\phi_{i1}) \cup \ldots \cup U(\neg\phi_{in})\}$. Contradicción. □

7 Ultrafiltros, Álgebra, Combinatoria infinita y Lógica

En esta sección presentamos dos demostraciones:

(a) Teorema de Ramsey Finito.

(b) Equivalencia del Teorema del Ultrafiltro, el Teorema del Ideal Primo, el Principio de Consistencia y el Teorema de Compacidad de la lógica de primer orden. (A veces nos referiremos a la lógica de primer orden utilizando la siguiente expresión: $\mathcal{L}_{\omega\omega}$).

7.1 Ultrafiltros, combinatoria y Lógica de primer orden

Demostraremos en esta subsección el Teorema de Ramsey Finito. Para enunciar dicho teorema es conveniente introducir la siguiente notación:

Dado $n \in \mathbb{N}$, y dados cardinales α, β, γ, la notación

$$\alpha \to (\beta)^n_\gamma$$

significa que para cualquier partición en γ partes del conjunto de subconjuntos de n elementos de un conjunto A de cadinalidad α, existe un subconjunto $J \subseteq A$, de cardinalidad β, cuyos subconjuntos de n elementos estan todos en la misma parte. Equivalentemente, para toda $F : [\alpha]^n \longrightarrow \gamma$ existe $J \subseteq \alpha$, $|J| = \beta$, y existe $\delta \in \gamma$ tal que $F''[J]^n = \{\delta\}$. Tal conjunto J se dice que es un homogéneo para F. Con esta notación el Teorema de Ramsey (versión 1) se puede formular así:

$$\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_2, \ \ (n \in \mathbb{N} - \{0\}).$$

Y el Teorema de Ramsey (versión 2) se puede formular así:

$$\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_k, \ \ (n \in \mathbb{N} - \{0\}, k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}).$$

Ahora vamos a enunciar y demostrar el Teorema de Ramsey Finito:

Teorema 7.1.1 (Teorema de Ramsey Finito)**.** *Dados números naturales positivos k, r y m existe un entero positivo n tal que*

$$n \to (m)^r_k.$$

Demostración. Usaremos reducción al absurdo y el Teorema de Compacidad de $\mathcal{L}_{\omega\omega}$. (ver [21])

Considere el Cálculo de primer orden que tiene k-predicados r-ários P_i $(i = 1, \ldots, k)$, y una cantidad infinita de constantes $\{c_p : p \in \mathbb{N}\}$. Y considere la sentencia φ que afirma que los P_i constituyen una partición de r-tuplas, y que ningún m forma un conjunto homogéneo de dicha partición. Además de eso, agréguele a dicha sentencia φ la siguiente cantidad infinita de sentencias $c_p \neq c_q$ $(p \neq q)$. Es decir, estamos considerando el siguiente conjunto Σ de sentencias del Cálculo de primer orden referido:

$$\Sigma = \{\varphi\} \cup \{c_p \neq c_q : p, q \in \mathbb{N} \wedge p \neq q\}.$$

¿Y quién es φ?, φ es la conjunción de las siguientes sentencias:

$$\forall x_1 \ldots x_k \ \{[x_i \neq x_j (i \neq j)] \to [P_1(x_1 \ldots x_k) \vee \ldots \vee P_k(x_1 \ldots x_k)]\}.$$

$$\forall x_1 \ldots x_k \ \{[x_i \neq x_j (i \neq j)] \to [P_1(x_1 \ldots x_k) \to \neg P_2(x_1 \ldots x_k) \wedge \ldots \wedge \neg P_k(x_1 \ldots x_k)]\}.$$

Una sentencia de la forma anterior para el resto de los P_i, $2 \leq i < k$, por ejemplo para P_k es la siguiente (estas sentencias garantizan que los P_i sean una partición):

$$\forall x_1 \ldots x_k \ \{[x_i \neq x_j (i \neq j)] \to [P_k(x_1 \ldots x_k) \to \neg P_1(x_1 \ldots x_k) \wedge \ldots \wedge \neg P_{(k-1)}(x_1 \ldots x_k)]\}.$$

$$\neg \exists x_1 \ldots x_m \{[x_i \neq x_j (i \neq j)] \to \{[P_1(...) \wedge \ldots \wedge P_1(...)] \vee \ldots \vee [P_k(...) \wedge \ldots \wedge P_k(...)]\}\},$$

donde las conjunciones $[P_i(...) \wedge \ldots \wedge P_i(...)]$ son para todos los subconjuntos de cardinalidad r de los m elementos $x_1, \ldots, x_m$, tal cantidad de subconjuntos (finita) es exactamente el número combinatorio $C_{(m,r)}$. Esta sentencia afirma que la partición no tiene homogéneo de cardinalidad m.

Ahora bien, si el Teorema de Ramsey Finito es falso, es decir, si dados $k, r, m \in \mathbb{N}$, se cumple que para todo $n \geq r$ existe una $F : [n]^r \longrightarrow k$ que es una partición de $[n]^r$ en k elementos para la que no hay conjunto homogéneo de m elementos, entonces cualquier número finito de sentencias de Σ tiene un modelo de la forma $\mathfrak{A} = \langle n, A_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, A_k^{\mathfrak{A}}, c_{p_1}^{\mathfrak{A}}, \ldots c_{p_t}^{\mathfrak{A}} \rangle$, para n suficientemente grande (se construye con la F adecuada). Y por el teorema de compacidad para $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ se concluye que Σ tiene un modelo. Esto define una partición de $[\{c_p : p \in \mathbb{N}\}]^r$ que no tiene homogéneo de tamaño m, lo cual contradice el Teorema de Ramsey (versión 2). Por lo tanto, el Teorema de Ramsey Finito se cumple. $\square$

7.2 Ultrafiltros, Álgebra, Combinatoria infinita y Lógica de primer orden

Demostraremos en esta subsección que el Teorema del Ultrafiltro, el Teorema del Ideal Primo, el Principio de Consistencia y el Teorema de Compacidad de $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ son equivalentes. Todos estos principios, cuya equivalencia se probará, son versiones débiles (estrictas) del Axioma de elección. En efecto, Harpen y Levy demostraron en 1967 que en el Modelo Básico de Cohen vale el Teorema del Ultrafiltro y no vale el Axioma de elección (ver [16]). A continuación se presentan una serie de definiciones previas para proceder a formular los principios mencionados.

Defínción 7.2.1. Un *álgebra booleana* es un conjunto B con al menos dos elementos, 0 y 1 (cero y uno), dotado de dos operaciones binarias (suma) "+" y (producto) " $\centerdot$", con una operación unaria (complemento) " $'$", las cuales satisfacen las siguientes propiedades (axiomas):

$$a + b = b + a \; ; \; a \centerdot b = b \centerdot a \qquad \text{Leyes conmutativas}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \; ; \; (a \centerdot b) \centerdot c = a \centerdot (b \centerdot c) \qquad \text{Leyes asociativas}$$

$$a \centerdot (b + c) = (a \centerdot b) + (a \centerdot c) \; ; \; a + (b \centerdot c) = (a + b) \centerdot (a + c) \qquad \text{Leyes distributivas}$$

$$a + a = a \; ; \; a \centerdot a = a \qquad \text{Leyes de idempotencia}$$

$$a \centerdot (a + b) = a \; ; \; a + (a \centerdot b) = a \qquad \text{Leyes de absorción}$$

$$\left.\begin{array}{l} a + 1 = 1 \; ; \; a \centerdot 1 = a \\ a + 0 = a \; ; \; a \centerdot 0 = 0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{c}\text{Leyes de identidad} \\ \text{(elementos neutros y dominación)}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{c} a + (a') = 1 \; ; \; a \centerdot (a') = 0 \\ (a')' = a \end{array}\right\} \qquad \text{Leyes de complemento}$$

$$(a + b)' = a' \centerdot b' \; ; \; (a \centerdot b)' = a' + b' \qquad \text{Leyes de De Morgan}$$

Denotaremos a tal álgebra booleana así : $\mathcal{B} = \langle B, +, \centerdot, ', 0, 1 \rangle$.

Por simplicidad consideraremos que $\mathcal{B} = B$, a menos que el contexto requiera distinguirlos. El orden parcial de $\mathcal{B}$ se define así, $p \leq q \leftrightarrow p \centerdot q' = 0$. Si $a, b \in \mathcal{B}$, entonces: $a + b$ es el supremo de a y b, $a \centerdot b$ es el ínfimo de a y b, a' es el único $c \in \mathcal{B}$ tal que $a + c = 1$ y $a \centerdot c = 0$. También: $a \leq b \leftrightarrow a + b = b \leftrightarrow a \centerdot b = a$. Dos elementos a, b de $\mathcal{B}$ son incompatibles si, y solo si, $a \centerdot b = 0$. $a - b = a \centerdot b'$. $D \subseteq \mathcal{B}$ es denso en $\mathcal{B}$ si $D \subseteq \mathcal{B} - \{0\}$ y D es denso en $\mathcal{B} - \{0\}$, es decir, si $\forall\, b \in \mathcal{B} - \{0\}\, \exists\, d \in D\ (d \leq b)$. $\mathcal{B}$ es completa si el supremo de S ($\sum S$) y el ínfimo de S ($\prod S$) existen en $\mathcal{B}$, para cualquier $S \subseteq \mathcal{B}$. Sea κ un cardinal regular no numerable. $\mathcal{B}$ es κ-completa si $\sum X$ y $\prod X$ existen en $\mathcal{B}$, para todo subconjunto X de $\mathcal{B}$ tal que $|X| < \kappa$. Si $\mathcal{B}$ es $\aleph_1$-completa se dice que $\mathcal{B}$ es σ-completa. Un *átomo* del álgebra boolena $\mathcal{B}$ es un $a \in \mathcal{B}$ tal que $a \neq 0$ y no hay ningún elemento $x \in \mathcal{B}$ que esté entre 0 y a, es decir, $0 \leq x \leq a$ con $x \neq 0$ y $x \neq a$. Se dice que $\mathcal{B}$ es *atómica* si para cada $z \in \mathcal{B}$, $z \neq 0$, existe un átomo $w \in \mathcal{B}$ tal que $w \leq z$.

El álgebra de conjuntos $\langle \mathcal{F}, \cup, \cap, {}^c, \emptyset, S\rangle$ es un álgebra booleana. También ocurre la dirección inversa, es decir, que toda álgebra booleana es un álgebra de conjuntos, en rigor, se cumple el Teorema de Representación de Stone (1936) (ver [29]): "Toda álgebra booleana es isomorfa a un álgebra de conjuntos". Una prueba de este resultado puede encontrarse en [20, p. 81], [14], entre otros. Un caso bastante usado de álgebra de conjuntos es cuando $\mathcal{F} = P(S)$, es decir, $\langle P(S), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, S\rangle$. Sea S un conjunto con al menos dos elementos, entonces el álgebra booleana $\langle P(S), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, S\rangle$ es atómica. Los átomos son precisamente todos los subcojuntos unitarios $\{x\}$ de S. Vale la pena resaltar que dos ejemplos de álgebra booleana de conjuntos muy usados en matemáticas son la "σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue" y la "σ-álgebra de los conjuntos borelianos de un espacio topológico", la definición de ambas σ-álgebras puede encontrarse (entre otros) en los textos [1, 11, 20, 27].

Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana.

- Un *ideal* sobre $\mathcal{B}$ es un subconjunto $I \subseteq \mathcal{B}$ tal que:
  (a) $0 \in I$, $1 \notin I$
  (b) Si $x \in I$ y $z \in I$, entonces $x + z \in I$
  (c) Si $x, z \in \mathcal{B}$, $x \in I$ y $z \leq x$, entonces $z \in I$.
- Un ideal I sobre $\mathcal{B}$ es primo si: $\forall\, b \in \mathcal{B} \rightarrow (b \in I \vee b' \in I)$.

Ejemplos de ideales son (ver [20, 28]):

(1) Sea $\langle \mathcal{F}, \cup, \cap, {}^c, \emptyset, S\rangle$ un álgebra de conjuntos sobre S. Sea $K \in \mathcal{F}$ tal que $K \neq S$. Si definimos $I_K = \{X \in \mathcal{F} : X \subseteq K\}$, entonces I_K es un ideal sobre $\mathcal{F}$, el ideal generado por K.

(2) Sea $\mathcal{B} = \langle B, +, \centerdot, ', 0, 1\rangle$ un álgebra booleana:
  - $\{0\}$ es un ideal sobre $\mathcal{B}$.
  - Sea $b \in \mathcal{B}$, $b \neq 1$. Si definimos $I_b = \{x \in \mathcal{B} : x \leq b\}$, entonces I_b es un ideal sobre $\mathcal{B}$, el ideal generado por b.

(3) Los conjuntos borelianos de medida de Lebesgue cero son un ideal sobre la σ-algebra booleana de los borelianos del conjunto de los números reales ($\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

(4) Sea $(Y, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un conjunto $X \subseteq Y$ es *nunca denso* si $(\overline{X})^{\circ} = \emptyset$. Un conjunto E se dice que es *magro* si E es una unión numerable de conjuntos nunca densos. El conjunto de los conjuntos borelianos magro forman un ideal sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Teorema 7.2.2 (Teorema del Ideal Primo (Stone, 1936))**.** *Toda álgebra boleana tiene un ideal primo.*

La demostración del Teorema del Ideal Primo (TIP) se realiza usando el Lema de Zorn. Otra formulación equivalente del Teorema del Ideal Primo es la siguiente (ver [21]): *En cualquier álgebra booleana, cualquier ideal puede ser extendido a un ideal primo.*

La siguiente noción de "filtro" que se formulará a continuación, usando álgebras boolenas, generaliza el concepto de "filtro" ofrecido anteriormente en la sección 2, en dicha sección también se puede haber definido la noción de "ideal" en términos de conjuntos como se hizo con los "filtros" ver [19, 20], entre otros.

Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana.

(1) Un *filtro* sobre $\mathcal{B}$ es un subconjunto $F \subseteq \mathcal{B}$ tal que,

   (a) $1 \in F$, $0 \notin F$

   (b) Si $x \in F$ y $z \in F$, entonces $x.z \in F$

   (c) Si $x, z \in \mathcal{B}$, $x \in F$ y $x \leq z$, entonces $z \in F$.

(2) Sea F un filtro sobre $\mathcal{B}$. F es un ultrafiltro si $\forall\, x \in \mathcal{B}$ se tiene que $x \in F \,\vee\, -x \in F$.

Ejemplos de filtros son (ver [10, 26, 28]):

(1) Sea el álgebra de conjuntos sobre $\mathbb{N}$, $\langle P(\mathbb{N}), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, \mathbb{N}\rangle$. EL conjunto $F = \{X \in P(\mathbb{N}) : \mathbb{N} - X \text{ es finito}\}$ es un filtro sobre $\mathcal{F}$, el *Filtro de Fréchet* que se mencionó anteriormente en la sección 2.

(2) Sea $\langle \mathcal{F}, \cup, \cap, {}^c, \emptyset, S\rangle$ un álgebra de conjuntos sobre S. Sea $K \in \mathcal{F}$ tal que $K \neq \emptyset$. Se define $I_K = \{D \in \mathcal{F} : K \subseteq D\}$. I_K es un filtro sobre $\mathcal{F}$, el filtro generado por K que mencionó anteriormente en este artículo en la sección 2.

Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana. Sea I un ideal sobre $\mathcal{B}$, y definamos el filtro dual de I por $F^{DI} = \{b' \in \mathcal{B} : b \in I\}$. Sea F un filtro sobre $\mathcal{B}$, y definamos el ideal dual de F por $I^{DF} = \{b' \in \mathcal{B} : b \in F\}$. Existe un función inyectiva entre el conjunto de los ideales de $\mathcal{B}$ y el conjunto de los filros de $\mathcal{B}$. Recíprocamente: Existe una función inyectiva entre el conjunto de los filros de $\mathcal{B}$ y el conjunto de los ideales de $\mathcal{B}$ (ver [28]).

Teorema 7.2.3 (Teorema del Ultrafiltro (Tarski, 1930))**.** *Todo filtro en un álgebra booleana se puede extender a un ultrafiltro.*

Al igual que el TIP el Teorema del Ultrafiltro (TUF) se puede demostrar usando el Lema de Zorn (tal como se dijo en la sección 2).

Como se ha dicho anteriormente en este artículo, los ultrafiltros son fundamentales para la investigación matemática, en las secciones anteriores se han presentado algunos ejemplos. Otra aplicación de los ultrafiltros que se puede mencionar antes de continuar, es la que tiene que ver con el método de construcción de modelos llamado "ultraproductos" el cual tiene mucha utilidad en investigaciones matemáticas contemporáneas: En la Teoría de Conjuntos (por ejemplo en la investigación sobre cardinales grandes), en la Teoría de Modelos (por ejemplo en la prueba del Teorema de Compacidad usando el Teorema de Loś), en el Análisis no estándar (usando directamente el Teorema de Loś y el filtro de Fréchet, o usando el Teorema de Compacidad directamente), etc. (ver [7, 5, 24, 26]).

Veamos la siguiente definición para luego formular el Principio de Consistencia, según [21]:

Sea S un conjunto y M un conjunto de funciones definidas sobre subconjuntos finitos de S y valores en $\{0,1\}$. Se dice que M es un *desorden binario* sobre S si M satisface las siguientes propiedades:

(i) Para cada subconjunto finito $P \subseteq S$ existe una $t \in M$ tal que $Dom(t) = P$.

(ii) Para cada $t \in M$ y para cada subconjunto finito $P \subseteq S$, se cumple que la restricción $t \restriction P \in M$.

Sea $f : S \longrightarrow 2$, entonces f es *consistente* con un desorden binario M si para cualquier subconjunto finito $P \subseteq S$ se cumple que la restricción $f \restriction P \in M$.

Teorema 7.2.4 (Principio de Consistencia)**.** *Para cualquier desorden binario M sobre S existe una función $f : S \longrightarrow 2$ la cual es consitente con M.*

Más adelante ofreceremos una demostración del Principio de Consistencia que usa el TUF. Ahora formularemos el Teorema de Compacidad para $\mathcal{L}_{\omega\omega}$.

Teorema 7.2.5 (Teorema de Compacidad)**.** *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden de cuaquier cardinalidad, no necesariamente numerable. Sea Σ un conjunto de senencias de $\mathcal{L}$. Si cualquier subconjunto finito de Σ tiene un modelo, entonces Σ tiene un modelo.*

Existen varias maneras de probar el Teorema de Compacidad, como un corolario del Teorema de Completitud de Gödel, de manera directa usando ultraproductos (los cuales usan a su vez ultrafiltros), etc. (ver [5, 24]). Más adelante presentaremos una prueba del mismo usando el Principio de Consistencia.

Ahora probaremos el siguiente teorema:

Teorema 7.2.6. *La siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *Teorema del Ideal Primo*
2. *Teorema del Ultrafiltro*
3. *Principio de Consistencia*
4. *Teorema de Compacidad*

Demostración. (ver [21])

(1) $\Rightarrow$ (2): La prueba es directa usando la dualidad que existe entre ideales y filtros.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sea M un desorden binario sobre S. Debemos encontrar una función $f : S \longrightarrow 2$ que sea consistente con M. Sea I el conjunto de todos los subconjuntos finitos P de S. Para cada $P \in I$ sea M_P el conjunto finito de todas la $t \in M$ tal que $Dom(t) = P$. Notar que si P tiene n elementos, entonces M_P tiene a lo sumo 2^n elementos.

Sea Z el conjunto de todas las funciones z tal que:

(a) $Dom(z) \subseteq I$,

(b) $z(P) \in M_P$, para cada $P \in Dom(z)$,

(c) Para cada $P, Q \in Dom(z)$, las funciones $t_1 = z(P)$ y $t_2 = z(Q)$ son compatibles.

Un ejemplo de una función $z_0 \in Z$ se define a continuación usando las propiedades de M: Sean $E, H, D \in I$, entonces $E \cup H \cup D \in I$. En consecuencia, por las propiedad (i) de M, existe $g \in M$ tal que $Dom(g) = E \cup H \cup D$, es decir, $g \in M_{E \cup H \cup D}$. También, por la propiedad (ii) de M, se cumple que $g_1 = g \upharpoonright E \in M$, $g_2 = g \upharpoonright H \in M$ y $g_3 = g \upharpoonright D \in M$. Se cumple que $g_1 \in M_E$, $g_2 \in M_H$ y $g_3 \in M_D$, también ocurre que (por construcción) g_1, g_2 y g_3 son compatibles dos a dos. $Dom(z_0) = \{E, H, D\}$, $z_0(E) = g_1$, $z_0(H) = g_2$, $z_0(D) = g_3$. Así, $z_0 \in Z$.

Para cada $P \in I$, sea

$$X_P = \{z \in Z : P \in Dom(z)\}.$$

Formamos el conjunto $F = \{X_P : P \in I\}$. Se cumple que F tiene la propiedad de intersección finita (por las propiedades de M). En efecto, sea $X_{P_1}, \ldots, X_{P_n} \in F$, es claro que $P_1 \cup \ldots \cup P_n$ es un conjunto finito (porque todos los P_i son finitos) y que por lo tanto $P(P_1 \cup \ldots \cup P_n) \subseteq I$. Entonces existe una función $h \in M$ tal que $Dom(h) = P_1 \cup \ldots \cup P_n$. Para cada subconjunto $X \subseteq P_1 \cup \ldots \cup P_n$ se cumple que $h(X) = h \upharpoonright X \in M$. $h(X) \in M_X$. Como la cantidad de subconjuntos X es finita la cantidad de $h(X)$ es finita. Y como las $h(X)$ provienen de h ellas son compatibles dos a dos. Ahora se define la función $z_1 : P(P_1 \cup \ldots \cup P_n) \longrightarrow 2$ como sigue: $z_1(X) = h(X)$, para todo $X \subseteq P_1 \cup \ldots \cup P_n$. Se cumple que $z_1 \in Z$ y $z_1 \in X_{P_1} \cap \ldots \cap X_{P_n}$. Así que $X_{P_1} \cap \ldots \cap X_{P_n} \neq \emptyset$. Es decir, F tiene la propiedad de intersección finita.

Sea F^* el filtro sobre Z generado por F (según el Teorema 2.2(3)). Por el TUF sea F^{**} el untrafiltro sobre Z que extiene a F^*.

Para cualquier $P \in I$ el conjunto X_P es la siguiente unión disjunta:

$$X_P = X_{t_1} \cup \ldots \cup X_{t_m},$$

donde

$$\{t_1, \ldots, t_m\} = M_P \text{ y } X_t = \{z \in Z : z(P) = t\}.$$

En consecuencia, como F^{**} es un ultrafiltro y para cada $P \in I$

$$X_P = X_{t_1} \cup \ldots \cup X_{t_m} \in F^{**},$$

se cumple que existe un único $t = t(P) \in M_P$ tal que $X_t \in F^{**}$.

Sea $f = \bigcup\{t_P : P \subset S \text{ finito}\}$. Se cumple que $f : S \longrightarrow 2$, pues las funciones t_P son compatibles dos a dos. (Dados t_P y t_Q se tiene que $X_{t_P} \cap X_{t_Q} \in F^{**}$. Entonces, como F^{**} es un filtro, existe una función $z \in Z$ tal que $z \in X_{t_P} \cap X_{t_Q}$. En consecuencia, por la propiedad (c) de Z, se infiere que t_P y t_Q son compatibles). Por la definición de f se infiere que f es consistente con M.

(3) $\Rightarrow$ (4): Sea Σ un conjunto de sentencias de un lenguaje $\mathcal{L}$, y supongamos que cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo. Demostremos que Σ tiene un modelo.

Sea S el conjunto de todas las sentencias del lenguaje $\mathcal{L}$. Definimos un desorden binario M sobre S de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} t \in M \leftrightarrow \{&t \text{ función con dominio finito} \wedge Dom(t) \subseteq S \wedge rango(t) \subseteq 2 \\ &\wedge \exists \mathfrak{A}[\mathfrak{A} \text{ es un modelo de } \Sigma \cap Dom(t) \wedge \forall \theta \in Dom(t)\,(t(\theta) = 1 \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \theta)]\}. \end{aligned}$$

Como por hipótesis cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo, entonces se cumple que M es un desorden binario sobre S. En consecuencia, por el Principio de Consistencia, existe una función $f : S \longrightarrow 2$ la cual es consistente con M. Sea

$$\Sigma^* = \{\theta \in S : f(\theta) = 1\}.$$

Por la definición de M y por las propiedades de f, se infiere que $\Sigma \subseteq \Sigma^*$ y Σ^* es una teoría consistente y completa (por lo tanto es maximal consistente). Entonces, aplicamos la técnica de construcción de modelos a partir de constantes de Henkin para construir un modelo de Σ^* (ver [5]), es decir, usando la propiedad de consistencia de Σ^* se puede extender dicho conjunto a un conjunto Σ^{**} que es maximal consistente y que tiene a un conjunto de testigos C ($\Sigma^{**} \vdash \exists x\phi(x) \to \phi(c)$, para toda sentencia $\exists x\phi(x) \in S$), donde C es un conjunto de nuevas constantes que no estan en $\mathcal{L}$ tal que $|C| = |S|$, y con el conjunto de constantes C se construye un modelo para para Σ^{**}, sea $\mathfrak{B}$ dicho modelo, en consecuencia, como $\Sigma \subseteq \Sigma^* \subseteq \Sigma^{**}$, se concluye que $\mathfrak{B} \restriction \mathcal{L}$ es un modelo para Σ.

(4) $\Rightarrow$ (1): Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje para $\mathcal{B}$ que tiene una constante para cada elemento del universo de $\mathcal{B}$ (por simplicidad, identificamos cada $u \in \mathcal{B}$ con su correspondiente constante). También el lenguaje $\mathcal{L}$ tiene un símbolo de predicado monádico I y un símbolo de predicado relacional binario para la relación de orden del álgebra booleana $\leq$. Sea Σ el siguiente conjunto de sentencias (que afirman que la interpretación de I es un ideal primo sobre $\mathcal{B}$):

$I(0)\ \ \neg I(1)$,

$I(u) \vee \neg I(u')$ (para todo $u \in \mathcal{B}$),

$I(u_1) \wedge \ldots \wedge I(u_k) \to I(u_1 + \ldots + u_k)$ (para todo $u_1 \ldots u_k \in \mathcal{B}$),

$(I(u) \wedge v \leq u) \to I(v)$, (para todo $u, v \in \mathcal{B}$).

(Vale la pena resaltar que también se pueden haber agregado al conjunto de sentencias que se listaron anteriormente todos los axiomas de álgebra booleana y una caracterización completa de $\mathcal{B}$ usando a $\mathcal{L}$ (ver [26, p. 121-122]), pero por simplicidad esto no se hace, es suficiente con lo que realizamos).

Se cumple que cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo, porque cada subconjunto finito de $\mathcal{B}$ genera una subálgebra booleana finita de $\mathcal{B}$ y toda álgebra booleana finita tiene un ideal primo. Entonces por Teorema de Compacidad se tiene que Σ tiene un modelo. Usando la interpretación de I en tal modelo se define un ideal primo sobre $\mathcal{B}$. $\square$

Observación: Vale resaltar que el TUF es equivalente al Teorema de Representación de Stone formulado en la subsección 7.2 de este artículo, entre otras proposiciones (ver [21]). También con el TUF se puede demostrar el Teorema de Hahn-Banach (THB) del Análisis Funcional y tal implicación es estricta, es decir, el THB no implica el TUF (ver [21]). El TUF también implica que existe un conjunto de reales que no es medible Lebesgue (ver [17]). De igual forma el TUF implica al Teorema de Completitud para la lógica de primer orden (ver [26]). Para conocer otras consecuencias y proposiciones equivalentes del TUF ver [21] y [18], entre otros.

8 Algunos problemas abiertos en la Teoría de conjuntos relacionados con ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$

8.1 El modelo simétrico de Mathias y la proposición "Existen ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$"

Defінción 8.1.1 (Orden parcial homogéneo universal)**.** Sea $(P, <)$ un orden pacial numerable. $(P, <)$ es universal si cualquier orden parcial finito $(E, \prec)$ puede ser sumergido en $(P, <)$. $(P, <)$ es homogéneo si para cualesquiera subconjuntos finitos E_1 y E_2 de P, se cumple que si existe un isomorfismo i entre $(E_1, <)$ y $(E_2, <)$, entonces tal isomorfismo puede ser extendido a un automorfismo sobre $(P, <)$.

A continuación se presenta una definición (en ZFC) del Modelo Simétrico de Mathias ($\mathcal{M}_3$) que realiza Jech en [21, p. 113-114], ejercicio 8. La versión original de este modelo se encuentra en [25]. Jech usa el orden parcial de Cohen $(P, <)$ que agrega un cantidad numerable de reales genéricos a un modelo transitivo base M de ZFC, es decir,

$$P = \{p : p \text{ es una función finita} \wedge Dom(p) \subseteq \omega \times \omega \wedge rang(p) \subseteq \{0, 1\}\},$$

$$p < q \leftrightarrow p \supseteq q.$$

Consideremos el conjunto de los nombres canónicos $\{\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}, \ldots\}$ de los reales genéricos $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ agregados a M, es decir, $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \subseteq M[G] - M$. Dotamos a ω con un orden parcial homogeno universal $\ll$ (tal orden existe por el Lema 7.6 de [21, p. 102], y es único salvo isomorfismo, problema 7, [21, p. 113]). Sea $\mathcal{G}$ el grupo de automorfismos de $(P, <)$ inducidos por $\ll$-automorfismos del conjunto $\{\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}, \ldots\}$. Sea $\mathcal{F}$ el filtro normal generado por $fix(e)$, e finito (si $e \subseteq \omega$, entonces $fix(e) = \{\pi \in \mathcal{F} : \pi(n) = n, \forall n \in e\}$). Sea $\mathcal{M}_3$ el modelo simétrico dado por $\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{M}_3 = \{i_G(x) : x \in HS\}$, donde HS es la clase de los P-nombres hereditariamente simétricos. Se cumple que $M \subsetneqq \mathcal{M}_3 \subsetneqq M[G]$. $\mathcal{M}_3$ es un modelo transtivo de ZF. También en $\mathcal{M}_3$ es verdad OP (*Principio del Orden:* Todo conjunto se puede ordenar linealmente), pero es falso OEP (*Principio de Extensión del Orden*: Cualquier orden parcial de un conjunto P puede ser extendido a un orden lineal de P) pues el orden parcial $\ll$ del conjunto $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ no puede ser extendido a un orden lineal. Por lo tanto en $\mathcal{M}_3$ es falso el TUF, pues TUF $\to$ OEP $\to$ OP. En resumen, estos resultados indican que:

(a) OP $\not\to$ TUF (a pesar de que TUF $\to$ OP),

(b) OP $\not\to$ OEP (a pesar de que OEP $\to$ OP). Ver [17, 18, 21] para ampliar en las definiciones y demostraciones de estos resultados.

La siguiente pregunta se puede encontrar de manera implícita en los artículos [9, p. 468] y [8, p. 21] de Di Prisco y Henle:

Pregunta 8.1.2. *¿En $\mathcal{M}_3$ existen ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$?.*

Esta pregunta es pertinente pues en $\mathcal{M}_3$ no vale el TUF. Además de eso, responderla permitiría resolver la siguiente interrogante planteada en [9, p. 468] y [8, p. 21], la cuál formularemos luego de presentar la siguiente definición:

Definición 8.1.1. Un flitro (flitter) sobre $\mathbb{N}$ es un conjunto $\mathcal{F} \subseteq P(\mathbb{N})$ con la siguiente propiedad: Si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B$ o $A^c \cap B^c$ es infinito. Más concisamente: Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \triangle B$ es co-infinito. $\mathcal{F}$ es un ultraflitro (ultraflitter) sobre $\mathbb{N}$ si para todo $X \subseteq \mathbb{N}$ se tiene que $X \in \mathcal{F}$ o $X^c \in \mathcal{F}$.

Se puede demostrar, por un razonamiento análogo al usado en este artículo para el caso de los ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$, que los ultraflitros sobre $\mathbb{N}$ no son medibles, considerados como subconjuntos del espacio de Cantor.

Es claro que todo ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$ es un ultraflitro sobre $\mathbb{N}$, pero no se sabe si la dirección inversa vale, se sospecha que no, es decir, se tiene la conjetura de que la proposición "Existen ultraflitros sobre $\mathbb{N}$" es más débil que la proposición "Existen ultrafiltros no princiaples sobre ℕ”, (ver [9, p. 468] y [8, p. 21]). Y por un trabajo no publicado de Carlos Di Prisco, Nathan Bowler, Christian Delhommé, Marianne Morillon y Adrian Mathias titulado “Flutters an Chameleons”, se tiene la demostración de que OP implica que “Existen ultraflitros sobre ℕ”, de modo que en el Modelo de Mathias $\mathcal{M}_3$ existen ultraflitros. Entonces si la respuesta a la Pregunta 8.1.2 es NO, quedaría probado que “Existen ultraflitros sobre ℕ” $\not\rightarrow$ “Existen ultraflitros no principales sobre ℕ”. En conclusión, quedaría demostrado que la proposición “Existen ultrafiltros no principales sobre ℕ” es más fuerte estrictamente que la proposición “Existen ultraflitros sobre ℕ”, lo que se conjetura en [9, p. 468] y [8, p. 21].

8.2 El Modelo de Solovay y la proposición “Existen ultrafiltros no principales sobre ℕ”

Para construir al Modelo de Solovay ($L(\mathbb{R})$) necesitamos dos métodos de construcción de modelos de la teoría de conjuntos:

(I) El siguiente teorema nos ofrece un método (“el Colapso de Lévy”) para colapsar cardinales usando la técnica de forcing:

Teorema 8.2.1. *Sea κ un cardinal regular y $\lambda > \kappa$ un cardinal inaccesible. Entonces existe un orden parcial $(P, <)$ tal que:*

(a) Cualquier α, $\kappa \leq \alpha < \lambda$, tiene cardinal κ en M[G], y

(b) Cualquier cardinal $\leq \kappa$ y cualquier cardinal $\geq \lambda$ sigue siendo un cardinal en M[G],

En particular $M[G] \models \lambda = \kappa^+$.

Una demostración de este teorema puede encontrarse en [20]. El orden parcial $(P, <)$ utilizado, que se denota por $Col(\kappa, < \lambda)$, es el siguiente: P son todas las funciones cuyo dominio está contenido en $\lambda \times \kappa$ tal que

(i) $|Dom(p)| < \kappa$,

(ii) $p(\alpha, \xi) < \alpha$, para todo $(\alpha, \xi) \in Dom(p)$.

El orden parcial de P es: $p < q \leftrightarrow p \supseteq q$.

(II) *Constructibilidad relativizada* $L(A)$: Sea A un conjunto cualquiera, éste se dice transitivo si, y solo si, $\forall z$ se cumple que $(z \in X \rightarrow z \subseteq A)$. Además, se define la *clausura transitiva* de A como el menor conjunto (respecto a $\subseteq$) transitivo y que contiene a A. Se denotará por $Cl(A)$. Ahora, definimos el modelo $L(A)$ por inducción transfinita sobre los ordinales de la siguiente manera (ver [20]):

$$L_0(A) = Cl(\{A\})$$

$$L_{\alpha+1}(A) = \{X \subseteq L_\alpha(A) : X \text{ es definible con parámetros en la estructura } (L_\alpha(A), \in)\}$$

$$L_\lambda(A) = \bigcup_{\beta\in\lambda} L_\beta(A)\ , \quad \lambda \text{ límite}$$

$$L(A) = \bigcup_{\alpha\in Ord} L_\alpha(A).$$

Es importante destacar que el modelo $L(A)$ definido anteriormente se puede definir dentro de ZFC. Se cumple que $L(A)$ es un modelo transitivo de ZF que contiene a todos los ordinales. $L(A)$ es el menor modelo transitivo de ZF que contiene a los ordinales y a A.

(*Nota*: Este segundo método de construcción de modelos se puede haber sustituido por otro método, $HOD(A)$, la clase de todos los conjuntos hereditariamente definibles con ordinales con parámetros de A, y el propio A. Ver [20] o [19], entre otros.)

(III) Sea M un modelo transitivo de ZFC (M puede ser V, L, o un conjunto numerable). Sea λ un cardinal inaccesible en M. Sea $M[G]$ la extensión genérica que se obtiene aplicado el Colapso de Lévy: $Col(\aleph_0, < \lambda)$. Sea $\mathbb{R}$ en $M[G]$, y sea $L(\mathbb{R})$ en $M[G]$. $L(\mathbb{R})$ es el Modelo de Solovay, y la manera como se construyó es una de las formas que se utiliza para hacerlo.

Se cumple que $L(\mathbb{R})$ es un modelo de ZF (el Axioma de elección es falso en $L(\mathbb{R})$), y además se cumple en éste:

- El Principio de elecciones dependientes (DC).
- Todo conjunto de reales es medible Lebesgue y tiene la propiedad de Baire.
- Todo subconjunto no numerable de reales contiene un subconjunto perfecto.

Ver [20] o [19], entre otros, para las definiciones y la demostración de este teorema.

Como el TUF implica que existe un subconjunto de reales que no es medible Lebesgue, se infiere que en $L(\mathbb{R})$ es falso el TUF. Lo mismo ocurre con el principio "Existe un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$", ya que éste implica que existe un subconjunto de reales que no es medible Lebesgue (ver [6, p. 161-162]), entonces se concluye que en $L(\mathbb{R})$ no existen ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$.

Veamos ahora las siguientes preguntas sobre $L(\mathbb{R})$ y $\dfrac{P(\mathbb{N})}{fin}$. Donde $\dfrac{P(\mathbb{N})}{fin}$ es el conjunto cociente determinado por la relación de equivalencia en $P(\mathbb{N})$ definida así: $x \sim y$ si, y solo si, $x \triangle y$ es finito (es decir, x es equivalente a y si ellos son casi iguales). Tales preguntas están relacionadas con la proposición "Existen ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$" (y con la subsección anterior), y las mismas se pueden encontrar de manera implícita en los artículos [9, p. 468] y [8, p. 21] de Di Prisco y Henle:

Pregunta 8.2.2.

(1) ¿Existe una extensión genérica de $L(\mathbb{R})$, $L(\mathbb{R})[G]$, que contenga un orden lineal de $\dfrac{P(\mathbb{N})}{fin}$?

(2) ¿Y en tal extensión, $L(\mathbb{R})[G]$, existen ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$?.

Las preguntas tienen pertinencia pues en $L(\mathbb{R})$ no existen ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$ y no se sabe si en la extensión $L(\mathbb{R})[G]$ se agregó alguno (si se logra demostrar que existe tal extensión). Además, si en $L(\mathbb{R})[G]$ existe un orden lineal de $\dfrac{P(\mathbb{N})}{fin}$, y con dicho orden lineal se puede construir un ultraflitro sobre $\mathbb{N}$ (este es uno de los resultados demostrados en el trabajo no publicado -mencionado anteriormente- de Carlos Di Prisco, Nathan Bowler, Christian Delhommé, Marianne Morillon y Adrian Mathias titulado "Flutters an Chameleons"), entonces si la respuesta a la segunda pregunta de 8.2.2 es NO, se estaría demostrando, como en el caso del Modelo de

Mathias anterior que la proposición "Existen ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$" es más fuerte estrictamente que la proposición "Existen ultraflitros sobre $\mathbb{N}$", lo que se conjetura en [9, p. 468] y [8, p. 21]. El Modelo de Mathias ($\mathcal{M}_3$) y la posible extensión del modelo de Solovay $L(\mathbb{R})[G]$ son dos maneras naturales de tratar de responder tal interrogante abierta sobre ultraflitros sobre $\mathbb{N}$ y ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$.

Referencias

[1] Betz, C., *Introducción a la teoría de la medida e integración*. Univesidad Central de Venezuela. 1992.

[2] Bourbaki, N., *Topologie générale*, Actualités Sci. Ind. 858 (1940), 916 (1942), 1029 (1947), 1045 (1948), 1084 (1949), Paris.

[3] Cartan, H., *Théorie des filtres*, C.R. Acad. Sci. Paris (1937), 595–598.

[4] Cartan, H., *Filtres et ultrafiltres*, C. R. Acad. Sci. Paris (1937), 777–779.

[5] Chang, C. and Keisler, H., *Model Theory*. Dover Publications. 2012.

[6] Confort, W. and Negropontis, S., *The Theory of Ultrafilters*. Springer-Verlag. 1974.

[7] Corbillón, M., *Análisis real no estándar*. Tesis de licenciatura en Matemáticas. Tutor: Dr. Josep Maria Font Llovet. Facultat de Matemátiques. Universitat de Barcelona. 2015.

[8] Di Prisco, C. and Henle, H., *Doughnuts, Floating Ordinals, Square Brackets, and Ultraflitters*. Journal of Symbolic Logic **65**(2000), 462–473.

[9] Di Prisco, C. and Henle, H., *Partitions of the reals and choice*. En "Models, algebras and proofs". X. Caicedo y C. M. Montenegro. Eds. Lecture Notes in Pure and Appl. Math, 203, Marcel Dekker, 1999.

[10] Di Prisco, C., *Teoría de conjuntos*. Universidad Central de Venezuela. 2009.

[11] Di Prisco, C. y Uzcátegui, C., *Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos*. 2019. (En prensa).

[12] Dudley, R., *Real Analysis and Probabiblity*. Cambridge University Press. 2002.

[13] Enderton, H., *Elements of Set Theory*. Academic Press. New York. 1977.

[14] Galindo, F., *Álgebras booleanas, órdenes parciales y el axioma de elección*. Divulgaciones Matemáticas, **18**(1) (2017), 34–54.

[15] Halmos, P., *Measure Theory*. Springer-Verlag. 1970.

[16] Halpern, J. and Lévy, A., *The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice*. En " Axiomatic Set Theory" (D. S. Scoott, ed), Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, 1967.

[17] Herrlich, H., *Axiom of Choice*. Springer. 2006.

[18] Howard, P. and Rubin, J., *Consecuences of the Axiom of Choice*. American Mathematical Society. 1998.

[19] Jech, T., *Set Theory*. 1978

[20] Jech, T., *Set Theory*. Springer. 2000.

[21] Jech, T., *The Axiom Choice*. North-Holland Publishing Company. 1973.

[22] Kelley, J., *General Topology*. Springer. 1991.

[23] Kunen, K., *Set Theory*. Elsevier. 2006.

[24] Manzano, M., *Teoría de Modelos*. Alianza. Madrid. 1989.

[25] D. Mathias, A. R., *The Order Extension Principle*. Procedings of Symposia in Pura Mathematics, Vol. 13, Part II, 1974.

[26] Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman and Hall/CRL. U.S.A. 2009.

[27] Royden, H., *Real Analysis*. Pearson. 2010.

[28] Sikorski, R., *Boolean Algebras*. Springer-Verlag. 1960.

[29] Stone, M., *The theory of representations for Booleam algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 37–111. Zbl.014.34002

[30] `https://math.stackexchange.com/questions/1130615/non-measurability-of-ultrafilter-on-omega`

[31] Mathematics: Why is compactness in log called compactness? `https://math.stackexchange.com/questions/842/why-is-compactness-in-logic-called-compactness`

Divulgaciones Matemáticas Vol. 21 No. 1-2 (2020), pp. 78–80

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@gmail.com)
Departamento de Matemática, Facultad Experimental de Ciencias
Universidad del Zulia, Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor por correo electrónico, en español o inglés, a la dirección arriba indicada (preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX). Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editor, in Spanish or English, to the address given above (preferably as a LaTeX source file). Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

1 Problemas propuestos

El problema propuesto a continuación se planteó en la EGMO (European Girls Mathematical Olympiad) 2020, competencia que este año se realizó de manera virtual.

147. Los enteros positivos $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3030}$ satisfacen $2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots, 3028$. Pruebe que al menos uno de los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3030}$ es divisible entre 2^{2020}.

2 Soluciones

Recordamos que no se han recibido soluciones a los problemas 24–25, 27–28, 44, 54, 59, 69, 79, 84–91, 94–100, 108–113, 116, 118–123, 126, 128–129, 133–143 y 145–146. Invitamos a los lectores a enviarnos sus soluciones para esos problemas.

51. [**9**(2) (2001) p. 209.] Sea $\alpha > 0$ un número real y consideremos $x_1 < x_2 < \cdots$ las soluciones reales de la ecuación $x \operatorname{sen}(x^\alpha) = \log(x)$. Hallar los valores de α para los cuales $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$ converge.

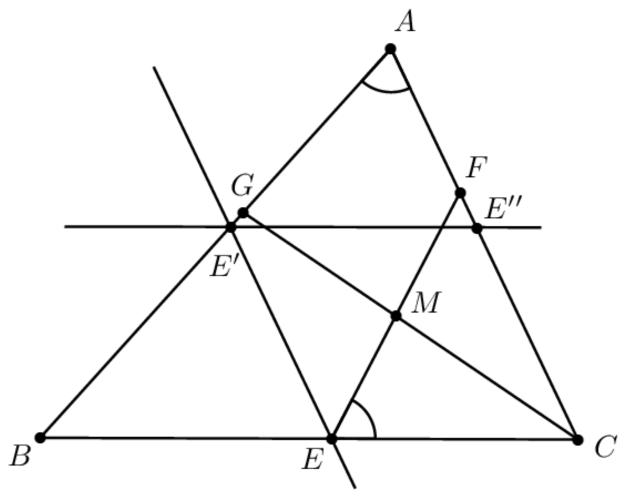
Solución del editor: Sea $f(x) = x \operatorname{sen}(x^\alpha) - \log(x)$. Sea $y_k = ((2k+1)\frac{\pi}{2})^{1/\alpha}$. Como para $k = 0, 1, 2 \ldots$ se tiene que $\operatorname{sen}((2k+1)\frac{\pi}{2}) = 1$ si k es par y -1 si k es impar, es fácil ver que $y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < \cdots$ Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$ converge si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y_n} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1}\right)^{1/\alpha}$$

converge, y ésto ocurre si y sólo si $1/\alpha > 1$, es decir si $\alpha < 1$.

82. [**12**(1) (2004) p. 96.] Sea ABC un triángulo. Sean E y F puntos en los segmentos BC y CA respectivamente, tales que $\frac{CE}{CB} + \frac{CF}{CA} = 1$ y $\angle CEF = \angle CAB$. Sean M el punto medio del segmento EF y G el punto de corte de la recta CM con el segmento AB. Demostrar que el triángulo FEG es semejante al triángulo ABC.

Solución del editor: Sea E' el corte de la paralela a CA por E con el lado AB. Sea E'' el corte de la paralela a CB por E' con el lado CA.

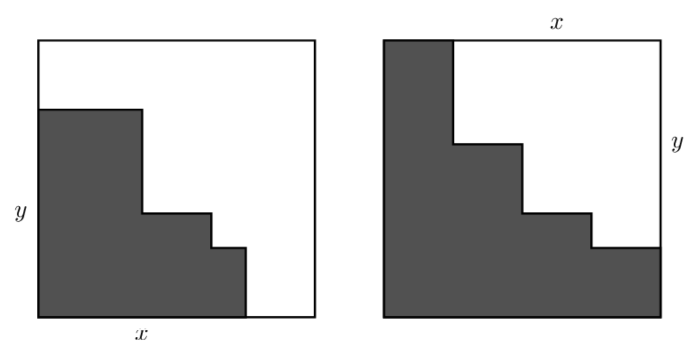


Tenemos entonces:
$$\frac{CE''}{CA} = \frac{BE'}{BA} = \frac{BE}{BC} = \left(1 - \frac{CE}{CB}\right) = \frac{CF}{CA},$$
de donde se deduce que $F = E''$. Por lo tanto $CEE'F$ es un paralelogramo (ya que $EE' \parallel CF$ y $E'F \parallel CE$). Como las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio, entonces CE' pasa por M, de donde $G = E'$. Entonces $CEGF$ es un paralelogramo y por lo tanto $\triangle FEG \sim \triangle EFC$. Por otro lado, $\angle ECF = \angle ACB$ y $\angle CEF = \angle CAB$, de donde $\triangle EFC \sim \triangle ABC$. Tenemos entonces que $\triangle FEC \sim \triangle EFC \sim \triangle ABC$.

83. [**12**(1) (2004) p. 96.] Se tiene un tablero cuadriculado de 10×10 casillas. La mitad de sus casillas se pintan de blanco, y la otra mitad de negro. Un lado común a dos casillas en el tablero se llama *lado frontera* si estas dos casillas tienen colores diferentes. Determinar el mínimo y el máximo número de lados frontera que puede haber en el tablero. Justificar las respuestas.

Solución del editor: El máximo es 180 y se obtiene cuando el tablero se colorea como un tablero de damas. En efecto, los segmentos que pueden ser frontera son los interiores (los que no pertenecen al borde del tablero) y todos ellos son frontera cuando se colorea el tablero como un damero.

El mínimo es 10, y se obtiene cuando todas las casillas a un lado de una mediana (una de las dos líneas que unen puntos medios de lados opuestos) se pintan de un color y las que están del otro lado se pintan del otro color. Para probar que efectivamente 10 es el mínimo observemos que el número de segmentos frontera verticales entre dos columnas adyacentes no puede ser inferior a la diferencia (en valor absoluto) entre los números de casillas negras en cada columna. Por lo tanto, si se modifica cada columna poniendo todas las casillas blancas encima de las negras, el número de segmentos frontera no crece. Repitiendo este proceso para las filas, se obtiene una coloración con menor o igual número de segmentos frontera y en la cual si una casilla es negra también lo son todas las que se encuentran debajo o a la izquierda de ella. Si en esta coloración hay una fila completamente blanca y otra completamente negra (o una columna completamente blanca y otra completamente negra) es claro que debe haber al menos 10 segmentos frontera. De lo contrario se presentará una de las dos siguientes configuraciones:



En cada una de ellas el número de segmentos frontera es $x+y$, y en ambos casos se tiene

$$x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2\sqrt{50} > 14.$$

Guía para los Autores

Divulgaciones Matemáticas es una revista arbitrada que considera para su publicación trabajos inéditos de investigación, en todas las áreas de la Matemática y sus aplicaciones, historia o enseñanza. Contribuciones adecuadas trabajos de investigación, de divulgación e históricos y de enseñanza matemática. Se presta especial atención a los temas tratados en la reunión anual e itinerante de las **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** celebradas en Venezuela. Además, contempla una sección de problemas y soluciones, la cual presenta problemas que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado, sin conocimientos especializados.

El primer requisito para que un artículo sea publicable es su corrección matemática. En segundo lugar, el estilo expositivo debe ser atrayente y lo más fluido y organizado que sea posible. En los trabajos de investigación se tomarán en cuenta la relevancia y originalidad de los resultados obtenidos. El tercer requisito para que el cuerpo editorial de la revista acepte un artículo, para someterlo a evaluación y posible publicación, es que el mismo debe estar elaborado en LaTeX, utilizando una plantilla predefinida por la revista, se le pide a los autores respetar las instrucciones internas indicadas en la plantilla mencionada. El archivo fuente (.tex) y una versión en formato .dvi, .pdf o .ps (imprimible) debe enviarse por correo electrónico a `divulgaciones@demat-fecluz.org`. Si el artículo contiene figuras, éstas deben adjuntarse como archivos separados en formatos .png o .jpg.

Los lenguajes aceptados por la revista son español e inglés. Al someter un artículo, el autor debe remitir una carta en la que se haga constar que el artículo que se está sometiendo no ha sido publicado o sometido a otra revista de forma total o parcial. Dicha carta debe contener los siguientes datos: Nombre completo del autor o autores, título del artículo, firma del autor que somete el artículo (autor de correspondencia), y declaración expresa de conformidad de los demás autores (cuando exista más de un autor).

El autor, o autores, en el mensaje de sometimiento del manuscrito deben indicar la sección de la revista en la que sugiera debe ser incluido su trabajo, a saber: artículo de investigación, artículo de divulgación e histórico, artículo de enseñanza matemática. Además, el autor debe suministrar los datos (nombre, correo, institución donde laboran) de tres especialistas en el área del trabajo sometido. Los artículos deben organizarse en las siguientes secciones: Identificación, Resumen, Abstract, Introducción, Desarrollo, Agradecimiento (opcional), y Referencias bibliográficas (usar el estilo ejemplificado en la plantilla).

> **Identificación.** Esta debe incluir: Título completo del trabajo en castellano e inglés; Título corto para el trabajo; Nombre completo y dirección completa del autor o autores; Afiliación institucional; Dirección electrónica; Dos clasificaciones, una primaria y otra secundaria, de cinco caracteres de la AMS (MSC 2010).
>
> **Resumen:** Texto de no más de doscientas palabras que simplifique en esencia lo que se presenta a lo largo del trabajo. Debe tomar en cuenta aspectos como: Objetivos del trabajo; Metodología utilizada; Resultado. A continuación del resumen se deben incluir de tres a seis palabras o frases claves.
>
> **Abstract:** Una traducción al idioma inglés de todo lo expuesto en el resumen.

Cabe resaltar que **LA REVISTA SOLO PROCESARÁ LOS ARTÍCULOS QUE CUMPLAN CON TODOS LOS REQUISITOS ANTES EXPUESTOS**.

Guide for Authors

Divulgaciones Matemáticas is a refereed journal, which considers for publication, unpublished research papers in all branches of mathematics and its applications, history or teaching. Suitable contributions can be research papers, historical and/or teaching papers and bibliographical reviews. Special attention is paid to those topics covered by the annual itinerant meeting **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** held in Venezuela. In addition, the journal contemplates a section of problems and solutions, which contains problems that can be addressed by undergraduate students of mathematics without expertise.

Mathematical correctness is the first requirement for an article to be published. In second place, the exposition style should be attractive and most fluid and organized as possible. For research works the relevance and originality of the results will be taken into account. The third requirement to agree on the evaluation and possible publication of an article is its preparation in LaTeX using a predefined template by the journal. We ask the authors to respect the internal instructions given in the provided template. The source file (.tex) and a version .dvi, .pdf or .ps (printable) should be sent by email to `divulgaciones@demat-fecluz.org`. If the article contains figures, these should be attached as separate files in .jpg or .png formats.

The languages accepted by the journal are Spanish and English. When submitting an article, the author must include a separate letter stating that the article has not been published or submitted to another journal in total or partial way. The letter should contain the following information: Full name of author or authors, article title, signature of the author who submitts the article (corresponding author), and a declaration of conformity of the other authors.

When submitting a manuscript, the author or authors, should suggest the section of the journal in which the work should be included, namely research papers, expository and historical papers, mathematics teaching papers. In addition, the author must provide the data (name, email, institution where they work) of three specialists in the area of the submitted work. Articles should be organized into the following sections: Identification, Abstract, Resumen, Introduction, Development, Acknowledgment (optional), and References (use the style exemplified in the template).

> **Identification**. This should include: Full title in Spanish and English; short title for the article; Full name and full address of author or authors; Institutional affiliation; Electronic address; Two classifications, one primary and one secondary, of five characters of the AMS (MSC 2010).
>
> **Abstract:** Text of not more than two hundred words simplify essentially what is presented throughout the work. You should take into account aspects such as work objectives; Methodology used; Result. Following the abstract should include three to six key words or phrases.
>
> **Resumen:** A Spanish language translation of the above in the abstract.

Should be noted that **THE JOURNAL WILL QNLY PROCESS ARTICLES THAT MEET ALL THE REQUIREMENTS MENTIONED ABOVE**.

DIVULGACIONES MATEMÁTICAS, Vol. 21, No. 1-2
Se terminó de editar en Diciembre del 2020
en el Departamento de Matemática (DEMAT)
Maracaibo - Venezuela.

La Universidad del Zulia

AUTORIDADES

Judith Aular de Durán
Rector

Clotilde Navarro
Vicerrectora Académica

Marlene Primera Galué
Vicerrector Administrativa

Ixora Gómez
Secretaria de LUZ

Facultad Experimental de Ciencias

Beatríz González
Decana (E)

Neida Murcia
Directora del Departamento de Matemáticas

Divulgaciones Matemáticas

Vol. 21, No. 1-2, 2020

Contenido (Contents):

Artículos de Investigación
(Research papers)

Artículos de Divulgación e Históricos
(Expository and Historical)

Problemas y Soluciones
(Problems and Solutions)