

Divulgaciones Matemáticas Vol. 23-24, No. 1-2 (2022-2023), pp. 64–81
<https://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones/>
DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.11540294>
(CC BY-NC-SA 4.0)

©Autor(es)
e-ISSN 2731-2437
p-ISSN 1315-2068

Un método nuevo para eliminar la indeterminación en los problemas singularmente perturbados con resonancia de Ackerberg y O'Malley

A new method for eliminating the indeterminacy in the singularly perturbed problems with Ackerberg-O'Malley resonance

Jacques Laforgue (laforgue007@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8823-9694>

Departamento de Matemáticas, Núcleo de Sucre

Universidad de Oriente

Cumaná, Estado Sucre, Venezuela

Resumen

En los problemas singularmente perturbados con carácter resonante en el sentido de Ackerberg y O'Malley, el método tradicional de las expansiones asintóticas empatadas fracasa para determinar la amplitud de la resonancia. Se presenta un método nuevo, basado en procedimientos establecidos de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, para eliminar tal indeterminación aprovechando el resultado incompleto de las expansiones asintóticas empatadas y eliminando de manera natural el grado de libertad superfluo, mediante la derivación e imposición de una condición de frontera exacta adicional que relaciona las pendientes en los dos extremos del dominio. El método nuevo es efectivo para la variedad de problemas reconocidos como resonantes, incluyendo los que exhiben supersensibilidad, y también para los de estructura diferente pero con indeterminación análoga, por ejemplo involucrando una ecuación en derivadas parciales.

Palabras y frases clave: Perturbaciones singulares, Resonancia de capas de frontera, Expansiones asintóticas empatadas.

Abstract

In the singularly perturbed problems with resonant character in the sense of Ackerberg and O'Malley, the traditional method of matched asymptotic expansions fails to determine the resonance's amplitude. A new method is presented, based on established procedures from the theory of ordinary differential equations, for eliminating such indeterminacy taking advantage of the incomplete result of the matched asymptotic expansions and eliminating in a natural fashion the superfluous degree of freedom, through the derivation and imposition of an additional exact boundary condition that relates the slopes at both extremities of the domain. The new method is effective for the variety of problems recognized as resonant, including those exhibiting supersensitivity and also for those of a different structure but with

Recibido 20/11/2022. Revisado 12/03/2023. Aceptado 17/09/2023.

MSC (2020): Primary 34E15; Secondary 34A05.

Autor de correspondencia: Jacques Laforgue

analogous indeterminacy, for example involving a partial differential equation.

Key words and phrases: Singular perturbations, Boundary layer resonance, Matched asymptotic expansions.

1 Introducción

Las ciencias aplicadas usan a menudo modelos diferenciales cuyas soluciones requieren ser aproximadas analíticamente, por no existir fórmulas exactas y porque los resultados numéricos no se prestan a la dilucidación cualitativa de los mecanismos obrando. Como es común que los fenómenos físicos no converjan uniformemente a la dinámica más simple correspondiente a la anulación del parámetro pequeño, la teoría y las técnicas de las *perturbaciones singulares* [9, 17, 31] se vuelven imprescindibles. Su método básico más versátil es el de las expansiones asintóticas empataadas: se construyen varias aproximaciones locales aparentemente independientes, se relacionan entre sí, y si es posible, se componen para obtener estimaciones más globales. En el transcurso de este proceso, se acepta la presencia de coeficientes cuyo valor, necesario para el resultado final, momentáneamente se desconoce. El método es efectivo si se logra fijar de alguna manera acertada tales valores pendientes para suministrar una respuesta única al problema. Esto es lo que ocurre de manera rutinaria, y este éxito ha hecho universal el uso del método.

Sin embargo, hace medio siglo, Ackerberg y O'Malley [1] publicaron una investigación, en la cual habían detectado una situación previamente desapercibida por la comunidad matemática, donde una solución que se pensaba prácticamente nula en toda oportunidad, lucía en casos excepcionales un comportamiento funcional a tener en cuenta, que bien podía llamarse *resonante*. Pero ocurría que, al aplicar el Método de Expansiones Asintóticas Empatadas (MEAE) para averiguar las características de estas soluciones excepcionales, un coeficiente crucial quedaba indeterminado, ocultando por vía de consecuencia la estructura o perfil real de tales soluciones.

El artículo de Ackerberg y O'Malley ha tenido muchas repercusiones pero los procedimientos que se han propuestos para determinar las soluciones resonantes (a menudo novedosos, pero sin justificación rigurosa) en la gran mayoría de los casos abandonan el MEAE. Como tal método ha demostrado tanta utilidad, parece más razonable enriquecerlo en vez de desecharlo.

El trabajo [18] del autor para ascender a Profesor Titular de la Universidad de Oriente (Venezuela) consiste en proponer un método nuevo que se adapta al MEAE y lo completa con un procedimiento que está justificado por la teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) [30]. El propósito de este artículo es el de dar a conocer el contenido de dicho trabajo.

En la Sección 2, se presenta el contexto del problema de Ackerberg y O'Malley y de la indeterminación ocurrida. En la Sección 3, se describe el método nuevo propuesto. En la Sección 4, se detalla la resolución de un problema particular, incluyendo (Subsección 4.1) cuando se agregue una perturbación exponencialmente pequeña capaz de tener efectos de orden uno (*supersensibilidad*). La Sección 5 alista otros problemas resueltos en [18]. En la Sección 6, se muestra cómo el método también sirve para eliminar la indeterminación en el caso de una ecuación en derivadas parciales. Finalmente, una Conclusión resume lo logrado.

2 Contexto

Ackerberg y O'Malley [1] consideran el Problema con Valores en la Frontera (PVF)

$$\begin{cases} \varepsilon y'' - xp(x)y' + p(x)q(x)y = 0, & -1 \leq x \leq L, \\ y(-1, \varepsilon) = A, \quad y(L, \varepsilon) = B, & 0 < \varepsilon \ll 1, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $L \in (0, \infty)$, $A, B \in \mathbb{R}$, $p(x) > 0$ para todo $x \in [-1, L]$ y la función q satisface la condición especial $q(0) \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. De manera más general, los parámetros constantes involucrados pueden tomarse como funciones analíticas de ε ; es decir, $A = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i$, $B = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i B_i$ y $L = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i L_i$ (con $L_0 > 0$); también las funciones p y q pueden depender similarmente de ε (con $p|_{\varepsilon=0} > 0$).

Como el parámetro pequeño ε multiplica la derivada de orden más alto, se tiene una *perturbación singular*. En el interior del dominio, $x = 0$ es un punto de retorno simple, con un coeficiente de y' que pasa de positivo a negativo; estos signos hacen factibles capas de frontera (de variación abrupta de la solución) en ambos extremos del dominio.

La aplicación del MEAE empieza por la búsqueda de una solución $Y = Y(x, \varepsilon)$ exterior (a las capas) que sea regular, para lo cual se le asume una expansión asintótica de Poincaré en potencias de ε :

$$Y(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Y_i(x) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

La ecuación que ha de satisfacer el término dominante $Y_0 = Y_0(x)$, después de simplificar por $p(x)$, es

$$-xY_0' + q(x)Y_0 = 0, \quad -1 < x < 1.$$

Tiene una degeneración en $x = 0$. Antes de Ackerberg y O'Malley, se consideraba que la singularidad de esta ecuación imponía como única solución suave la idénticamente nula, con el mismo resultado para todos los términos $Y_i = Y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$. Pero la condición especial que introdujeron hace admisible la función

$$Y_0(x) = k_0 x^{q(0)} \exp \left[\int_0^x \frac{q(s) - q(0)}{s} ds \right], \quad -1 < x < 1, \quad (2.2)$$

cualquiera que sea la constante $k_0 \in \mathbb{R}$, y ellos calificaron de *resonancia* a este posible fenómeno excepcional (los términos siguientes Y_1, Y_2, \dots pueden también ser suaves solamente si se satisfacen más condiciones especiales).

Siguiendo con la aplicación del MEAE, se busca una solución interior a la capa izquierda usando el cambio de escala $t \stackrel{\text{def}}{=} (x+1)/\varepsilon \in (0, \infty)$ que regulariza localmente la ecuación diferencial, lo cual permite asumir aquí también una expansión asintótica para $Z^{\text{izq}}(t, \varepsilon) =: y(x, \varepsilon)$ cuando $x = -1 + O(\varepsilon)$

$$Z^{\text{izq}}(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Z_i^{\text{izq}}(t) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Como debe satisfacerse además la condición inicial $Z^{\text{izq}}(0, \varepsilon) = y(-1, \varepsilon)$, el término dominante $Z_0^{\text{izq}} = Z_0^{\text{izq}}(t)$ será solución del problema

$$\ddot{Z}_0^{\text{izq}} + p(-1)\dot{Z}_0^{\text{izq}} = 0, \quad Z_0^{\text{izq}}(0) = A_0,$$

donde cada punto superior indica una derivación respecto de t . Esto implica un grado de libertad provisional, con la presencia de la constante $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$Z_0^{\text{izq}}(t) = \alpha + (A_0 - \alpha)e^{-p(-1)t}, \quad t \in [0, \infty).$$

La búsqueda de una solución interior a la capa derecha es análoga; con ahora $t \stackrel{\text{def}}{=} (x-L)/\varepsilon \in (-\infty, 0]$, la expansión $Z^{\text{der}}(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Z_i^{\text{der}}(t)$ ($\varepsilon \rightarrow 0^+$) tiene un término dominante $Z_0^{\text{der}} = Z_0^{\text{der}}(t)$ solución del problema

$$\ddot{Z}_0^{\text{der}} - L_0 p(L_0) \dot{Z}_0^{\text{der}} = 0, \quad Z_0^{\text{izq}}(0) = B_0,$$

lo cual implica otro grado de libertad provisional, con la constante $\beta \in \mathbb{R}$:

$$Z_0^{\text{der}}(t) = \beta + (B_0 - \beta)e^{L_0 p(L_0)t}, \quad t \in (-\infty, 0].$$

Empatar la aproximación interior izquierda con la exterior y empear ésta con la aproximación interior derecha es aquí sencillo. Las condiciones $\lim_{t \rightarrow \infty} Z^{\text{izq}}(t, \varepsilon) = Y(-1, \varepsilon)$ y $Y(L, \varepsilon) = \lim_{t \rightarrow -\infty} Z^{\text{der}}(t, \varepsilon)$ permiten fijar los grados de libertad mencionados:

$$\alpha := Y_0(-1) \quad \text{y} \quad \beta := Y_0(L_0).$$

También la sencillez de los empates permite componer las tres aproximaciones locales (sumándolas y restando los términos duplicados α y β) para la posible obtención de una aproximación asintótica uniforme:

$$y(x, \varepsilon) \sim Y_0(x) + [A_0 - Y_0(-1)]e^{-p(-1)(x+1)/\varepsilon} + [B_0 - Y_0(L_0)]e^{L_0 p(L_0)[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon}. \quad (2.3)$$

Sin embargo, la solución exterior Y_0 incluye todavía la constante indeterminada $k_0 \in \mathbb{R}$. El desconocimiento de esta *amplitud de la resonancia* impide toda interpretación del resultado incompleto (2.3) que pretenda aclarar el comportamiento real de la solución. De hecho, se verá más adelante que de manera genérica, no hay dos capas de frontera usualmente sino una sola, porque precisamente el valor de k_0 anula bien sea el factor $[A_0 - Y_0(-1)]$, bien sea el factor $[B_0 - Y_0(L_0)]$. La presencia de las dos capas de frontera es también posible, pero bajo el cumplimiento de una condición particular sobre el parámetro L_0 .

La indeterminación así encontrada una vez completada la aplicación del MEAE contrasta con la usual efectividad de dicho método. Por esto en particular, el artículo [1] captó el interés de muchos investigadores y muchas contribuciones fueron publicadas desde entonces hasta la actualidad [3–8, 10–13, 15, 21–23, 25–29, 32–36, 38, 39]. Algunas de ellas desecharon el MEAE de entrada para recurrir a procedimientos de otra naturaleza. Pero las bondades de este método incitan más bien a rescatarlo de alguna manera.

Unos pocos autores partieron del resultado (2.3) para completarlo. Lagerstrom [20] eliminó elegantemente la indeterminación pero en el caso muy particular de estar presente una simetría bien apropiada.

Grasman y Matkowsky [8] no siguieron con el MEAE sino que recurrieron al cálculo variacional; sus estimaciones y cálculos son complicados y no hay justificación matemática rigurosa (de hecho, Srinivasan [34] mostró que la propuesta específica de [8] no daba la respuesta correcta para órdenes más altos).

MacGillivray [25] se quedó en el marco del MEAE pero lo extendió de manera nada convencional; no hay justificación matemática y no se sabe si el método funciona en todos los casos.

Las tres alternativas que se acaban de mencionar no son plenamente satisfactorias, lo cual justifica proponer un nuevo método que tenga más virtudes a su favor.

3 Descripción del método nuevo propuesto

En la teoría y en la aplicación de las EDO, es punto de partida casi ineludible la conformación de un problema *bien planteado* que garantice existencia, unicidad y cierta suavidad de la solución. Esto, de manera rutinaria, se logra asociando a la ecuación diferencial un número ajustado de condiciones adicionales, llamadas genéricamente condiciones de frontera, que fijan en un punto determinado algún valor para la solución (condición de Dirichlet) o para su derivada (condición de Neuman); o bien imponen una identidad relacionando valores de ambos tipos (condición de Robín).

Ahora bien, cuando este problema bien planteado se desea resolver en computadora digital, el especialista de análisis numérico procede a una discretización de sus ecuaciones diferenciales que las transforma en un sistema de naturaleza matemática distinta, el cual en particular puede no tener el mismo número de grados de libertad que el original. Si es menor, el especialista recurre a un método de optimización y si es mayor, agrega a las condiciones de frontera originales otras llamadas condiciones numéricas, consistentes con el problema original y sus propiedades, para forzar la unicidad de la solución.

De igual manera, el método propuesto para eliminar la indeterminación encontrada en la resonancia de Ackerberg y O'Malley consiste en agregar una tercera condición de frontera derivada rigurosamente de la ecuación diferencial.

Esta nueva condición, para que aporte algo, debe ser independiente de las dos que ya se están tomando en cuenta. Como éstas son condiciones de Dirichlet, la derivada de la solución estará involucrada.

Otra característica necesitada para la condición adicional tiene que ver con la dificultad fundamental de los problemas resonantes. Al contrario de todos los problemas usuales, incluidos los singularmente perturbados, cantidades trascendentalmente pequeñas influyen de manera decisiva en la estructura y amplitud de la solución resonante. Como el MEAE sólo toma en cuenta potencias de ε , ignora estas cantidades exponencialmente pequeñas y por esto fracasa. La condición de frontera por agregar será de tipo mixto, en el sentido de que relacionará en la misma identidad valores de las pendientes en los dos extremos fronterizos, lo cual, de una cierta manera, equivale precisamente a captar la información trascendental que viaja desapercibida a lo largo del dominio.

Ahora bien, ¿cómo se construye una condición de frontera que satisfaga estos requerimientos? En la caracterización de los problemas resonantes, los artículos publicados enfatizan que son especialmente los que pueden ser transformados en ciertas ecuaciones modelo (ver, por ejemplo, Olver [29]); resulta que la posibilidad de aplicar un método de reducción del orden (quizás después de algún cambio de variables) es aquí la regla y no la excepción. Se aprovechará esta técnica clásica de la teoría de EDO, ya que su validez está bien establecida, al contrario de los métodos de [8] y [25]. La *primera integral* así obtenida se evaluará en los dos extremos del dominio y la identidad resultante proveerá la relación buscada entre las dos pendientes fronterizas.

Las clases de PVF cuyo carácter resonante ha sido demostrado rigurosamente en la literatura son relativamente pocas. Se aplicó el método propuesto a prácticamente todas, resultando siempre efectiva la eliminación de la indeterminación. En la sección siguiente, se presenta una muestra.

4 Ecuación asociada a un tiempo de salida

En probabilidades aplicadas, tiene relevancia el PVF

$$\begin{cases} \varepsilon y'' - x^m p(x) y' = 0, & -1 \leq x \leq L(\varepsilon), \\ y(-1, \varepsilon) = A(\varepsilon), \quad y(L(\varepsilon), \varepsilon) = B(\varepsilon), & 0 < \varepsilon \ll 1, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde m es un número natural impar, la función suave p es positiva, $L_0 > 0$ y $A_0 B_0 \neq 0$.

Se va primero a resolver directamente el PVF y estimar asintóticamente su solución exacta para que cuando, después, se obtengan los resultados del método nuevo propuesto, se pueda verificar en el momento el acierto de sus aproximaciones.

Un factor integrante de la EDO en (4.1) es $\exp[-P(x)/\varepsilon]$, donde P es la función (no negativa) tal que

$$P(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x s^m p(s) ds, \quad x \geq -1. \quad (4.2)$$

Por lo tanto, $y'(x, \varepsilon) = c_1(\varepsilon) \exp[P(x)/\varepsilon]$ y se sigue $y(x, \varepsilon) = c_1(\varepsilon) I(x, \varepsilon) + c_2(\varepsilon)$, donde

$$I(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x \exp[P(s)/\varepsilon] ds, \quad x \geq -1.$$

Las constantes de integración $c_1(\varepsilon)$ y $c_2(\varepsilon)$ han de satisfacer $c_1(\varepsilon) I(-1, \varepsilon) + c_2(\varepsilon) = A(\varepsilon)$ y $c_1(\varepsilon) I(L(\varepsilon), \varepsilon) + c_2(\varepsilon) = B(\varepsilon)$. Resulta

$$y(x, \varepsilon) = \frac{A(\varepsilon) I(L(\varepsilon), \varepsilon) - B(\varepsilon) I(-1, \varepsilon) + [B(\varepsilon) - A(\varepsilon)] I(x, \varepsilon)}{I(L(\varepsilon), \varepsilon) - I(-1, \varepsilon)}. \quad (4.3)$$

Como el único valor máximo de $P(s)$ cuando s está entre cero y $x \neq 0$ es $P(x)$, y como $P(s) = P(x) + x^m p(x)(s-x) + \dots$, el método de Laplace (ver, por ejemplo, Wong [37, página 58]) suministra la estimación asintótica para $x \neq 0$

$$I(x, \varepsilon) = \frac{\varepsilon e^{P(x)/\varepsilon}}{x^m p(x)} [1 + O(\varepsilon)] \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Como $P(L(\varepsilon)) - P(L_0) = \int_{L_0}^{L_0 + \varepsilon L_1 + O(\varepsilon^2)} s^m p(s) ds = \varepsilon L_1 L_0^m p(L_0) + O(\varepsilon^2)$, se tiene entonces $I(L(\varepsilon), \varepsilon) = \left[\frac{\varepsilon}{\lambda(L_0, L_1)} \exp \frac{P(L_0)}{\varepsilon} \right] [1 + O(\varepsilon)]$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, donde por conveniencia se usa la constante $\lambda(L_0, L_1)$ definida como $\lambda(L_0, L_1) \stackrel{\text{def}}{=} L_0^m p(L_0) \exp[-L_1 L_0^m p(L_0)]$. Luego, de la solución exacta (4.3) se obtiene por una parte para $x = 0$, que $y(0, \varepsilon) = y_0(\varepsilon)[1 + O(\varepsilon)]$ donde

$$y_0(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_0 p(-1) \exp[P(L_0)/\varepsilon] + B_0 \lambda(L_0, L_1) \exp[P(-1)/\varepsilon]}{p(-1) \exp[P(L_0)/\varepsilon] + \lambda(L_0, L_1) \exp[P(-1)/\varepsilon]}$$

y por otra parte para $x \neq 0$,

$$y(x, \varepsilon) = \left\{ y_0(\varepsilon) + \frac{(B_0 - A_0) \frac{\lambda(L_0, L_1) p(-1)}{x^m p(x)} \exp[P(x)/\varepsilon]}{p(-1) \exp[P(L_0)/\varepsilon] + \lambda(L_0, L_1) \exp[P(-1)/\varepsilon]} \right\} [1 + O(\varepsilon)].$$

El comportamiento de la solución depende de los valores relativos de $P(-1)$ y $P(L_0)$; conviene introducir el umbral \hat{L} donde estos dos valores son iguales.

Lema 4.1. Si la integral impropia $\int_{-1}^{\infty} s^m p(s) ds$ diverge o si converge a un valor positivo, existe un único número $\widehat{L} \in (0, \infty)$ tal que $\int_{-1}^{\widehat{L}} s^m p(s) ds = 0$ (por ejemplo, si la función p es par, entonces $\widehat{L} = 1$); se tiene entonces $P(\widehat{L}) = P(-1)$ con $P(x) < P(-1)$ para todo $x \in (-1, \widehat{L})$ y $P(x) > P(-1)$ para todo $x > \widehat{L}$. Si la integral impropia $\int_{-1}^{\infty} s^m p(s) ds$ converge a un valor negativo o nulo, se tiene $P(x) < P(-1)$ para todo $x > -1$ y se define $\widehat{L} \stackrel{\text{def}}{=} \infty$.

Demostración. Son consecuencias inmediatas de que la función suave P es estrictamente decreciente en el intervalo $[-1, 0]$ y estrictamente creciente después. \square

Ahora se está en condiciones de describir explícitamente el comportamiento asintótico de la solución exacta, distinguiendo tres casos, tratados en las tres proposiciones siguientes.

Proposición 4.1. Si $L_0 < \widehat{L}$ donde \widehat{L} está definido en el Lema 4.1, se cumple

$$y(x, \varepsilon) \sim B_0 + (A_0 - B_0) e^{-p(-1)(x+1)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (4.4)$$

La solución tiene una capa de frontera a la izquierda en $x = -1$ y fuera de ella es aproximadamente constante, con el valor límite impuesto en el extremo derecho.

Demostración. $L_0 < \widehat{L}$ implica $P(L_0) < P(-1)$; entonces $y_0(\varepsilon) = B_0 + O(\exp \frac{P(L_0) - P(-1)}{\varepsilon})$ (la diferencia es trascendentalmente pequeña) y para $x \neq 0$ se tiene $y(x, \varepsilon) = [B_0 + (B_0 - A_0) \frac{p(-1)}{x^m p(x)} \exp \frac{P(x) - P(-1)}{\varepsilon}] [1 + O(\varepsilon)]$, con $P(x) < P(-1)$ si $x > -1$. Luego si $x + 1 \neq O(\varepsilon)$, entonces $y(x, \varepsilon) = B_0 + O(\varepsilon)$ y si $x + 1 = O(\varepsilon)$, entonces $P(x) - P(-1) = P'(-1)(x+1) + O((x+1)^2) = -p(-1)(x+1) + O(\varepsilon^2)$, se tiene $y(x, \varepsilon) = \{B_0 + (B_0 - A_0) \frac{p(-1)}{-p(-1) + O(\varepsilon)} \exp[-p(-1)(x+1)/\varepsilon]\} [1 + O(\varepsilon)]$, y la conclusión sigue. \square

Proposición 4.2. Si $L_0 > \widehat{L}$ donde \widehat{L} está definido en el Lema 4.1, se cumple

$$y(x, \varepsilon) \sim A_0 + (B_0 - A_0) e^{L_0^m p(L_0)[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (4.5)$$

La solución tiene una capa de frontera a la derecha en $x = L(\varepsilon)$ y fuera de ella es aproximadamente constante, con el valor límite impuesto en el extremo izquierdo.

Demostración. $L_0 > \widehat{L}$ implica $P(L_0) > P(-1)$; entonces $y_0(\varepsilon) = A_0 + O(\exp \frac{P(-1) - P(L_0)}{\varepsilon})$ (la diferencia es trascendentalmente pequeña) y para $x \neq 0$ se tiene $y(x, \varepsilon) = [A_0 + (B_0 - A_0) \frac{\lambda(L_0, L_1)}{x^m p(x)} \exp \frac{P(x) - P(L_0)}{\varepsilon}] [1 + O(\varepsilon)]$, con $P(x) < P(L_0)$ si $x < L_0$. Luego si $x - L_0 \neq O(\varepsilon)$, entonces $y(x, \varepsilon) = A_0 + O(\varepsilon)$ y si $x - L_0 = O(\varepsilon)$, entonces $P(x) - P(L_0) = P'(L_0)(x - L_0) + O((x - L_0)^2) = L_0^m p(L_0)(x - L_0) + O(\varepsilon^2)$, se tiene $y(x, \varepsilon) = \{A_0 + (B_0 - A_0) \frac{L_0^m p(L_0) \exp[-L_1 L_0^m p(L_0)]}{L_0^m p(L_0) + O(\varepsilon)} \exp[L_0^m p(L_0)(x - L_0)/\varepsilon]\} [1 + O(\varepsilon)]$, y $L_0^m p(L_0)(x - L_0 - \varepsilon L_1)/\varepsilon = L_0^m p(L_0)[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon + O(\varepsilon)$ implica la conclusión. \square

Proposición 4.3. Si $L_0 = \widehat{L}$ definido en el Lema 4.1, se cumplen $y(0, \varepsilon) \sim y_0$ con $y_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_0 p(-1) + B_0 \lambda(L_0, L_1)}{p(-1) + \lambda(L_0, L_1)} e$

$$y(x, \varepsilon) \sim y_0 + \frac{(A_0 - B_0) \lambda(L_0, L_1)}{p(-1) + \lambda(L_0, L_1)} e^{-p(-1)(x+1)/\varepsilon} + \frac{(B_0 - A_0) p(-1)}{p(-1) + \lambda(L_0, L_1)} e^{L_0^m p(L_0)[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (4.6)$$

La solución tiene capas de frontera en ambos extremos $x = -1$ y $x = L(\varepsilon)$; entre ellas es aproximadamente constante, un promedio ponderado de los valores límites impuestos en los bordes.

Demostración. Como $P(L_0) = P(-1)$, entonces $y_0(\varepsilon) = y_0$ y para $x \neq 0$ se tiene

$$y(x, \varepsilon) = \left\{ y_0 + \frac{(B_0 - A_0)\lambda(L_0, L_1)p(-1)}{x^m p(x)[p(-1) + \lambda(L_0, L_1)]} \exp \frac{P(x) - P(-1)}{\varepsilon} \right\} [1 + O(\varepsilon)],$$

con $P(x) < P(-1)$ si $-1 < x < L_0$. Luego si $x + 1 \neq O(\varepsilon)$ y $x - L_0 \neq O(\varepsilon)$, entonces $y(x, \varepsilon) = y_0 + O(\varepsilon)$. Los casos $x + 1 = O(\varepsilon)$ y $x - L_0 = O(\varepsilon)$ son análogos a los vistos para las Proposiciones 4.1 y 4.2 respectivamente. \square

Observación 4.1. Como $\lim_{L_1 \rightarrow -\infty} \lambda(L_0, L_1) = \infty$ y $\lim_{L_1 \rightarrow \infty} \lambda(L_0, L_1) = 0$, la aproximación (4.6) evoluciona continuamente de la (4.4) a la (4.5) cuando L_1 varía de $-\infty$ a ∞ .

Así aclarado el comportamiento asintótico de la solución exacta, se asume desconocido y se aplica el MEAE. Una solución regular de la EDO $Y(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Y_i(x)$ debe satisfacer $-x^m p(x) Y_0' = 0$ y $x^m p(x) Y_{i+1}' = Y_i'' = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$; por lo tanto, todos sus términos son constantes:

$$Y(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i k_i \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Para una posible capa de frontera a la izquierda en $x = -1$, se introduce el cambio de variables $t = (x + 1)/\varepsilon$, $z(t, \varepsilon) = y(x, \varepsilon)$. El problema local correspondiente es

$$\begin{cases} \ddot{z} + (1 - \varepsilon t)^m p(-1 + \varepsilon t) \dot{z} = 0, & 0 \leq t < \infty \\ z(0, \varepsilon) = A(\varepsilon), & \lim_{t \rightarrow \infty} z(t, \varepsilon) = Y(-1, \varepsilon). \end{cases}$$

Se resuelve mediante una expansión asintótica $z(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i z_i(t)$, cuyo término dominante $z_0 = z_0(t)$ va a satisfacer

$$\ddot{z}_0 + p(-1) \dot{z}_0 = 0, \quad z_0(0) = A_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z_0(t) = k_0;$$

por lo tanto, resulta

$$z_0(t) = k_0 + (A_0 - k_0)e^{-p(-1)t}, \quad t \in [0, \infty).$$

En particular, se anota $\dot{z}_0(0) = (k_0 - A_0)p(-1)$ para uso futuro.

Para una posible capa de frontera a la derecha en $x = L(\varepsilon)$, se introduce el cambio de variables $t = [x - L(\varepsilon)]/\varepsilon$, $z(t, \varepsilon) = y(x, \varepsilon)$. El problema local correspondiente es

$$\begin{cases} \ddot{z} - [L(\varepsilon) + \varepsilon t]^m p(L(\varepsilon) + \varepsilon t) \dot{z} = 0, & -\infty < t \leq 0 \\ z(0, \varepsilon) = B(\varepsilon), & \lim_{t \rightarrow -\infty} z(t, \varepsilon) = Y(L(\varepsilon), \varepsilon). \end{cases}$$

Se resuelve mediante una expansión asintótica $z(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i z_i(t)$, cuyo término dominante $z_0 = z_0(t)$ va a satisfacer

$$\ddot{z}_0 - L_0^m p(L_0) \dot{z}_0 = 0, \quad z_0(0) = B_0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} z_0(t) = k_0;$$

por lo tanto, resulta

$$z_0(t) = k_0 + (B_0 - k_0)e^{L_0^m p(L_0)t}, \quad t \in (-\infty, 0].$$

En particular, se anota $\dot{z}_0(0) = (B_0 - k_0)L_0^m p(L_0)$ para uso futuro.

De conocerse el valor de la constante k_0 , se contaría con la aproximación asintótica compuesta

$$y(x, \varepsilon) \sim k_0 + (A_0 - k_0)e^{-p(-1)(x+1)/\varepsilon} + (B_0 - k_0)e^{L_0^m p(L_0)[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (4.7)$$

Para determinar el valor de k_0 , se va a derivar una condición de frontera adicional de tipo mixto; es decir, involucrando ambos extremos del dominio. Como ya se imponen los valores de la solución ahí, será una condición sobre los valores de su primera derivada.

Se multiplica la EDO en (4.1) por el factor integrante $\exp[-P(x)/\varepsilon]$, donde la función P fue definida en (4.2). Viene $\{\varepsilon y' \exp[-P(x)/\varepsilon]\}' = 0$, lo cual se integra de $x = -1$ a $x = L(\varepsilon)$, resultando $\varepsilon y'(L(\varepsilon), \varepsilon) \exp[-P(L(\varepsilon))/\varepsilon] = \varepsilon y'(-1, \varepsilon) \exp[-P(-1)/\varepsilon]$. Luego, usando los valores $\dot{z}_0(0)$ anotados más arriba, se obtiene

$$(B_0 - k_0)L_0^m p(L_0) + O(\varepsilon) = [(k_0 - A_0)p(-1) + O(\varepsilon)] \exp \frac{P(L(\varepsilon)) - P(-1)}{\varepsilon},$$

de donde

$$(B_0 - k_0)\lambda(L_0, L_1) + O(\varepsilon) = [(k_0 - A_0)p(-1) + O(\varepsilon)] \exp \frac{P(L_0) - P(-1)}{\varepsilon}.$$

Esto implica que si $L_0 < \widehat{L}$, se tiene $k_0 = B_0$, la aproximación (4.7) se reduce a la (4.4) y se deduce lo contenido en la Proposición 4.1; si $L_0 > \widehat{L}$, se tiene $k_0 = A_0$, la aproximación (4.7) se reduce a la (4.5) y se deduce lo contenido en la Proposición 4.2; finalmente, si $L_0 = \widehat{L}$, se tiene $k_0 = \frac{A_0 p(-1) + B_0 \lambda(L_0, L_1)}{p(-1) + \lambda(L_0, L_1)} = y_0$, la aproximación (4.7) coincide con la (4.6) y se deduce lo contenido en la Proposición 4.3. Así, el método propuesto produce lo correcto en todos los casos.

Se presenta ahora una ilustración de lo analizado en esta sección con un ejemplo particular.

Ejemplo 4.1. Para disponer de una solución exacta que se pueda representar gráficamente con facilidad, se va a usar el valor $m = 1$ así como una función positiva p que depende además del parámetro ε (pero sin tender a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$).

La solución general de la EDO

$$\varepsilon y'' - x \left(1 + \frac{2\varepsilon}{x^2 + \varepsilon}\right) y' = 0 \quad (4.8)$$

es $y(x, \varepsilon) = c_1(\varepsilon)x \exp\left(\frac{x^2-1}{2\varepsilon}\right) + c_2(\varepsilon)$, y su solución particular bajo las condiciones de frontera

$$y(-1, \varepsilon) = -1, \quad y(L(\varepsilon), \varepsilon) = 1 \quad (4.9)$$

es

$$y(x, \varepsilon) = \frac{2xe^{\frac{x^2-1}{2\varepsilon}} + 1 - L(\varepsilon)e^{\frac{L^2(\varepsilon)-1}{2\varepsilon}}}{1 + L(\varepsilon)e^{\frac{L^2(\varepsilon)-1}{2\varepsilon}}},$$

la cual admite como aproximación asintótica uniforme cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$y(x, \varepsilon) \sim \begin{cases} 1 - 2e^{-(x+1)/\varepsilon} & \text{si } L_0 < 1, \\ \frac{1 - e^{L_1}}{1 + e^{L_1}} - \frac{2}{1 + e^{L_1}} e^{-(x+1)/\varepsilon} + \frac{2e^{L_1}}{1 + e^{L_1}} e^{[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} & \text{si } L_0 = 1, \\ -1 + 2e^{L_0[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} & \text{si } L_0 > 1. \end{cases}$$

Esto es consistente con (4.4) (aquí $p(-1, 0) = 1$), con (4.5) (aquí $p(L_0, 0) = 1$) y con (4.6) (aquí $\lambda(L_0, L_1) = e^{-L_1}$).

La Figura 1 muestra la solución exacta del PVF (4.8)-(4.9) y su aproximación asintótica uniforme superpuesta, para varios valores representativos de $L(\varepsilon)$, con una capa de frontera a la izquierda cuando $L_0 < \hat{L}$, una a la derecha cuando $L_0 > \hat{L}$ y las dos capas de frontera cuando $L_0 = \hat{L}$ (aquí, $\hat{L} = 1$ porque p es una función par de x).

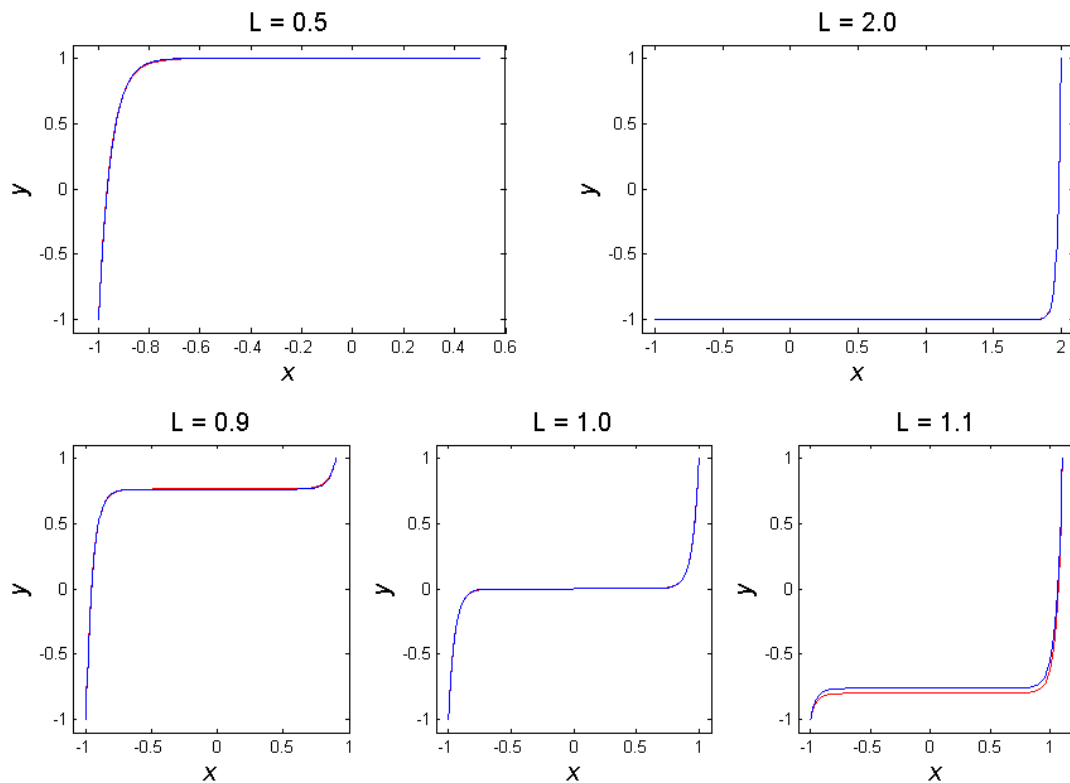


Figura 1: Superposición de la solución del Ejemplo 4.1 y de su aproximación para los casos $L(\varepsilon) = 0,5 < \hat{L}$, $L(\varepsilon) = 2 > \hat{L}$ y $L(\varepsilon) \simeq 1 = \hat{L}$. Se usó el valor $\varepsilon = 0,05$.

4.1 Ecuación perturbada exhibiendo supersensibilidad

El método presentado ha eliminado la indeterminación, incluyendo la situación sensible planteada por Skinner [33], en la cual una modificación de orden ε de la extensión del dominio implica un cambio de orden uno en la solución resonante, cuando $L(\varepsilon) = \widehat{L} + O(\varepsilon)$.

Se va a ver que el método además sirve para resolver la situación *supersensible* [14,19] planteada por Williams [36] (ver también Kopell [11]), en la cual una perturbación trascendentalmente pequeña en la EDO puede provocar un cambio de orden uno en la solución resonante.

Se considera la EDO perturbada

$$\varepsilon y'' - x^m p(x) y' = \varepsilon^{\frac{-1}{m+1}} e^{-M/\varepsilon} q(x) [y - C(\varepsilon)],$$

donde intervienen adicionalmente la constante positiva M , la función suave q tal que $q(0) > 0$, y la función real analítica $C(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i C_i$ con $C_0 \neq 0$.

Como la perturbación es trascendentalmente pequeña (mientras y se mantenga acotada), el MEAE da el mismo resultado como en el caso no perturbado que se acaba de tratar.

Se deriva una condición de frontera adicional de la misma manera, usando el factor integrante $\exp[-P(x)/\varepsilon]$ e integrando de $x = -1$ a $x = L(\varepsilon)$; resulta

$$\begin{aligned} \varepsilon y'(L(\varepsilon), \varepsilon) \exp[-P(L(\varepsilon))/\varepsilon] - \varepsilon y'(-1, \varepsilon) \exp[-P(-1)/\varepsilon] \\ = \varepsilon^{\frac{-1}{m+1}} e^{-M/\varepsilon} \int_{-1}^{L(\varepsilon)} q(s) [y(s, \varepsilon) - C(\varepsilon)] \exp[-P(s)/\varepsilon] ds. \end{aligned}$$

Como el único valor mínimo de $P(s)$ cuando s está entre -1 y $L(\varepsilon)$ es $P(0) = 0$, y como $P(s) = \frac{p(0)}{m+1} s^{m+1} + \dots$, el método de Laplace (ver, por ejemplo, Holmes [9, página 306]) proporciona la estimación

$$\varepsilon^{\frac{-1}{m+1}} \int_{-1}^{L(\varepsilon)} q(s) [y(s, \varepsilon) - C(\varepsilon)] \exp[-P(s)/\varepsilon] ds = \mu [y(0, 0) - C_0] + O(\varepsilon),$$

donde μ es la constante $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2q(0)\Gamma(1/(m+1))}{m+1\sqrt{(m+1)^m p(0)}}$. La condición adicional se transforma en

$$\begin{aligned} [(B_0 - k_0)L_0^m p(L_0) + O(\varepsilon)] e^{-P(L(\varepsilon))/\varepsilon} + [(A_0 - k_0)p(-1) + O(\varepsilon)] e^{-P(-1)/\varepsilon} \\ = [\mu(k_0 - C_0) + O(\varepsilon)] e^{-M/\varepsilon}. \end{aligned}$$

Si $M > \min\{P(-1), P(L_0)\}$, la perturbación introducida en la EDO es demasiado pequeña para tener efecto perceptible y valen las Proposiciones 4.1, 4.2 y 4.3.

Si $M < \min\{P(-1), P(L_0)\}$, la perturbación domina los demás efectos e impone $k_0 = C_0$ como amplitud de la resonancia en primera aproximación.

Si $M = \min\{P(-1), P(L_0)\}$, el valor de k_0 queda determinado como

$$k_0 = \begin{cases} \frac{\lambda(L_0, L_1)B_0 + \mu C_0}{\lambda(L_0, L_1) + \mu} & \text{si } M = P(L_0) < P(-1), \\ \frac{p(-1)A_0 + \lambda(L_0, L_1)B_0 + \mu C_0}{p(-1) + \lambda(L_0, L_1) + \mu} & \text{si } M = P(L_0) = P(-1), \\ \frac{p(-1)A_0 + \mu C_0}{p(-1) + \mu} & \text{si } M = P(-1) < P(L_0). \end{cases}$$

Todos estos resultados supersensibles (donde aparece la nueva constante C_0) son consistentes con lo obtenido en [15] mediante dinámica metaestable.

5 Otros problemas exitosamente resueltos

En [18], se aplicó el método propuesto nuevo además a los casos de indeterminación siguientes.

- Una ecuación propuesta por Kreiss y Parter [13]

$$\varepsilon y'' - xy' + \frac{xy}{a+x} = 0,$$

donde el número real a es tal que $a > 1$ (ellos usaron $a = 2$).

- La ecuación de Hermite singularmente perturbada [11]

$$\varepsilon y'' - xy' + qy = 0,$$

donde está dado el número natural q .

- La misma ecuación, con perturbación supersensible (comparar con [36])

$$\varepsilon y'' - xy' + qy = \varepsilon^{-q-1/2} e^{-M/\varepsilon} r(x) [y - C(\varepsilon)h(x, \varepsilon)],$$

donde intervienen adicionalmente la constante positiva M , la función suave r tal que $r(0) > 0$, la función real analítica $C = C(\varepsilon)$ con $C_0 \neq 0$ y la función polinomial de grado q en x y grado $[q/2]$ (parte entera de $q/2$) en ε

$$h(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{[q/2]} \frac{q!}{(q-2i)!} \frac{(-\varepsilon/2)^i}{i!} x^{q-2i}.$$

- Una ecuación de Hermite generalizada, estudiada por Cook y Eckhaus [3] y por Lewis [22]

$$\varepsilon y'' - xy' + (q + ax - a^2\varepsilon)y = 0,$$

donde están dados los números $q \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$.

- Una ecuación con un punto de retorno de orden impar y dos simples en la frontera (comparar con [1])

$$\varepsilon y'' + px^m(x+1)[x - L(\varepsilon)]y' = 0,$$

donde el número real p es positivo, el número natural m es impar y la función real analítica $L = L(\varepsilon)$ da la frontera derecha del dominio.

- Una ecuación de tercer orden (comparar con [10])

$$\varepsilon y''' - xy'' = 0,$$

con dos condiciones de Dirichlet usuales y una de Neuman de tipo mixto:

$$\varepsilon [\alpha(\varepsilon)y'(-1, \varepsilon) + \beta(\varepsilon)y'(L(\varepsilon), \varepsilon)] = C(\varepsilon),$$

siendo α , β y C funciones reales analíticas de ε .

- Una ecuación no lineal que pertenece a una clase de problemas estudiados por Bohé [2]

$$\varepsilon y'' - xy'^{3/2} = 0.$$

- Una ecuación con un término no local (comparar con [16])

$$\varepsilon y'' - xy' + y - M_\varepsilon[y(\cdot, \varepsilon)] = 0,$$

donde el funcional M_ε es el promedio común tal que

$$M_\varepsilon[y] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{L(\varepsilon) + 1} \int_{-1}^{L(\varepsilon)} y(s) ds,$$

para cualquier función y integrable en el intervalo $[-1, L(\varepsilon)]$.

Se consideró además un caso que no es de EDO, cuya resolución se presenta en la sección siguiente.

6 Ecuación en derivadas parciales

Se considera el PVF elíptico en un rectángulo del plano xy

$$\begin{cases} \varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} - xu_x - yu_y = 0, & -1 \leq x \leq L, \quad -1 \leq y \leq M, \\ u(-1, y, \varepsilon) = A(y, \varepsilon), \quad u(L, y, \varepsilon) = B(y, \varepsilon), \\ u(x, -1, \varepsilon) = C(x, \varepsilon), \quad u(x, M, \varepsilon) = D(x, \varepsilon), & 0 < \varepsilon \ll 1, \end{cases} \quad (6.1)$$

donde están dadas las dos constantes positivas L y M aquí independientes del parámetro de perturbación ε , y las funciones reales analíticas A , B , C y D las cuales satisfacen condiciones de consistencia entre sí: $A(-1, \varepsilon) = C(-1, \varepsilon)$, $B(M, \varepsilon) = D(L, \varepsilon)$, $A(M, \varepsilon) = D(-1, \varepsilon)$ y $B(-1, \varepsilon) = C(L, \varepsilon)$.

Con el objeto de aplicar el MEAE, se empieza buscando una función regular $U = U(x, y, \varepsilon)$ que satisfaga la ecuación reducida. La convergencia, en una región “exterior”, de la solución del PVF (6.1) hacia la de un problema reducido apropiado, está bien establecida para los PVF de su clase (Lions [24]).

Las soluciones no constantes de la ecuación hiperbólica $xU_x + yU_y = 0$, del tipo $f(-y/x)$ en el triángulo $-1 \leq x \leq y \leq -Mx$, del tipo $f(-x/y)$ en el triángulo $-1 \leq y \leq x \leq -Ly$, del tipo $f(Ly/x)$ en el triángulo $-x \leq Ly \leq Mx \leq ML$ y del tipo $f(Mx/y)$ en el triángulo $-y \leq Mx \leq Ly \leq LM$, implican una singularidad en el origen del plano, punto de retorno de la ecuación. Por lo tanto, para poder ser regular, la solución exterior es de la forma

$$U(x, y, \varepsilon) = k(\varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i k_i \quad (x, y) \in (-1, L) \times (-1, M),$$

donde los términos k_i son constantes reales.

Esto implica desde ya que si ninguna de las funciones dadas A , B , C o D es constante, se pueden esperar cuatro capas de frontera, una en cada lado del rectángulo.

La averiguación de una capa de frontera en el lado oeste del rectángulo pasa por la sustitución de la coordenada x en una vecindad del borde $x = -1$ por la variable local $t = (x + 1)/\varepsilon$. El problema correspondiente es

$$\begin{cases} \ddot{u} + \varepsilon^2 u_{yy} + (1 - \varepsilon t)\dot{u} - \varepsilon y u_y = 0, & 0 \leq t < \infty, \quad -1 \leq y \leq M, \\ u(0, y, \varepsilon) = A(y, \varepsilon), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, y, \varepsilon) = k(\varepsilon). \end{cases}$$

El término dominante local $u_0 = u_0(t, y)$ debe satisfacer

$$\ddot{u}_0 + \dot{u}_0 = 0, \quad u_0(0, y) = A_0(y), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u_0(t, y) = k_0;$$

por lo tanto, resulta

$$u_0(t, y) = k_0 + [A_0(y) - k_0]e^{-t}, \quad 0 \leq t < \infty, \quad -1 \leq y \leq M.$$

Procediendo de manera similar para el lado sur del rectángulo con la nueva variable local $t = (y + 1)/\varepsilon$, se obtiene

$$u_0(x, t) = k_0 + [C_0(x) - k_0]e^{-t}, \quad -1 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Para el lado este, la variable local es $t = (x - L)/\varepsilon$ y el problema correspondiente es

$$\begin{cases} \ddot{u} + \varepsilon^2 u_{yy} - (L + \varepsilon t)\dot{u} - \varepsilon y u_y = 0, & -\infty < t \leq 0, \quad -1 \leq y \leq M, \\ u(0, y, \varepsilon) = B(y, \varepsilon), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t, y, \varepsilon) = k(\varepsilon). \end{cases}$$

El término dominante local $u_0 = u_0(t, y)$ debe satisfacer

$$\ddot{u}_0 - L\dot{u}_0 = 0, \quad u_0(0, y) = B_0(y), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} u_0(t, y) = k_0;$$

por lo tanto, resulta

$$u_0(t, y) = k_0 + [B_0(y) - k_0]e^{Lt}, \quad -\infty < t \leq 0, \quad -1 \leq y \leq M.$$

Procediendo de manera similar para el lado norte del rectángulo con la nueva variable local $t = (y - M)/\varepsilon$, se obtiene

$$u_0(x, t) = k_0 + [D_0(x) - k_0]e^{Mt}, \quad -1 \leq x \leq L, \quad -\infty < t \leq 0.$$

De todo lo anterior, se desprende un *ansatz* de aproximación asintótica compuesta al orden uno,

$$\begin{aligned} u(x, y, \varepsilon) \sim & k_0 + [A_0(y) - k_0]e^{-(x+1)/\varepsilon} + [C_0(x) - k_0]e^{-(y+1)/\varepsilon} \\ & + [B_0(y) - k_0]e^{L(x-L)/\varepsilon} + [D_0(x) - k_0]e^{M(y-M)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+), \end{aligned} \quad (6.2)$$

donde la constante real k_0 quedó sin determinar.

Se recurre entonces a derivar una condición de frontera adicional a partir de la ecuación en derivadas parciales. Al multiplicarla por el factor no nulo $\exp(-\frac{x^2+y^2}{2\varepsilon})$, se obtiene la ley de conservación

$$\left(\varepsilon u_x e^{-\frac{x^2+y^2}{2\varepsilon}} \right)_x + \left(\varepsilon u_y e^{-\frac{x^2+y^2}{2\varepsilon}} \right)_y = 0.$$

Integrando respecto de x entre -1 y L , y respecto de y entre -1 y M , viene la nueva condición de frontera

$$\int_{-1}^M \left[\varepsilon u_x(L, y, \varepsilon) e^{-\frac{L^2}{2\varepsilon}} - \varepsilon u_x(-1, y, \varepsilon) e^{-\frac{1}{2\varepsilon}} \right] e^{-\frac{y^2}{2\varepsilon}} dy + \int_{-1}^L \left[\varepsilon u_y(x, M, \varepsilon) e^{-\frac{M^2}{2\varepsilon}} - \varepsilon u_y(x, -1, \varepsilon) e^{-\frac{1}{2\varepsilon}} \right] e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}} dx = 0. \quad (6.3)$$

Se pueden usar las soluciones interiores dominantes para estimar los integrandos:

$$\int_{-1}^M \left\{ L[B_0(y) - k_0] e^{-\frac{L^2}{2\varepsilon}} + [A_0(y) - k_0] e^{-\frac{1}{2\varepsilon}} \right\} e^{-\frac{y^2}{2\varepsilon}} dy + \int_{-1}^L \left\{ M[D_0(x) - k_0] e^{-\frac{M^2}{2\varepsilon}} + [C_0(x) - k_0] e^{-\frac{1}{2\varepsilon}} \right\} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}} dx \sim 0.$$

Al aplicar el método de Laplace y simplificando por $\sqrt{2\pi\varepsilon}$, se sigue finalmente la condición

$$L[B_0(0) - k_0] e^{-\frac{L^2}{2\varepsilon}} + M[D_0(0) - k_0] e^{-\frac{M^2}{2\varepsilon}} + [A_0(0) + C_0(0) - 2k_0] e^{-\frac{1}{2\varepsilon}} \sim 0.$$

La indeterminación queda entonces eliminada de la manera siguiente.

$$k_0 = \begin{cases} B_0(0) & \text{si } L < \min\{M, 1\}, \\ D_0(0) & \text{si } M < \min\{L, 1\}, \\ [B_0(0) + D_0(0)]/2 & \text{si } L = M < 1, \\ [A_0(0) + C_0(0)]/2 & \text{si } 1 < \min\{L, M\}, \\ [A_0(0) + B_0(0) + C_0(0)]/3 & \text{si } L = 1 < M, \\ [A_0(0) + C_0(0) + D_0(0)]/3 & \text{si } M = 1 < L, \\ [A_0(0) + B_0(0) + C_0(0) + D_0(0)]/4 & \text{si } L = M = 1. \end{cases}$$

Estos resultados son consistentes con lo obtenido por Grasman y Matkowsky [8] usando su método de cálculo variacional. El valor de la constante k_0 (valor límite de la solución en todo el interior del rectángulo) está determinado por el o los puntos más cercanos al origen-punto de retorno, puntos de contacto con la frontera del círculo interior al rectángulo centrado en el origen y de radio máximo: según los valores de L y M , son uno o varios de los puntos $(0, -1)$, $(L, 0)$, $(0, M)$ y $(-1, 0)$, en los cuales están impuestos los valores $C(0, \varepsilon)$, $B(0, \varepsilon)$, $D(0, \varepsilon)$ y $A(0, \varepsilon)$, respectivamente.

7 Conclusión

Los problemas singularmente perturbados que exhiben el fenómeno de resonancia de Ackerberg y O'Malley representan un reto difícil para el científico interesado en conocer el comportamiento preciso de sus soluciones y su dependencia del parámetro pequeño ε , debido al fracaso del método de expansiones asintóticas empatadas que, en las demás situaciones, le aporta toda la información que busca. Las alternativas de resolución ofrecidas en la literatura especializada involucran alejarse del análisis asintótico estándar, sin ofrecer demostración rigurosa de la validez de los resultados así conseguidos.

El método dado a conocer en este artículo ofrece una alternativa más asequible porque se ha visto que involucra los mismos procedimientos básicos que se emplean de manera rutinaria en el manejo de las ecuaciones diferenciales ordinarias clásicas.

Además, la efectividad del método queda establecida con la resolución de prácticamente todos los problemas cuyo carácter resonante haya sido debidamente demostrado en la literatura, con comprobación de los resultados específicos mediante la estimación de la solución exacta cuando esté disponible o mediante la consistencia con los resultados de otro procedimiento.

También el método ha resultado versátil, ya que ha sido capaz de resolver los casos excepcionales de supersensibilidad así como los problemas de estructura diferente que presenten una indeterminación análoga, un ejemplo se ha visto con la ecuación en derivadas parciales tratada en la Sección 6.

Agradecimientos

In memoriam: Agradecimiento eterno al Profesor Bob O'Malley (1939-2020), primera autoridad incontestable en la teoría, el análisis, los métodos, las aplicaciones y la historia de las perturbaciones singulares, pero sobre todo maestro ejemplar, de una humanidad fuera de lo común, cuya carismática personalidad ha marcado profundamente a quienes se beneficiaron de sus enseñanzas, y fuimos muchísimos en el mundo entero, gracias a su disposición siempre abierta y atenta para todos.

Referencias

- [1] Ackerberg, R.C., O'Malley, Jr., R.E.; *Boundary layer problems exhibiting resonance*, Stud. Appl. Math., **49**(3) (1970), 277 - 295.
- [2] Bohé, A.; *Free layers in a singularly perturbed boundary value problem*, SIAM J. Appl. Anal., **21**(5) (1990), 1264 -1280.
- [3] Cook, L.P., Eckhaus, W.; *Resonance in a boundary value problem of singular perturbation type*, Stud. Appl. Math., **52**(2) (1973), 129 - 139.
- [4] de Groen, P.P.N.; *The nature of resonance in a singular perturbation problem of turning point type*, SIAM J. Math. Anal., **11**(1) (1980), 1 - 22.
- [5] De Maesschalck, P.; *Ackerberg-O'Malley resonance in boundary value problems with a turning point of any order*, Comm. Pure Appl. Anal., **6**(2) (2007), 311 - 333.
- [6] Fruchard, A., Schäfer, R.; *Composite asymptotic expansions*, Springer-Verlag, Berlín Heidelberg, 2013.
- [7] Fu-ru, J.; *On the boundary value problems for ordinary differential equations with turning points*, Appl. Math. Mech., **12**(2) (1991), 121 - 129.
- [8] Grasman, J., Matkowsky, B.J.; *A variational approach to singularly perturbed boundary value problems for ordinary and partial differential equations with turning points*, SIAM J. Appl. Math., **32**(3) (1977), 588 - 597.
- [9] Holmes, M.H.; *Introduction to perturbation methods*, Springer, Nueva York, 2013.

- [10] Jiang, F.-r., Jin, Q.-n.; *Asymptotic solutions of boundary value problems for third-order ordinary differential equations with turning points*, Appl. Math. Mech., **22**(4) (2001), 394 - 403.
- [11] Kopell, N.; *A geometric approach to boundary layer problems exhibiting resonance*, SIAM J. Appl. Math., **37**(2) (1979), 436 - 458.
- [12] Kreiss, H.-O.; *Resonance for singular perturbation problems*, SIAM J. Appl. Math., **41**(2) (1981), 331 - 344.
- [13] Kreiss, H.O., Parter, S.V.; *Remarks on singular perturbations with turning points*, SIAM J. Math. Anal., **5**(2) (1974), 230 - 251.
- [14] Laforgue, J.; *Supersensibilidad en un modelo de agregación con tiempo discreto*, Divulg. Mat., **6**(2) (1998), 113 - 119.
- [15] Laforgue, J.; *Odd-order turning point: resonance and dynamic metastability*, En: Tercer congreso sobre ecuaciones diferenciales y aplicaciones, Mayo 1997 (Rueda, A.D., Guíñez, J.), La Universidad del Zulia, Maracaibo, (1998), **II**, 17 - 23.
- [16] Laforgue, J.; *Estudio asintótico de un impulso metaestable para una ecuación con un término no local*, Pro Math., **14**(27-28) (2000), 13 - 23.
- [17] Laforgue, J.; *Métodos de perturbaciones para ecuaciones algebraicas y diferenciales*, XI T-ForMa, Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente, Cumaná, 2011.
- [18] Laforgue, J.; *Resolución de la indeterminación en la resonancia de Ackerberg y O'Malley*, Trabajo de Ascenso, Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente, Cumaná, 2022.
- [19] Laforgue, J.G., O'Malley, Jr., R.E.; *Supersensitive boundary value problems*, En: Asymptotic and numerical methods for partial differential equations with critical parameters (Kaper, H.G., Garbey, M.), Kluwer, Dordrecht, (1993), 215 - 223.
- [20] Lagerstrom, P.; *Matched asymptotic expansions - Ideas and techniques*, Springer-Verlag, Nueva York, 1988.
- [21] Lakin, W.D.; *Boundary value problems with a turning point*, Stud. Appl. Math., **51**(3) (1972), 261 - 275.
- [22] Lewis, G.N.; *Turning point problems and resonance*, IMA J. Appl. Math., **28** (1982), 169 - 183.
- [23] Lin, C.H.; *The sufficiency of Matkowsky-condition in the problem of resonance*, Trans. Amer. Math. Soc., **278**(2) (1983), 647 - 670.
- [24] Lions, J.L.; *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal*, Springer-Verlag, Berlín Heidelberg, 1973.
- [25] MacGillivray, A.D.; *A method for incorporating transcendently small terms into the method of matched asymptotic expansions*, Stud. Appl. Math., **99** (1997), 285 - 310.
- [26] Matkowsky, B.J.; *On boundary layer problems exhibiting resonance*, SIAM Review, **17**(1) (1975), 82 - 100. *Errata*, SIAM Review, **18**(1) (1976), 112 - 112.

- [27] McKelvey, R., Bohac, R.; *Ackerberg-O'Malley resonance revisited*, Rocky Mountain J. Math., **6** (1976), 637 - 650.
- [28] Nijijima, K.; *Approximate solutions of singular perturbation problems with a turning point*, Funkcialaj Ekvacioj, **24** (1981), 259 - 280.
- [29] Olver, F.W.J.; *Sufficient conditions for Ackerberg-O'Malley resonance*, SIAM J. Math. Anal., **9**(2) (1978), 328 - 355.
- [30] O'Malley, Jr., R.E.; *Thinking about ordinary differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [31] O'Malley., R.E.; *Historical developments in singular perturbations*, Springer, Cham, 2014.
- [32] Sibuya, Y.; *A theorem concerning uniform simplification at a transition point and the problem of resonance*, SIAM J. Math. Anal., **12**(5) (1981), 653 - 668.
- [33] Skinner, L.A.; *Uniform solution of boundary layer problems exhibiting resonance*, SIAM J. Appl. Math., **47**(2) (1987), 225 - 231.
- [34] Srinivasan, R.; *A variational principle for the Ackerberg-O'Malley resonance problem*, Stud. Appl. Math., **79** (1988), 271 - 289.
- [35] Watts, A.M.; *A singular perturbation problem with a turning point*, Bull. Austral. Math. Soc., **5** (1971), 61 - 73.
- [36] Williams, M.; *Another look at Ackerberg-O'Malley resonance*, SIAM J. Appl. Math., **41**(2) (1981), 288 - 293.
- [37] Wong, R.; *Asymptotic approximations of integrals*, Academic Press, San Diego, 1989.
- [38] Wong, R., Yang, H.; *On the Ackerberg-O'Malley resonance*, Stud. Appl. Math., **110** (2003), 157 - 179.
- [39] Zauderer, E.; *Boundary value problems for a second order differential equation with a turning point*, Stud. Appl. Math., **51**(4) (1972), 411 - 413.