Divulgaciones Matemáticas Vol. 23-24, No. 1-2 (2022-2023), pp. 44–53
https://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones/
DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.11539852

e-ISSN 2731-2437
p-ISSN 1315-2068

$Top(X)$ y $Spec(\tau)$ como espacios primales

$Top(X)$ and $Spec(\tau)$ as primal spaces

Viviana Benavides (bfviviana@gmail.com)
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4984-4613
Estudiante Maestría Académica con Trayectoria de Investigación en Matemática, Instituto de Posgrado
Universidad Técnica de Manabí
Portoviejo, Manabí, Ecuador

Jorge Enrique Vielma (jevielma@espol.edu.ec)
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9620-6756
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas
Escuela Superior Politécnica del Litoral
Guayaquil, Guayas, Ecuador

Resumen

Una topología Alexandroff puede ser definida sobre un conjunto no vacío X, a través de una función $f : X \to X$, decidiendo que los abiertos del espacio son los conjuntos $A \subset X$ que contienen a su preimagen, es decir $\tau_f := \{A \subset X : f^{-1}(A) \subseteq A\}$. Esta topología es denominada topología primal, y al espacio (X, τ_f) se lo llama espacio primal. En este trabajo se explora una topología primal τ_ψ inducida en $Top(X)$, a través de la función $\psi : Top(X) \to Top(X)$, definida como $\psi(\tau) = \overline{\tau}$, con $\overline{\tau}$ la clausura de τ en 2^X con la topología producto. Se prueba que el conjunto de todas las topologías Alexandroff en $Top(X)$ es denso en $(Top(X), \tau_{\psi^*})$, con τ_{ψ^*} la cotopología. Se prueba además que el conjunto $\phi(\tau) := \{A \in \tau_\psi : \tau \notin A\}$ es un ideal maximal de τ_ψ si y solo si τ es Alexandroff. Finalmente se exploran las topologías primales en el espectro primo de un semianillo.

Palabras y frases clave: Topología primal; espectro primo; semianillo; topología Alexandroff.

Abstract

An Alexandroff topology can be defined over a non-empty set X, through a function $f : X \to X$, deciding that the open sets are those subsets $A \subseteq X$ that contain their preimage, that is $\tau_f := \{A \subset X : f^{-1}(A) \subseteq A\}$. This topology is called primal topology and the space (X, τ_f) is called primal space. In this work we explore a primal topology τ_ψ induced on $Top(X)$, through the funtion $\psi : Top(X) \to Top(X)$ defined as $\psi(\tau) = \overline{\tau}$, with $\overline{\tau}$ the closure of τ in 2^X with the product topology. It is shown that the set of all Alexandroff topologies in $Top(X)$ is dense in $(Top(X), \tau_{\psi^*})$, with τ_{ψ^*} the cotopology. It is also shown that the set $\phi(\tau) := \{A \in \tau_\psi : \tau \notin A\}$ is a maximal ideal of τ_ψ if and only if τ is Alexandroff. Finally we explore the primal topologies in the prime spectrum of a semiring.

Key words and phrases: Primal topology; prime spectrum; semiring; Alexandroff topology.

Recibido 29/11/2022. Revisado 28/02/2023. Aceptado 24/05/2023.
MSC (2010): Primary 54C99; Secondary 54H13.
Autor de correspondencia: Viviana Benavides

1 Introducción

Pavel Alexandroff en [1], introdujo una clase de espacios topológicos que él demonimó *Espacios discretos*. Estos espacios son aquellos que son cerrados bajo uniones arbitrarias de conjuntos cerrados. Es claro que esta definición es equivalente a que estos espacios son cerrados bajo intersecciones arbitrarias de conjuntos abiertos. Para evitar confusiones con aquellos espacios en los que todo subconjunto es abierto, futuros autores cambiarían regularmente su denominación. McCord en [8] los llama *A-spaces*, Johnstone en [7] los llama *Alexandroff*, Herman en [6], denomina *Espacios dispersos* a los espacios cerrados bajo intersecciones de abiertos que además son T_0. Años después, el nombre usado se mantendría como Espacios Alexandroff. En este trabajo se explora una subclase propia de estos espacios, llamados *Espacios funcionales Alexandroff* (introducidos en [10]) o simplemente *Espacios primales*, definidos a continuación.

Definición 1.1. Sea X un conjunto no vacío y $f : X \to X$ una función, y τ_f la colección de todos los conjuntos, $A \subset X$ tal que $A \in \tau_f$ si y solo si $f^{-1}(A) \subset A$. La colección τ_f es denominada topología primal sobre X y (X, τ_f) es denominado espacio primal.

Es fácil ver, gracias a las propiedades de la pre-imagen de conjuntos, que la intersección arbitraria de abiertos de un espacio primal es un conjunto abierto, haciendo de éste un espacio Alexandroff. Para $Top(X)$, el conjunto de todas las topologías sobre un conjunto no vacío X, es posible definir una topología primal τ_ψ a través de la función $\psi : Top(X) \to Top(X)$ definida como $\psi(\tau) = \overline{\tau}$, la clausura de τ en 2^X con la topología producto. En este trabajo se estudian algunas de las propiedades topológicas de este espacio. Asimismo se hace el estudio de algunas propiedades de τ_ψ vista como un semianillo.

En la última sección de este trabajo, se hace un estudio sobre el espectro primo de un semianillo. En particular, se considera un semianillo Gelfand R y el conjunto de todos los ideales primos de tal semianillo $Spec(R)$. Se considera además la función $\phi : Spec(R) \to Spec(R)$ definida como $\phi(P) = M_P$ con M_P el único ideal maximal que contiene a P. Se hace el estudio del espacio $(Spec(R), \tau_\phi)$ y su relación con el espacio $(Spec(R), \tau_z)$ con τ_z la topología Zariski sobre $Spec(R)$.

2 Preliminares

En esta sección se muestran algunos de los resultados más fundamentales sobre espacios primales. Es posible, para todo espacio primal, definir dos conjuntos elementales, sobre los cuales se pueden construir abiertos y cerrados más generales del espacio.

Definición 2.1. Sea (X, τ_f) un espacio primal y $x \in X$, entonces los siguientes conjuntos

$$Orb(x) = \{f^n(x) : n \geq 0\} \text{ y } ker(x) = \bigcup \{f^{-n}(x) : n \geq 0\}$$

son denominados la órbita y el kernel de x, respectivamente.

Los siguientes son conocidos resultados sobre los conjuntos ya definidos.

Lema 2.1. *Sea (X, τ_f) un espacio primal y $x \in X$, entonces $ker(x)$ es el mínimo abierto de X que contiene a x.*

Como resultado inmediato de este lema, se tiene que la colección de kernels de todo elemento de un espacio primal forma una base para la topología primal.

Lema 2.2. *Sea (X, τ_f) un espacio primal, entonces $ker(x)$ es un subconjunto conexo de (X, τ_f) si x es un punto fijo.*

Demostración. Supongamos que $ker(x) = A \cup B$ donde $A \cap B = \emptyset$, A y $B \neq \emptyset$ y además $\overline{A} \cap B = \emptyset$, $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Supongamos que $x \in A$, entonces $x \notin \overline{B}$ así $x \in \overline{B}^C$. Por lo tanto, $ker(x) \subset \overline{B}^C$ y así $ker(x) \cap B = \emptyset$, una contradicción. □

Nota 2.1. En futuras secciones, se usará también la notación $ker(x)$, para representar la mínima vecindad abierta que contiene al punto x de un espacio topológico X no necesariamente primal.

Lema 2.3. *Sea (X, τ_f) un espacio primal, entonces $Orb(x)$ es el mínimo cerrado que contiene a x.*

El siguiente resultado aparece en [9].

Lema 2.4. *Sea (X, τ) un espacio topológico y A un subconjunto de X. Si A es conexo, entonces $\overline{A}$ es conexo.*

Lema 2.5. *Sea (X, τ_f) un espacio primal, entonces $Orb(x)$ es un subconjunto conexo de (X, τ_f).*

Demostración. Es claro que $\{x\}$ es conexo, y como $\overline{\{x\}}$ es conexo por el lema anterior, se tiene que $\overline{\{x\}} = Orb(x)$ es conexo. □

El siguiente resultado es mostrado en [10] en el Teorema 2.1.

Lema 2.6. *Sea (X, τ_f) un espacio primal. Dos puntos $p, q \in X$ están en la misma componente conexa si existen enteros no negativos n, m tales que $f^n(p) = f^m(q)$.*

3 Topologías primales en $Top(X)$

En esta sección se mostrarán algunos resultados sobre una topología primal definida para $Top(X)$, el conjunto de todas las topologías definidas para un conjunto no vacío X. Se muestran, antes de ello, algunas definiciones fundamentales.

Definición 3.1. Sea (X, τ_f) un espacio primal. Un punto $x \in X$ se dice punto fijo de X si $f(x) = x$. Un punto $y \in X$ se dice punto periódico de X si existe un entero $n \geq 1$ tal que $f^n(y) = y$.

Ejemplo 3.1. *Sea $\mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal, entonces $0_{\mathbb{R}^n}$ es un punto fijo de $\mathbb{R}^n$.*

Ejemplo 3.2. *Sea $\mathbb{N}$ y $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función de Collatz, definida como:*

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

entonces $1, 2, 4$ son puntos periódicos de $\mathbb{N}$ que no son fijos.

Definición 3.2. Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$; denotemos por $C_\tau(A)$ a la familia de cerrados que contienen a A. Como $A \subset X$ y X es un cerrado, entonces $C_\tau(A)$ es no vacío.

Definición 3.3. Llamaremos clausura de A o adherencia de A en X al conjunto:

$$\bar{A} := \bigcap C_T(A)$$

Los elementos de la clausura de A en X, se llaman puntos adherentes a A en X o simplemente puntos adherentes a A si el espacio topológico se da por sobreentendido [4].

De manera alternativa, se usará $cl(A)$ para denotar también la clausura de A. Los siguientes son interesantes resultados mostrado por Uzcátegui y Vielma en [12].

Teorema 3.1. *Sea τ una topología sobre X, la clausura $\bar{\tau}$ de τ en 2^X (i.e. $\{0,1\}^X$ con la topología producto y $2 = \{0,1\}$ con la topología discreta) es una topología.*

Teorema 3.2. *Sea τ una topología sobre X. Entonces los siguientes son equivalentes:*

1. *τ es una topología Alexandroff.*
2. *$\tau \subseteq 2^X$ es cerrada.*

De esta manera, la clausura $\bar{\tau}$ de τ en 2^X es la topología Alexandroff más pequeña que contiene a τ. Sea $Top(X)$ el conjunto de todas las topologías sobre un conjunto no vacío X. Se define la función $\psi : Top(X) \to Top(X)$ de la siguiente manera:

$$\psi(\tau) = \bar{\tau}$$

donde $\bar{\tau}$ es la clausura topológica de τ en 2^X (con la topología producto). La buena definición de esta función se obtiene de la unicidad de la clausura topológica de un conjunto y por el Teorema 3.1. Esta función además, induce una topología primal τ_ψ en $Top(X)$. Denotemos además por $A(X)$ al conjunto de todas las topologías Alexandroff sobre X y $Per(Top(X))$ al conjunto de puntos periódicos de ψ en $Top(X)$.

El siguiente resultado fue mostrado por Echi en [5].

Lema 3.1. *Sea (X,τ) un espacio primal, entonces X es T_0 si y solo si el conjunto de puntos periódicos es igual al conjunto de puntos fijos de X.*

Teorema 3.3. *$(Top(X), \tau_\psi)$ es un espacio T_0.*

Demostración. Es claro que todo punto fijo es un punto periódico. Se verá que en $(Top(X), \tau_\psi)$ además, todo punto periódico corresponde a un punto fijo. Si $\tau \in Top(X)$ y es Alexandroff, entonces por el Teorema 3.2 se tiene que $\psi(\tau) = \tau$ por lo que τ es un punto periódico. Por lo tanto $A(X)$ es un conjunto de puntos periódicos. Asumamos que existe un punto $\tau \in Top(X)$ tal que $\min\{n \in \mathbb{N} : \psi^n(\tau) = \tau\} \geq 2$, es decir, τ es un punto periódico no fijo. Es evidente que, debido a que $\psi(\tau) = \bar{\tau} \neq \tau$ entonces τ no es Alexandroff. Además, por ser periódico, existe $\tau_p = \psi^{-1}(\tau) \in Top(X)$ por lo que τ es la imagen por ψ de una topología, y por el Teorema 3.2 se tiene que τ es Alexandroff, una contradicción. De esta manera, no pueden existir puntos periódicos no fijos. □

El siguiente es un resultado mostrado por Echi en [5].

Lema 3.2. *Sea (X, τ_f) un espacio primal. Entonces las siguientes son equivalentes:*

1. *(X, τ_f) es un espacio T_1*

2. (X, τ_f) *es un espacio* T_2

3. $f = id_X$

Teorema 3.4. $(Top(X), \tau_\psi)$ *es un espacio* T_1 *si y solo si* X *es finito.*

Demostración. Si asumimos que X no es finito entonces la topologia del complemento finito $\rho \in Top(X)$ es una topologia no Alexandroff T_1. Por el Teorema 3.2 se tiene que $\bar{\rho}$ es una topología Alexandroff tal que $ker(\bar{\rho}) = \{\bar{\rho}, \rho\}$ con $\rho \neq \bar{\rho}$, por lo que $\psi \neq id_{Top(X)}$ y por el Lema 3.2 se tiene que $(Top(X), \tau_\psi)$ no puede ser T_1.

Por otro lado, si asumimos que X es finito, entonces toda toplogia τ definida en X es Alexandroff. Por lo tanto $Orb(\tau) = \{\tau\} = ker(\tau)$ y así τ_ψ es discreta por lo que $Top(X)$ es T_1. □

Definición 3.4. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se denotará por τ^* a la cotopología sobre X, el conjunto formado por los subconjutos cerrados de (X, τ).

Definición 3.5. Un subconjunto A de un espacio topológico (X, τ) es denso en X si para cada $x \in X$, toda vecindad U de x intersecta a A.

Teorema 3.5. *Sea* X *un conjunto no vacío. El conjunto A(X) es denso en* $(Top(X), \tau_\psi^*)$ *pero no es denso en* $(Top(X), \tau_\psi)$.

Demostración. Se prueba que $A(X)$ no es denso en $(Top(X), \tau_\psi)$ mostrando que existe un elemento de $Top(X)$, y una vecindad abierta en τ_ψ de tal punto, que no intersecta a $A(X)$. Si τ no es Alexandroff, entonces $ker(\tau) = \{\tau\}$, por lo que $ker(\tau) \cap A(X) = \emptyset$ y así $A(X)$ no es τ_ψ denso. Por otro lado, si τ no es Alexandroff, entonces $Orb(\tau) = \{\tau, \bar{\tau}\}$ por lo que $Orb(\tau) \cap A(X) \neq \emptyset$, y por ser $Orb(\tau)$ el mínimo abierto de τ en τ_ψ^* se tiene que toda vecindad abierta de $\tau \in (Top(X), \tau_\psi^*)$ intersecta $A(X)$, y así $A(X)$ es τ_ψ^* denso. □

Ejemplo 3.3. *Sea* X *un conjunto infinito. La topología del complemento finito* $\rho \in Top(X)$ *es una topología no Alexandroff, por lo que* $\overline{\rho}$ *es una topología Alexandroff tal que* $ker(\overline{\rho}) = \{\overline{\rho}, \rho\}$ *con* $\rho \neq \overline{\rho}$. *Así,* ρ *es un elemento de* $Top(X)$ *con una vecindad abierta* $ker(\rho) = \{\rho\}$ *que no intersecta a* $A(X)$, *por lo que* $A(X)$ *no es denso en* $(Top(X), \tau_\psi)$.

Teorema 3.6. $(Top(X), \tau_\psi)$ *es compacto si y solo si* X *es finito*

Demostración. Si X es finito, $Top(X)$ es finito y entonces compacto. Si $(Top(X), \tau_\psi)$ es compacto entonces $A(X) = Per(Top(X))$ es un conjunto finito y ademas para todo $\tau \notin A(X)$ se cumple que $\bar{\tau}$ es periódico y además $\bar{\tau} \in A(X)$ y $ker(\tau) = \{\tau\}$. Por lo tanto $Top(X) = \bigcup_{\tau \in A(X)} ker(\tau)$ es un conjunto finito y entonces X es finito □

Lema 3.3. $A(X)$ *es un conjunto cerrado de* $(Top(x), \tau_\psi)$.

Demostración. Sea $\tau \in A(X)$, entonces $Orb(\tau) = \{\tau\}$. Por lo tanto, $A(X) = \bigcup_{\tau \in A(X)} \{\tau\}$ y así $A(X)$ es cerrado. □

Definición 3.6. Un espacio topológico se dice que es $T_{\frac{1}{2}}$ si cada conjunto unitario o es abierto o es cerrado [11].

Teorema 3.7. $(Top(X), \tau_\psi)$ *es un espacio* $T_{\frac{1}{2}}$

Demostración. Sea $\tau \in Top(x)$. Si τ es Alexandroff, entonces por el Teorema 3.2, se tiene que $\tau \subseteq 2^X$ es cerrada y $Orb(\tau) = \{\tau\}$. Si τ no es Alexandroff, entonces por los Teoremas 3.2 y 3.1, se tiene que $ker(\tau) = \{\tau\}$ por lo tanto $\{\tau\} \in \tau_\psi$. □

Definición 3.7. Una propiedad se dice que es teórica en el orden si por cada espacio topológico (X, τ) que satisface P también se cumple que $(X, \bar{\tau})$ satisface P y viceversa (Un ejemplo está dado en el Lema 3.4).

Teorema 3.8. *Una propiedad P es teórica en el orden si y solo si $\delta = \{\tau \in Top(X) : (X, \tau)$ satisface la propiedad $P\}$ es un subconjunto cerrado de $(Top(X), \tau_\psi)$*

Demostración. Sea $\tau \in \delta$ y P una propiedad teórica en el orden, entonces $\psi(\tau) = \bar{\tau} \in \delta$. Por lo tanto $\psi(\delta) \subseteq \delta$ y δ es cerrado. Por otro lado, si δ es cerrado, entonces $\psi(\tau) = \overline{\tau} \in \delta$ para todo $\tau \in \delta$. Por lo tanto $(X, \overline{\tau})$ satisface la propiedad P y P es teórica en el orden. □

El siguiente resultado es mostrado por Uzcátegui y Vielma en [12]

Lema 3.4. *Sea τ una topología sobre X, entonces:*

- *τ es T_0 si y solo si $\bar{\tau}$ es T_0*
- *τ es T_1 si y solo si $\bar{\tau}$ es denso en 2^X.*

Definición 3.8. Un espacio topológico (X, τ) se dice que satisface el axioma de separación $T_{1/4}$ si $\{x\}$ es cerrado o $\{x\} = \bigcap_{A \in \tau} A$ para todo $x \in X$ [3].

Corolario 3.1. *Los subconjuntos de $Top(X)$: $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_{1/4}$, donde $\sigma_i = \{\tau \in Top(X) : (X, \tau)$ es $T_i\}$ son cerrados en $(Top(X), \tau_\psi)$.*

Teorema 3.9. *El conjunto $\sigma_1 = \{\tau \in Top(x) : (X, \tau)$ es $T_1\}$ es un subconjunto conexo de $Top(X)$ y es la componente conexa de cada uno de sus puntos.*

Demostración. Sea $\tau \in \sigma_1$, entonces por el Teorema 3.2 y el Lema 3.4 se tiene que $\bar{\tau}$ es la topología discreta τ_d. Por lo tanto, $Orb(\tau) = \{\tau, \tau_d\}$ para todo $\tau \in \sigma_1$. Entonces $ker(\tau_d) = \sigma_1$ y por el Lema 2.2, se tiene que σ_1 es conexo. □

Teorema 3.10. *El conjunto $\sigma_1 = \{\tau \in Top(x) : (X, \tau)$ es $T_1\}$ es un subconjunto compacto de $(Top(X), \tau_\psi)$*

Demostración. Sea β una colección de subconjuntos abiertos de $Top(X)$ que cubre σ_1. Existe al menos un $A \in \beta$ tal que $\tau_d \in A$. Entonces $ker(\tau_d) \subset A$ pero $ker(\tau_d) = \sigma_1$, con lo cual $\sigma_1 \subset A$ y el conjunto formado únicamente por A es un subcubrimiento finito de β y por lo tanto σ_1 es compacto. □

La siguiente definición es dada por Barría et al. en [2].

Definición 3.9. Un semianillo es una estructura algebraica $(R, +, ., 0, 1,)$ donde R es un conjunto con 0 y 1 elementos de $R, y + y$. son operaciones binarias internas sobre R llamadas suma y multiplicación respectivamente que satisfacen lo siguiente:

1. $(R, +, 0)$ es un monoide conmutativo con elemento de identidad 0.
2. $(R, \cdot, 1)$ es un monoide con elemento de identidad 1.

3. La multiplicación es distributiva respecto a la adición.
4. 0 es el elemento absorbente de la multiplicación.

Teorema 3.11. *Sea $\tau \in Top(x)$ y $\phi(\tau) = \{A \in \tau_\psi : \tau \notin A\}$, entonces $\phi(\tau)$ es un ideal maximal si y solo si τ es una topología Alexandroff.*

Demostración. Asumamos que τ no es Alexandroff. Por el Teorema 3.2, se tiene que $\ker(\tau) = \{\tau\}$. Además, puesto que $\tau \in \ker(\tau)$ y $\tau \in \ker(\bar{\tau})$ se tiene que $\ker(\tau)$ y $\ker(\bar{\tau}) \notin \phi(\tau)$. Entonces $I = \phi(\tau) \cup \ker(\tau)$ es un ideal propio de τ_ψ que contiene propiamente a $\phi(\tau)$, y $\phi(\tau)$ no puede ser maximal.

Por otro lado, si $\phi(\tau)$ no es maximal, entonces existe un ideal I de τ_ψ tal que $\phi(\tau) \subset I$. Entonces existe $A \in I$ tal que $A \notin \phi(\tau)$, y $\tau \in A$. Como τ es Alexandroff, por el Teorema 3.2, se tiene que $\mathrm{cl}(\tau) = \{\tau\}$ por lo que $\mathrm{Top}(X) \setminus \{\tau\}$ es un abierto que pertenece a $\phi(\tau)$. Por lo tanto $(\mathrm{Top}(X) \setminus \{\tau\}) \cup A = \mathrm{Top}(X) \in I$, y $\tau_\psi = I$. De aquí que $\phi(\tau)$ es un ideal maximal de τ_ψ. □

Los siguientes resultados son mostrados por Barria en [2].

Lema 3.5. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Todo ideal finitamente generado de τ es un ideal principal.*

Lema 3.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si I es un ideal de τ, entonces $I \subset \langle \bigcup\{a : a \in I\} \rangle$.*

Se tiene entonces el siguiente resultado.

Teorema 3.12. *Todo ideal maximal M de τ_ψ tal que $\bigcup\{A : A \in M\} \neq Top(X)$ es un ideal principal.*

Demostración. Si $\bigcup\{A : A \in M\} \neq Top(X)$, entonces $\langle \bigcup\{A : A \in M\} \rangle \neq \tau_\psi$. Por el Lema 3.6, se tiene que $M \subset \langle \bigcup\{A : A \in M\} \rangle$ y puesto que M es maximal, entonces se tiene $M = \langle \bigcup\{A : A \in M\} \rangle$. □

4 Topologías primales en el espectro primo de un semianillo

En esta sección se estudian algunas de las propiedades de una topología primal definida para $Spec(R)$ con R un semianillo Gelfand. Se estudian además la relación de las propiedades de este espacio con aquellas del espacio $(Spec(R), \tau_z)$ con τ_z la topología Zariski. La siguiente definición es mostrada en [2].

Definición 4.1. Sea R un semianillo con identidad no nula. Denotemos por $Spec(R)$ al conjunto de los ideales primos de R. Se define la topología de Zariski τ_z en $Spec(R)$ como aquella cuyos cerrados son de la forma:

$$(I)_z = \{P \in Spec(R) : I \subseteq P, I \text{ es un ideal de R}\}$$

En [2] se muestran los cuatro siguientes resultados.

Lema 4.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces para todo $x \in X$ se tiene:*

1. *$ker_{\bar{\tau}}(x)$ es el menor $\bar{\tau}$-abierto que contiene a x.*

2. $cl_\tau(\{x\}) = cl_{\bar{\tau}}(\{x\})$

3. $ker_\tau(x) = ker_{\bar{\tau}}(x)$

Corolario 4.1. *Considérese los espacios $(Spec(R), \tau_z)$ y $(Spec(R), \overline{\tau_z})$, y $P \in Spec(R)$, entonces:*

1. $(P)_z = cl_{\tau_z}(\{P\}) = cl_{\overline{\tau_z}}(\{P\})$

2. $ker_{\tau_z}(\{P\}) = ker_{\overline{\tau_z}}(\{P\})$

Lema 4.2. *Considere el espacio $(Spec(R), \tau_z)$. Si $M \in Max(R)$, entonces $P \in ker_{\tau_z}(M)$ si y solo si $P \subseteq M$.*

Definición 4.2. Sea R un semianillo con identidad no nula y $Spec(R)$ el conjunto de los ideales primos de R. Se dice que R es Gelfand si cada ideal primo está contenido en un único ideal maximal. Se dice semilocal si tiene una cantidad finita de ideales maximales y se dice local si tiene un solo ideal maximal.

Teorema 4.1. *Un semianillo R es Gelfand si y solo si para todo $M \in Max(R)$, $ker(M)$ es $\overline{\tau_z}$ clopen.*

Demostración. Sean $P \in ker(M)$ y $Q \in (P)_z$. Por el Lema 4.2, se tiene $P \subseteq M$. Como $P \subseteq Q$ y R es un semianillo Gelfand, si M_Q es el único ideal maximal que contiene a Q, entonces $M_Q = M$. Puesto que $Q \subseteq M$, por el Lema 4.2, $Q \in ker(M)$. Luego, $(P)_z \subseteq ker(M)$ y así $\bigcup\{(P)_z : P \in ker(M)\} = ker(M)$. Por el Corolario 4.1, $ker(M)$ es $\overline{\tau_z}$ cerrado.

Por otro lado, sean P un ideal primo y M_1, M_2 ideales maximales que contienen a P. Por el Lema 4.2, $P \in ker(M_1)$ y $P \in ker(M_2)$. Por el Corolario 4.1 e hipótesis, $(P)_z = cl_{\overline{\tau_z}}(P) \subseteq ker(M_2)$. Además, como $M_1 \in (P)_z$, por el Lema 4.2, $M_1 \in ker(M_2)$, por lo que $M_1 = M_2$. Por lo tanto, R es un semianillo Gelfand. □

Consideremos a R como un semianillo Gelfand y $\phi : Spec(R) \to Spec(R)$ definida como

$$\phi(P) = M_p$$

donde M_p es el único ideal maximal que contiene a P. Esta función induce una topología primal τ_ϕ en $Spec(R)$.

Lema 4.3. *Sea $Max(R)$ el conjunto de los ideales maximales de R, entonces $\{ker(M) : M \in Max(R)\}$ es un cubrimiento de $\overline{\tau_z}$ abierto de $Spec(R)$.*

Demostración. Por el Lema 4.1, se tiene que $ker(M)$ es $\overline{\tau_z}$ abierto para todo $M \in Max(R)$. Sea $P \in Spec(R)$, por ser R un semianillo Gelfand, entonces existe un único ideal maximal M que contiene a P, además $P \in ker(M)$. Es claro entonces que la colección $\{ker(M) : M \in Max(R)\}$ es un cubrimiento de $\overline{\tau_z}$ abierto de $Spec(R)$. □

Teorema 4.2. *Sea R un semianillo Gelfand no vacío, entonces los siguientes son equivalentes:*

1. $(Spec(R), \tau_\phi)$ *es compacto*

2. *R es semilocal*

3. $(Spec(R), \bar{\tau}_z)$ *compacto*

Demostración. ($1 \to 2$) Sea $\{M_\alpha\}$ una colección de ideales maximales de R. Por ser R un semianillo Gelfand, entonces cada ideal primo P de R está contenido en algún M_α y así $Spec(R) = \bigcup_{M_\alpha \in Spec(R)} ker(M_\alpha)$. Si $(Spec(R), \tau_\phi)$ es compacto, entonces existe una subcolección finita $\{M_n\}$ tal que $Spec(R) = \bigcup_{M_n \in Spec(R)} ker(M_n)$. Es claro entonces que R contiene una cantidad finita de ideales maximales y así es semilocal.

($2 \to 1$) Sea $\{A_\alpha\}$ una colección de abiertos de $(Spec(R), \tau_\phi)$ tales que $Spec(R) = \bigcup_{A_\alpha \in Spec(R)} A_\alpha$. Dado que cada abierto A_α puede ser escrito como $A_\alpha = \bigcup_{M_i \in A_\alpha} ker(M_i)$ con M_i los ideales maximales de R en A_α entonces $Spec(R) = \bigcup_{M_j \in Spec(R)} ker(M_j)$. Dado que R es semilocal, entonces existe una colección finita $\{M_n\}$ de ideales maximales de R y entonces $Spec(R) = \bigcup_{M_n \in Spec(R)} ker(M_n)$, donde $M_n \in A_{\alpha_n}$ y así $(Spec(R), \tau_\phi)$ es compacto.

($2 \to 3$) Si R es semilocal, entonces R tiene una cantidad finita de ideales maximales M_i con $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ un cubrimiento de $\overline{\tau_z}$ abiertos de $Spec(R)$. Para todo $M_i \in Spec(R)$ existe α_i tal que $M_i \in U_{\alpha_i}$, y de aquí $ker(M_i) \subseteq U_{\alpha_i}$. Por el Lema 4.3 se tiene que $\{ker(M_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$ es un cubrimiento finito de $Spec(R)$ y así $(Spec(R), \bar{\tau}_z)$ es compacto.

($3 \to 2$) De la demostración de la implicación anterior y del Lema 4.3 se deduce fácilmente. $\square$

Teorema 4.3. *Sea R un semianillo Gelfand no vacío, entonces los siguientes son equivalentes:*

1. $(Spec(R), \tau_\phi)$ *es conexo*
2. *R es local*
3. $(Spec(R), \bar{\tau}_z)$ *conexo*

Demostración. ($1 \to 2$) Si R no es local, entonces existen al menos dos ideales maximales M_1, M_2 de R. Dado que R es un semianillo Gelfand entonces $ker(M_1) \cap ker(M_2) = \emptyset$ y $ker(M_1) \cup ker(M_2) = Spec(R)$ y así $(Spec(R), \tau_\phi)$ no es conexo.

($2 \to 1$) Si R es local, entonces existe un único ideal maximal M de R y para todo ideal primo P de R se tiene $\phi(P) = M$ y así $(Spec(R), \tau_\phi)$ es conexo.

($2 \to 3$) Sean U un $\bar{\tau}_z$ clopen, M el único ideal maximal de R y $P \in Spec(R)$. Si $P \in U$, entonces por el Corolario 4.1 se tiene que $(P)_z = cl_{\overline{\tau_z}}(P) \subseteq U$. Por tanto, $M \in U$, por lo que $ker(M) \subseteq U$. Por el Lema 4.3 se tiene que $ker(M) = Spec(R)$, por lo que $U = Spec(R)$.

($3 \to 2$) Sea M un ideal maximal de R. Por el Teorema 4.1 se tiene que $ker(M)$ es $\overline{\tau_z}$ clopen, y dado que $ker(M) \neq \emptyset$ se sigue que $Spec(R) = ker(M)$. Además, si M_0 es un ideal maximal de R, entonces $M_0 \in ker(M)$ y por el Lema 4.2 se tiene $M_0 \subseteq M$, y de aquí que M es el único ideal maximal de R. $\square$

Teorema 4.4. *Sea R un semianillo Gelfand no vacío y $P \in Spec(R)$, entonces los siguientes son equivalentes:*

1. $\{P\}$ *es* τ_z *cerrado*
2. $\{P\}$ *es* τ_ϕ *cerrado*
3. *P es un ideal maximal*

Demostración. ($1 \to 2$) Si $\{P\}$ es τ_z cerrado, entonces P es el único ideal primo que contiene a I, un ideal de R. Además, si $\phi(P) \neq P$ entonces existe un idelal $M \in Spec(R)$ tal que $M \in Orb(P)$ y $P \subsetneq M$. De esta manera $I \subset P \subsetneq M$, una contradicción.

$(2 \to 3)$ Si $\{P\}$ es τ_ϕ cerrado, entonces $\phi(P) = P$ y por la definición de la función ϕ se tiene que P es maximal.

$(3 \to 1)$ Como P es maximal, entonces el único ideal primo de R que contiene a P es sí mismo. De esta manera $\{P\}$ es τ_z cerrado. $\square$

Teorema 4.5. *$Max(R)$ es un subconjunto cerrado y además es τ_ϕ^* denso*

Demostración. Del Teorema 4.4, se tiene que si P es maximal entonces $\{P\}$ es τ_ϕ cerrado, es decir $\phi(P) = P$. Por lo tanto $\phi(Max(R)) = Max(R)$ y así $Max(R)$ es τ_ϕ cerrado. Además, si $P \in Spec(R)$ tal que $P \notin Max(R)$ se tiene que $\phi(P) = M_P \in Max(R)$ con M_P el único ideal maximal que contiene a P. Por lo tanto $Orb(P) \cap Max(R) \neq \emptyset$ y así $Max(R)$ es τ_ϕ^* denso. $\square$

Agradecimientos

Se agradece al Magíster Carlos García Mendoza por la guía brindada en la preparación y edición del artículo.

Referencias

[1] Alexandroff, P. *Diskrete Raume*, Recueil Mathématique, **2**(24) (1937), 501 - 5019.

[2] Barría, S. *Propiedades de las topologías vistas como semianillos*, Tesis de Maestría, Universidad de Concepción, 2016.

[3] Colasante, M., Uzcátegui, C., and Vielma, J. *Low separation axioms via the diagonal*, Applied General Topology, **9**(1) (2008), 39 - 50.

[4] Croom, F. *Principles of Topology*, Dover Publications, 2016.

[5] Echi, O. *The categories of flows of Set and Top*, Topology and its Applications, **159**(9) (2012), 2357 - 2366.

[6] Herman, G. *On topology as applied to image analysis*, Computer Vision, Graphics, and Image Processing, **52**(3) (1990), 409-415.

[7] Johnstone, S. *Stone Spaces*, Cambridge University Press, 1982.

[8] McCord, M. *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces*, Duke Mathematical Journal, **33**(3) (1966), 465-474.

[9] Munkres, J. *Topology*, Prentice Hall, 2000.

[10] Shirazi, F. and Golestani, N. *Functional Alexandroff Spaces*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, **40**(4) (2011), 515 - 522.

[11] Subha, E. and Nagaveni, N. *Strong separation axioms of $T_{1/2}$-spaces*, International Journal of Mathematical Analysis, **8**(33) (2014), 1723-1732.

[12] Uzcátegui, C. and Vielma, J. *Alexandroff topologies viewed as closed sets in the Cantor cube*, Divulgaciones Matemáticas, **13**(1) (2005), 45 - 53.