

Los números Ramsey para tres grafos y tres colores

The Ramsey numbers for three graphs and three colors.

José Figueroa (jose3765@gmail.com)

Departamento de Química
Universidad Clodosbaldo Russián
Cumaná, Venezuela.

Tobías Rosas Soto (tjrosas@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8085-5011>
Departamento de Matemática
Universidad del Zulia, Facultad Experimental de Ciencias
Maracaibo, Venezuela.

Henry Ramírez (hramirez6@hotmail.com)

Departamento de Higiene y Seguridad Laboral
Universidad Clodosbaldo Russián
Cumaná, Venezuela.

Armando Anselmi (alanselm2010@gmail.com)

Departamento de Matemáticas
Universidad de Oriente
Cumaná, Venezuela.

Resumen

Dado un grafo Ψ de orden t , simple, finito, y no vacío. Se llamará sobreposición de Ψ al grafo completo K_t definido por $\Psi \cup \bar{\Psi}$, donde $\bar{\Psi}$ denota el complemento de Ψ . Así, dados dos grafos G y H , simples, conexos, finitos, no vacíos, y dos colores distintos. El número de Ramsey $R(G, H)$, se define como el menor entero positivo t , tal que existe algún grafo Ψ que contiene una copia monocromática G' de G , o $\bar{\Psi}$ contiene una copia monocromática H' de H , y K_t es una superposición de Ψ , es decir, Ψ es un subgrafo de K_t . De forma similar, dados tres grafos G , H_1 , y H_2 , simples, conexos, finitos, no vacíos, y tres colores distintos $\{0, 1, 2\}$, se define como el número Ramsey $R(G, H_1, H_2)$ al menor entero positivo t tal que existe una terna de grafos (Ψ, Ψ_1, Ψ_2) que satisfagan lo siguiente: (1) $\bar{\Psi} = \Psi_1 \cup \Psi_2$; (2) El grafo completo K_t es la superposición de Ψ ; (3) $|V(K_t)| = |V(\Psi)| = |V(\Psi_1)| = |V(\Psi_2)|$; (4) $E(\Psi_1) \cap E(\Psi_2) = \emptyset$; y (5) El grafo Ψ contiene una copia monocromática G' de G , o de Ψ_1 puede extraerse una copia monocromática H'_1 de H_1 , o de Ψ_2 puede extraerse una copia monocromática H'_2 de H_2 . En este trabajo se muestra que, para $n \geq 4$, dados los grafos K_n un grafo completo, W_n un grafo rueda, y D_4 un grafo diamante. Si $t = \max\{|K_n|, |W_n|, |D_4|\}$, entonces $R(K_n, W_n, D_4) = t + 2$, para $t \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1, 2, 3, 4\}$.

Palabras y frases clave: Números Ramsey, coloración de grafos, números combinatorios, unión de grafos, sobreposición de grafos.

Abstract

Given a graph Ψ of order t , simple, finite, and non-empty. An superposition of Ψ will be called the complete graph K_t defined by $\Psi \cup \bar{\Psi}$, where $\bar{\Psi}$ denotes the complement of Ψ . So, given two graphs G and H , simple, connected, finite, non-empty, and two different colors. The Ramsey number $R(G, H)$, is defined as the smallest positive integer t such that there exists some graph Ψ that contains a monochrome copy G' of G , or $\bar{\Psi}$ contains a monochrome copy H' of H , and K_t is a superposition of Ψ , that is, Ψ is a subgraph of K_t . Similarly, given three graphs G , H_1 , and H_2 , simple, connected, finite non-empty, and three distinct colors $\{0, 1, 2\}$, is defined as the Ramsey number $R(G, H_1, H_2)$ to the smallest positive integer t such that there exists a triplet of graphs (Ψ, Ψ_1, Ψ_2) that satisfy the following: (1) $\bar{\Psi} = \Psi_1 \cup \Psi_2$; (2) The complete graph K_t is the superposition of Ψ ; (3) $|V(K_t)| = |V(\Psi)| = |V(\Psi_1)| = |V(\Psi_2)|$; (4) $E(\Psi_1) \cap E(\Psi_2) = \emptyset$; and (5) The graph Ψ contains a monochrome copy G' of G , or from Ψ_1 can be made a monochrome copy H'_1 of H_1 , or from Ψ_2 a monochrome copy H'_2 of H_2 can be extracted. In this work it is shown that, for $n \geq 4$, given the graphs K_n a complete graph, W_n a roll graph, and D_4 a diamond graph. If $t = \max\{|K_n|, |W_n|, |D_4|\}$, then $R(K_n, W_n, D_4) = t + 2$, for $t \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1, 2, 3, 4\}$.

Key words and phrases: Ramsey numbers, graph coloring, combinatorial numbers, graph union, graph superposition.

1 Introducción

El origen de la teoría de grafos se remonta al siglo XVIII, en el año 1736, con el problema de los puentes de Königsberg, el cual consistía en encontrar un camino que recorriera los siete puentes del río Pregel. La solución a dicho planteamiento fue considerada como el primer resultado de la teoría de grafos y el primer resultado topológico en la geometría. Se define el grafo G como un par de conjuntos (V, E) , denotado por $G = (V, E)$, donde V es un conjunto no vacío de elementos llamados vértices o nodos y E es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V , llamados lados o aristas; si G no posee lazos ni lados múltiples es un grafo simple. El orden de G , denotado por $|V|$, es el número de vértices de G . En 1933, Erdős y Szekeres en [7], inician el estudio de la teoría Ramsey, llamada así en honor a Frank P. Ramsey. Tiempo después descubrieron la conexión con los trabajos que Ramsey consiguió en su corta vida. En 1947, P. Erdős en [6], afirma que el propio Ramsey había observado que

$$R(k, k) \leq 2^{\frac{k(k-1)}{2}}, \quad (1.1)$$

que luego mejoró obteniendo:

$$R(k, k) \leq k!, \quad (1.2)$$

aunque él mismo aventuraba que esta cota podría reducirse. En 1972, Chvátal y Harary en [5], dan en forma general una cota inferior para los números Ramsey:

$$R(G, H) \geq (c(G) - 1)(\chi(H) - 1) + 1, \quad (1.3)$$

donde $c(G)$ es el orden de la componente más larga de G , y $\chi(H)$ es el número cromático del grafo H . En 1984, Burr y P. Erdős en [2], dan una cota inferior más general que la de Chvátal y Harary:

$$R(G, H) \geq (n - 1)(\chi(H) - 1) + \sigma(H), \quad (1.4)$$

donde G es un grafo conexo de orden n y $\sigma(H)$ el excedente cromático del grafo H . El grafo G es bueno con respecto a H , denotado por H -bueno, si es válida la desigualdad (1.4) de lo contrario G no contendría componentes H -buena. En 1994, Radziszowski y Xia en [9], dieron un método sencillo y unificado para mostrar resultados del número de Ramsey $R(C_3, G)$, donde G es un camino, ciclo o una rueda. En 1995, Zhou en [12], prueba que $R(C_n, W_m) = 2m + 1$, para $n \geq 3$ impar y $m \geq 5n - 7$. En 2001, Surahmat y Baskoro demostraron en [10] que, para cada $n \geq 3$, se tiene que $R(P_n, W_4) = 2n - 1$ y $R(P_n, W_5) = 3n - 2$. En 2002, Baskoro et al [1], y en 2005, Chen et al en [4], probaron que $R(P_n, W_6) = 2n - 1$, para todo $n \geq 6$ y $R(P_n, W_7) = 3n - 2$, para todo $n \geq 7$, respectivamente. En 2018, Villaroel et al en [11], estudiaron un método algorítmico para el cálculo del número baricéntrico de Ramsey para el grafo estrella. En 2019, Figueroa et al [8], estudiaron los números de Ramsey con componente h -buena y secuencias simétricas.

Dado un grafo Ψ de orden t , simple, finito, y no vacío. Se llamará sobreposición de Ψ al grafo completo K_t definido por $\Psi \cup \bar{\Psi}$, donde $\bar{\Psi}$ denota el complemento de Ψ . El número de Ramsey $R(G, H)$, se define como el menor entero positivo t , tal que existe algún grafo Ψ de orden t , que contiene una copia monocromática G' de G , o $\bar{\Psi}$ contiene una copia monocromática H' de H y K_t es una superposición de Ψ . Nótese que en esta definición de número Ramsey se utilizan dos grafos y dos colores. El objetivo de este trabajo es determinar un método, que permita hallar el menor grafo completo $K_{R(K_n, W_n, D_4)} = \Psi \cup \Psi_1 \cup \Psi_2$, con $\bar{\Psi} = \Psi_1 \cup \Psi_2$, que coloreado con tres colores diferentes, cumpla una de las siguientes afirmaciones:

- Ψ contiene una copia monocromática G' de K_n .
- Ψ_1 contenga una copia monocromática H'_1 de W_n .
- Ψ_2 contenga una copia monocromática H'_2 de D_4 .

En el ejemplo que se presentará n es el orden inicial del grafo dado, y $t = \max\{|k_n|, |W_n|, |D_4|\}$. El procedimiento fundamental es: primero incrementar el número de vértices t en una unidad ($t \rightarrow t + 1$) formando el grafo completo K_{t+1} . Luego, si

$$|E(K_{t+1})| < |E(K_n)| + |E(W_n)| + |E(D_4)|,$$

en cuyo caso

$$|E(\Psi)| < |E(K_n)|, \quad |E(\Psi_1)| < |E(W_n)|, \quad \text{y} \quad |E(\Psi_2)| < |E(D_4)|.$$

Se incrementa nuevamente el número de vértices de $t + 1$ a $t + 2$, formando el grafo completo K_{t+2} y obteniendo que

$$|E(\Psi)| \geq |E(K_n)|, \quad \text{ó} \quad |E(\Psi_1)| \geq |E(W_n)| \quad \text{ó} \quad |E(\Psi_2)| \geq |E(D_4)|.$$

Para el cálculo del número de aristas del grafo K_{t+2} se utiliza el polinomio $P(t) = \frac{t^2 - t}{2}$ que proviene del número combinatorio $\binom{t}{2}$ que representa el número de aristas del grafo K_t . Con

dicho polinomio se definen $|E(K_{t+2})| = P(t+2)$. Para determinar el número de secuencias s_i con las que se colorea el grafo K_{t+2} se define el polinomio $Q(t) = \binom{P(t+2)}{2}$, todo esto para $t \geq 5$. Con esto se define una aplicación $\Upsilon : E(K_{t+2}) \rightarrow (s_i)_{i=1}^{Q(t)}$, que colorea los lados de $K_{t+2} = \Psi \cup \Psi_1 \cup \Psi_2$, con cada s_i , para cada $t \geq 5$, tal que satisfacen las definiciones 2.1 y 2.2 de la Sección 2 de este manuscrito, es decir, garantiza la existencia de una función biyectiva φ que preserva las adyacencias entre grafos. Dicho con otras palabras, Ψ contiene una copia monocromática G' de K_n , o Ψ_1 contiene una copia H'_1 de W_n , o Ψ_2 contiene una copia H'_2 de D_4 . En la Sección 2 se dan algunas definiciones y enunciados que sustentan este trabajo, en la Sección 3 se da un ejemplo y un cuadro de valores de donde se ilustra el resultado y finalmente en la Sección 4 se da el resultado y se demuestra.

2 Preliminares

Definición 2.1. Sean G y H dos grafos distintos del vacío y se consideran dos colores diferentes. Se dice que el par (G, H) es isomorfo al par (G', H') , si G es bueno con respecto a H , si existe un grafo Ψ tal que $G' \triangleleft \Psi \circ H' \triangleleft \bar{\Psi}$. Además, satisfacen la existencia de una función biyectiva φ que preserva las adyacencias entre los vértices de los grafos, es decir,

- i) $\varphi : V(G') \rightarrow V(G); u_i v_j \in E(G') \Leftrightarrow \varphi(u_i) \varphi(v_j) \in E(G)$ o
- ii) $\varphi : V(H') \rightarrow V(H); u_k v_p \in E(H') \Leftrightarrow \varphi(u_k) \varphi(v_p) \in E(H)$

Definición 2.2. Sea Ψ un grafo de orden t , simple, finito, y no vacío. Se llamará sobreposición de Ψ al grafo completo K_t definido por $\Psi \cup \bar{\Psi}$, donde $\bar{\Psi}$ denota el complemento de Ψ .

Proposición 2.1. Dado el grafo completo K_t , con $t \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$|E(K_t)| = C_2^t = \binom{t}{2} = \frac{t(t-1)}{2}$$

Definición 2.3. Dado el grafo completo K_t , con $t \in \mathbb{N}$, se definirá

$$P(t) = |E(K_t)| = \frac{t(t-1)}{2}$$

al polinomio que determina el número de aristas del grafo completo K_t .

Corolario 2.1. Dados los grafos completos K_{t+1} y K_{t+2} , con $t \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$P(t+1) = \frac{(t+1)(t)}{2} = \frac{t^2+t}{2} \quad \text{y} \quad P(t+2) = \frac{(t+2)(t+1)}{2} = \frac{t^2+3t+2}{2}$$

Definición 2.4. Sean $\{0, 1, 2\}$ tres colores dados y $s = (x_1, \dots, x_r)$ la sucesión, con $x_i \in \{0, 1, 2\}$, construida de la siguiente forma:

1. La sucesión s es monocromática. Fijado x_1 , se tiene que $x_i = x_{i-1}$ para $i = 2, \dots, r$.
2. La sucesión s es bicromática. Hay un índice k , con $1 \leq k \leq r$, tal que $x_{k-1} < x_k$ y

$$x_1 = \dots = x_{k-1} \quad \text{y} \quad x_k = \dots = x_r$$

3. La sucesión s es tricromática. Hay dos índices k y q , con $k, q \leq r$ y $k < q$, tales que $x_k < x_q < x_r$ y

$$x_1 = \cdots = x_k \quad x_{k+1} = \cdots = x_q \quad x_{q+1} = \cdots = x_r$$

Proposición 2.2. Sean $\{0, 1, 2\}$ tres colores dados y r la longitud de la sucesión $s = (x_1, \dots, x_r)$ construida como en la Definición 2.4, entonces el número de sucesiones posibles formadas por los tres colores está dado por el número combinatorio

$$\binom{r+2}{2} = \frac{(r+2)(r+1)}{2}.$$

Demostración. Claramente se tiene una sola secuencia s tal que $x_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, r$. Ahora se procederá a fijar el mayor número de entradas de s con el color 0 y se determinará la cantidad de sucesiones que se puedan formar con los colores $\{0, 1, 2\}$. Si $x_i = 0$ para $i = 1, \dots, r-1$ se obtienen 2 sucesiones ya que $x_r = 1$ o $x_r = 2$. Si se hace $x_i = 0$ para $i = 1, \dots, r-2$ se obtienen 3 sucesiones ya que las últimas dos coordenadas podrían ser $(1, 1)$, o $(1, 2)$ o $(2, 2)$. Nótese que bastan tres cambios para llegar de $(1, 1)$ hasta $(2, 2)$, es decir, el número de coordenadas no fijadas más una unidad.

Razonando de forma similar se tendría que para $r - k$ coordenadas fijadas, y por tanto k no fijadas el número de sucesiones tricromáticas que se pueden obtener son $k + 1$. Teniendo así el siguiente cuadro

Coord. Fijas	r	$r - 1$	$r - 2$	\dots	$r - k$	\dots	3	2	1
Coord. No Fijas	0	1	2	\dots	k	\dots	$r - 3$	$r - 2$	$r - 1$
# Sucesiones	1	2	3	\dots	$k + 1$	\dots	$r - 2$	$r - 1$	r

De manera que se tiene, fijando el color 0, un total de

$$\sum_{i=0}^{r-1} (i+1) = \sum_{i=1}^r i = \frac{r(r+1)}{2}$$

Por último, nótese que faltan la sucesiones s tal que $x_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, r$ y la sucesiones bicromáticas con los colores 1 y 2, las cuales suman $r + 1$, pues es r el número de cambios que se deben realizar para llegar de

$$\underbrace{(1, \dots, 1)}_{r\text{-veces}} \xrightarrow{\text{hasta}} \underbrace{(2, \dots, 2)}_{r\text{-veces}}$$

Por tanto, se tiene un total de

$$\frac{r(r+1)}{2} + r + 1 = (r+1) \left(\frac{r}{2} + 1 \right) = \frac{(r+2)(r+1)}{2} = \frac{(r+2)(r+1)r!}{2!r!} = \binom{r+2}{2}$$

□

Corolario 2.2. Sean el grafo completo K_{t+2} , con $t \in \mathbb{N}$, y $\{0, 1, 2\}$ tres colores. Entonces el número de sucesiones s , definidas como en la Proposición 2.2, para colorear los lados de K_{t+2} está dada por el número

$$Q(t) = \binom{P(t+2)+2}{2}.$$

Demostración. Basta hacer $r = P(t + 2)$ y, aplicando el Corolario 2.1 y la Proposición 2.2, se obtiene el resultado deseado. \square

Definición 2.5. Sean G , H_1 y H_2 tres grafos, simples, conexos, finitos, no vacíos y $\{0, 1, 2\}$ tres colores diferentes. El número de Ramsey denotado por $R(G, H_1, H_2)$, es el menor entero positivo t , tal que existe una terna de grafos (Ψ, Ψ_1, Ψ_2) que satisface:

1. $\bar{\Psi} = \Psi_1 \cup \Psi_2$.
2. El grafo completo K_t es la superposición de Ψ .
3. $|V(K_t)| = |V(\Psi)| = |V(\Psi_1)| = |V(\Psi_2)|$.
4. $E(\Psi_1) \cap E(\Psi_2) = \emptyset$.
5. El grafo Ψ contiene una copia monocromática G' de G o de Ψ_1 puede extraerse una copia monocromática H'_1 de H_1 o de Ψ_2 puede extraerse una copia monocromática H'_2 de H_2 .

Definición 2.6. Sean G , H_1 y H_2 tres grafos distintos de vacíos. Se dice que la tríada (G, H_1, H_2) es isomorfa a la tríada (G', H'_1, H'_2) , si G es bueno con respecto a H_1 , o a H_2 , es decir, existe una tríada (Ψ, Ψ_1, Ψ_2) tal que

$$G' \triangleleft \Psi, \quad H'_1 \triangleleft \Psi_1, \quad \text{y} \quad H'_2 \triangleleft \Psi_2.$$

Además, existe una función biyectiva φ que preserva las adyacencias entre los vértices de los grafos, es decir,

- i) $\varphi : V(G') \rightarrow V(G); u_i v_j \in E(G') \Leftrightarrow \varphi(u_a) \varphi(v_b) = w_a x_b \in E(G)$ o
- ii) $\varphi : V(H'_1) \rightarrow V(H_1); u_c v_d \in E(H'_1) \Leftrightarrow \varphi(u_c) \varphi(v_d) = y_e z_f \in E(H_1)$ o
- iii) $\varphi : V(H'_2) \rightarrow V(H_2); u_e v_f \in E(H'_2) \Leftrightarrow \varphi(u_e) \varphi(v_f) = y_e z_f \in E(H_2)$.

Definición 2.7. Sean G , H_1 y H_2 tres grafos simples, conexos, finitos y no vacíos. Sean

$$P(t + 2) = \binom{t + 2}{2} \quad \text{y} \quad Q(t) = \binom{P(t + 2)}{2}.$$

Se dice que $K_{R(G, H_1, H_2)}$, contiene componentes h -buena, si al colorear los lados de

$$K_{R(G, H_1, H_2)} = \Psi \cup \Psi_1 \cup \Psi_2$$

con cada secuencia s_i , definidas como en la Definición 2.4 para todo $i = 1, \dots, Q(t)$, donde $|E(K_{R(G, H_1, H_2)})| = P(t + 2)$ es el tamaño de cada secuencia para $t \geq 5$, existe una coloración con s_i donde Ψ contiene una copia monocromática G' de G con el primer color, o de Ψ_1 puede extraerse una copia monocromática H'_1 de H_1 con el segundo color, o de Ψ_2 puede extraerse una copia monocromática H'_2 de H_2 con el tercer color.

3 Ejemplo ilustrativo

Ejemplo 3.1. Sea $n = 4$ y tómense los grafos $G = K_4$ el completo, $H_1 = W_4$ la rueda, y $H_2 = K_4 - l$ el diamante. Considérese $t = \text{máx}\{|G|, |H_1|, |H_2|\} = \text{máx}\{4, 5, 4\} = 5$. Luego, se aumenta el valor de t en una unidad ($t \rightarrow t + 1$), para formar el grafo completo K_6 . Usando el Corolario 2.1 se tiene que el número de lados

$$|E(K_6)| = P(5 + 1) = \frac{5^2 + 5}{2} = 15.$$

Pero es imposible extraer de K_6 una copia monocromática de G con el primer color, o una copia monocromática de H_1 con el segundo color, o una copia monocromática de H_2 con el tercer color.

Nótese que la secuencia de coloración más crítica en el presente ejemplo es

$$(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2)$$

pues distribuye de forma uniforme y simétrica el número de veces que aparece cada color en la secuencia. Ahora, al disminuir en una unidad el número de veces que aparece el tercer color en la secuencia se elimina la posibilidad de extraer de K_6 una copia monocromática de H_2 con el tercer color, o al aumentar en una unidad el número de veces que aparece el primer color permite extraer de K_6 una copia monocromática de G con el primer color. Sin embargo, al disminuir en una unidad el tercer color y aumentar en una unidad el segundo color se obtiene una secuencia con cuya coloración no es posible extraer de K_6 una copia monocromática de G con el primer color, o una copia monocromática de H_1 con el segundo color, o una copia monocromática de H_2 con el tercer color. Por tanto, al tomar la secuencia

$$(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2)$$

se tiene que no se pueden extraer las copias antes mencionadas.

Dada la observación anterior se puede inferir que una condición suficiente para que se pueda extraer de K_6 una copia monocromática G con el primer color, o una copia monocromática de H_1 con el segundo color, o copia monocromática de H_2 con el tercer color, es que el número de aristas del grafo completo que se estudie sea mayor o igual que $|E(G)| + |E(H_1)| + |E(H_2)|$. Por tal razón, se vuelve a incrementar el número de vértices en uno, es decir, $t + 1 \rightarrow t + 2$, obteniendo así un número de 7 vértices para formar el grafo completo K_7 . Luego, usando el Corolario 2.1 con $t = 5$, se tiene que el número de lados de K_7 es

$$P(5 + 2) = |E(K_7)| = \frac{5^2 + 3 \times 5 + 2}{2} = 21 > 19 = |E(G)| + |E(H_1)| + |E(H_2)|.$$

Ahora, aplicando el Corolario 2.2 se tiene que

$$Q(5) = \binom{P(5 + 2) + 2}{2} = \binom{P(7) + 2}{2} = \binom{23}{2} = \frac{23 \times 22}{2} = 253.$$

Entonces existe una aplicación

$$\Upsilon : E(K_{R(G,H)}) \rightarrow (s_i)_{i=1}^{253},$$

$$\begin{aligned}
s_{47} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2) \\
s_{48} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2) \\
s_{49} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2) \\
s_{50} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2) \\
s_{51} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{52} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{53} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{54} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{55} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{56} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \\
s_{57} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2) \\
s_{58} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2) \\
s_{59} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2) \\
s_{60} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2) \\
s_{61} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{62} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{63} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{64} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{65} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{66} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{67} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \\
s_{68} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2) \\
s_{69} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2) \\
s_{70} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2) \\
s_{71} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2) \\
s_{72} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{73} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{74} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{75} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{76} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{77} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{78} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{79} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \\
s_{80} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2) \\
s_{81} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2) \\
s_{82} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2) \\
s_{83} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2) \\
s_{84} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{85} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{86} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{87} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{88} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{89} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{90} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{91} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{92} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \\
s_{93} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)
\end{aligned}$$

- $s_{94} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$
- $s_{95} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$
- $s_{96} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2)$
- $s_{97} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{98} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{99} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{100} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{101} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{102} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{103} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{104} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{105} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{106} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$
- $s_{107} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)$
- $s_{108} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$
- $s_{109} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$
- $s_{110} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2)$
- $s_{111} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{112} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{113} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{114} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{115} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{116} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{117} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{118} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{119} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{120} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{121} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$
- $s_{122} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)$
- $s_{123} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$
- $s_{124} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2)$
- $s_{125} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{126} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{127} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{128} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{129} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{130} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{131} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{132} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{133} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{134} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{135} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{136} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- $s_{137} = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$
- $s_{138} = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)$
- $s_{139} = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$
- $s_{140} = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$

$$\begin{aligned}
s_{235} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2) \\
s_{236} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2) \\
s_{237} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{238} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{239} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{240} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{241} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{242} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{243} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{244} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{245} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{246} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{247} &= (1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{248} &= (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{249} &= (1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{250} &= (1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \\
s_{251} &= (1, 2) \\
s_{252} &= (1, 2) \\
s_{253} &= (2, 2)
\end{aligned}$$

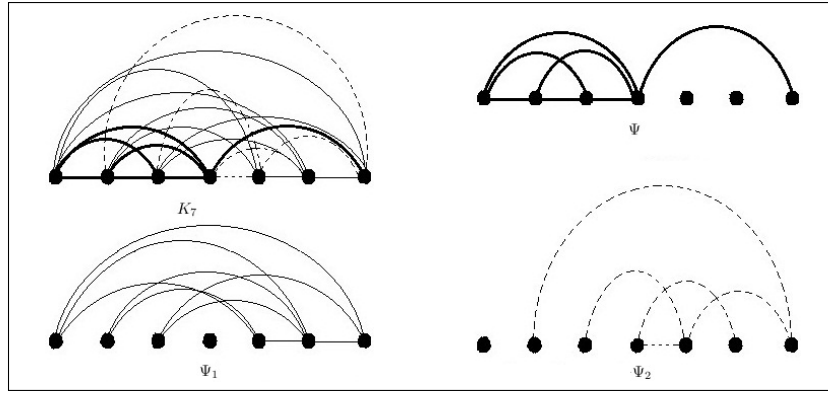


Figura 1: K_7 coloreado con la secuencia s_{111} y los subgrafos Ψ , Ψ_1 y Ψ_2 .

Por ejemplo, considérese la secuencia S_{111} para colorear arbitrariamente los lados del grafo completo K_7 , entonces hay una coloración tal que existe una terna de grafos (Ψ, Ψ_1, Ψ_2) donde se cumple que $K_7 = \Psi \cup \Psi_1 \cup \Psi_2$ y se puede extraer de Ψ una copia monocromática G' isomorfa a G con el primer color, o extraer de Ψ_1 una copia monocromática H'_1 de H_1 con el segundo color, o extraer de Ψ_2 una copia monocromática H'_2 de H_2 con el tercer color. Nótese, que de Ψ se puede extraer una copia monocromática G' isomorfa a G , como se observa en la Figura 1.

Finalmente, al colorear los lados del menor grafo completo $K_{R(G, H_1, H_2)}$ con cada secuencia s_i , para todo $i = 1, \dots, 253$, siempre existe una coloración en la cual es posible extraer de Ψ una copia monocromática G' de G , o de Ψ_1 una copia monocromática H'_1 de H_1 , o de Ψ_2 una copia monocromática H'_2 de H_2 . Por lo tanto, $R(G, H_1, H_2) = 7$, con $t = 5$, $n = 4$, para 3 grafos y 3 colores.

El conjunto de valores obtenidos en el Cuadro 1, provienen de haber resuelto una variada cantidad de ejemplos que dieron como resultado un conjunto de patrones de los números de Ramsey para tres grafos y tres colores. Este conjunto de patrones obtenidos en el Cuadro 1, satisfacen para tres grafos cualesquiera, simple, finitos, no vacíos, que solo van a depender del número de vértices y de tres colores diferentes.

$n \geq 4$	$t \geq 5$	$G = K_n$	$H_1 = W_n$	$R(G, H_1, K_4 - l)$	$ E(K_{t+2}) $	$\{s_i\}_{i=1}^{Q(t)}$
$n = 4$	$t = 5$	K_4	W_4	7	21	253
$n = 5$	$t = 6$	K_5	W_5	8	28	435
$n = 6$	$t = 7$	K_6	W_6	9	36	703
$n = 7$	$t = 8$	K_7	W_7	10	45	1081
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	t	K_n	W_n	$t + 2$	$\frac{t^2+3t+2}{2}$	$\frac{(t^2+3t+6)(t^2+3t+4)}{8}$

Cuadro 1: Patrón obtenido de los números Ramsey para los grafos K_n , W_n , y D_4 .

4 Resultado principal

El siguiente resultado es un caso general, para tres grafos cualesquiera, simples, finitos, no vacíos y tres colores diferentes.

Teorema 4.1. Sean $n \geq 4$, K_n un grafo completo, W_n un garfo rueda, y D_4 grafos diamante. Sean $\{0, 1, 2\}$ tres colores diferentes; $t = \max\{|K_n|, |W_n|, |D_4|\}$; $P(t) = \frac{t^2 - t}{2}$; $Q(t) = \binom{P(t) + 2}{2}$; y $\{s_i\}_{i=1}^{Q(t)}$ el conjunto de las secuencias formadas con los tres colores como en la Definición 2.4, entonces $R(K_n, W_n, D_4) = t + 2$, para $t \geq 5$.

Demostración. Sean K_n , W_n , y D_4 los grafos dados. Tómesese $t = \max\{|K_n|, |W_n|, |D_4|\}$, así $t = n + 1$ y defínanse los polinomios

$$P(t) = \binom{t}{2} = \frac{t^2 - t}{2} \quad \text{y} \quad Q(t) = \binom{P(t) + 2}{2} = \frac{t^4 + 6t^3 + 19t^2 + 30t + 24}{2^3}.$$

Por otro lado, sean $\{0, 1, 2\}$ tres colores diferentes y $W = \{s_i\}_{i=1}^{Q(t)}$ el conjunto de secuencias construidas como en la Definición 2.4 con las cuales se realizarán las coloraciones de los grafos que se estudiarán.

Supóngase ahora que $R(K_n, W_n, D_4) = t + 1$, entonces por la Definición 2.5 existe una terna (Ψ, Ψ_1, Ψ_2) tal que

- (i) $\bar{\Psi} = \Psi_1 \cup \Psi_2$.
- (ii) El grafo completo K_{t+1} es la superposición de Ψ .
- (iii) $|V(K_{t+1})| = |V(\Psi)| = |V(\Psi_1)| = |V(\Psi_2)|$.
- (iv) $E(\Psi_1) \cap E(\Psi_2) = \emptyset$.

- (v) El grafo Ψ contiene una copia monocromática G' de K_n o de Ψ_1 puede extraerse una copia monocromática H'_1 de W_n o de Ψ_2 puede extraerse una copia monocromática H'_2 de D_4 .

Nótese que si $|E(K_{t+1})| < |E(K_n)| + |E(W_n)| + |E(D_4)|$, por los ítem (i), (ii), y (iv), se tiene que

$$|E(\Psi)| + |E(\Psi_1)| + |E(\Psi_2)| < |E(K_n)| + |E(W_n)| + |E(D_4)| \quad (4.1)$$

pues $|E(K_{t+1})| = |E(\Psi)| + |E(\Psi_1)| + |E(\Psi_2)|$. Luego, por el ítem (v) se tendría que $|E(\Psi)| < |E(K_n)|$ o $|E(\Psi_1)| < |E(W_n)|$ o $|E(\Psi_2)| < |E(D_4)|$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $|E(\Psi)| < |E(K_n)|$. De donde, usando la ecuación (4.1), se obtiene que

$$|E(\Psi_1)| + |E(\Psi_2)| < |E(W_n)| + |E(D_4)| \quad (4.2)$$

En este punto, por el mismo ítem (v), se tendría que $|E(\Psi_1)| < |E(W_n)|$ o $|E(\Psi_2)| < |E(D_4)|$. De forma similar, y sin pérdida de generalidad, se puede suponer que

$$|E(\Psi_1)| < |E(W_n)| \quad (4.3)$$

Así, de las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3), se tiene que

$$|E(\Psi)| < |E(K_n)| \quad |E(\Psi_1)| < |E(W_n)| \quad |E(\Psi_2)| < |E(D_4)| \quad (4.4)$$

Esto último permite inferir claramente que no es posible extraer de Ψ una copia monocromática G' de K_n , o de Ψ_1 una copia monocromática H'_1 de W_n , o de Ψ_2 una copia monocromática H'_2 de D_4 , lo cual es una contradicción a lo supuesto de inicio.

Ahora, como $t = n + 1$ entonces $n = t - 1$

$$|E(K_n)| = |E(K_{t-1})| = \frac{(t-1)(t-2)}{2} \quad |E(W_{t-1})| = 2(t-2) \quad |E(D_4)| = 4 \quad (4.5)$$

y por tanto

$$\frac{(t-1)(t-2)}{2} + 2(t-2) + 4 = \frac{(t^2 - 3t + 2) + 4(t-2) + 8}{2} = \frac{t^2 + t + 2}{2} = \frac{t(t+1)}{2} + 1 > |E(K_{t+1})|$$

ya que $t \geq 5$. Luego, por lo demostrado anteriormente se tendría que $R(K_n, W_n, D_4) > t + 1$. Procedase a aumentar el valor de $t + 1$ en una unidad ($t + 1 \rightarrow t + 2$), para formar el grafo completo K_{t+2} cuyos lados serán coloreados con las secuencias $s_i \in W$. Luego, por hipótesis se tiene que $|E(D_4)| = 4 < t$ de donde:

$$\frac{(t-1)(t-2)}{2} + 2(t-2) + |E(D_4)| < \frac{t^2 + 3t - 6}{2}$$

Usando las ecuaciones (4.5) se obtiene que

$$|E(K_n)| + |E(W_n)| + |E(D_4)| < \frac{t^2 + 3t - 6}{2} < \frac{t^2 + 3t + 2}{2} = |E(K_{t+2})| \quad (4.6)$$

Ahora, si se representan por $C_i(K_{t+2})$ al conjunto de lados coloreados con el color i , para $i = 0, 1, 2$. Se obtiene, usando la ecuación (4.6), que las coloraciones del grafo completo K_{t+2} se pueden dividir en varios grupos:

- $|C_i(K_{t+2})| \geq |E(K_n)|$.
- $|C_i(K_{t+2})| < |E(K_n)|$ y $|C_i(K_{t+2})| \geq |E(W_n)|$.
- $|C_i(K_{t+2})| < |E(K_n)|$ y $|C_i(K_{t+2})| < |E(W_n)|$ y $|C_i(K_{t+2})| \geq |E(D_4)|$.

para $i = 0, 1, 2$.

Supóngase ahora que se colorea el grafo K_{t+2} con una secuencia $s_j \in W$ tal que

$$|C_i(K_{t+2})| \geq |E(K_n)|$$

Aquí, se hace Ψ al subgrafo monocromático de K_{t+2} coloreado con el color i tal que $|V(\Psi)| = |V(K_{t+2})|$. Como $|E(\Psi)| \geq |E(K_n)|$, y dado que K_{t+2} es conexo, entonces se puede extraer de Ψ un subgrafo G' conexo monocromático isomorfo a K_n , para $i = 0, 1, 2$. Luego, al colorear los lados de K_{t+2} , con las secuencias s_j dadas, existe por las definiciones 2.7 y 2.6, una función biyectiva φ que cumple que

$$\varphi : V(G') \rightarrow V(K_n); \quad u_a v_b \in E(G') \Leftrightarrow \varphi(u_a)\varphi(v_b) = w_a w_b \in E(K_n).$$

Si se colorea el grafo K_{t+2} con una secuencia $s_j \in W$ tal que $|C_i(K_{t+2})| < |E(K_n)|$ y $|C_i(K_{t+2})| \geq |E(W_n)|$, para $i = 0, 1, 2$, entonces se hace Ψ_1 al subgrafo monocromático de K_{t+2} coloreado con el color i tal que $|V(\Psi_1)| = |V(K_{t+2})|$. Como $|E(\Psi_1)| \geq |E(W_n)|$, y dado que K_{t+2} es conexo, entonces se puede extraer de Ψ_1 un subgrafo H'_1 conexo monocromático isomorfo a W_n . Luego, al colorear los lados de K_{t+2} con las secuencias s_j dadas, existe por las definiciones 2.7 y 2.6, una función biyectiva φ que cumple que

$$\varphi : V(H'_1) \rightarrow V(W_n); \quad u_c v_d \in E(H'_1) \Leftrightarrow \varphi(v_c)\varphi(v_d) = y_c y_d \in E(W_n).$$

Por último, si se colorea el grafo K_{t+2} con una secuencia $s_j \in W$ tal que

$$|C_i(K_{t+2})| < |E(G)| \quad y \quad |C_i(K_{t+2})| < |E(H_1)| \quad y \quad |C_i(K_{t+2})| \geq |E(H_2)|$$

para $i = 0, 1, 2$, entonces se hace Ψ_2 al subgrafo monocromático de K_{t+2} coloreado con el color i . Como $|E(\Psi_2)| \geq |E(D_4)|$, y dado que K_{t+2} es conexo, entonces se puede extraer de Ψ_2 un subgrafo H'_2 conexo monocromático isomorfo a W_n . Luego, al colorear los lados de K_{t+2} con las secuencias s_j dadas, existe por las definiciones 2.7 y 2.6, una función biyectiva φ que cumple que

$$\varphi : V(H'_2) \rightarrow V(D_4); u_e v_f \in E(H'_2) \Leftrightarrow \varphi(u_e)\varphi(v_f) = z_e z_f \in E(D_4).$$

Cumplíendose que G es bueno con respecto a H , es decir, existe el grafo completo

$$K_{t+2} = \Psi \cup \Psi_1 \cup \Psi_2$$

tal que de Ψ se pueda extraer una copia monocromática G' de K_n , o de Ψ_1 pueda extraer una copia monocromática H'_1 de W_n o Ψ_2 pueda extraer una copia monocromática H'_2 de D_4 , tendiendo entonces que $R(K_n, W_n, D_4) = t + 2$, para $t \geq 5$. \square

5 Dedicatoria

Esta publicación está dedicada al profesor José Rafael Figueroa quien no pudo ver concretada la publicación de este artículo, estudio que realizáramos conjuntamente durante el año 2022, del cual existe una continuación inconclusa. Gracias José por ser un gran colega y amigo, prometemos terminar y publicar en tu memoria (incluyéndote como autor) los trabajos que habíamos iniciado en conjunto durante los años 2022 y 2023. Ilumina nuestro entendimiento desde donde estés.

Referencias

- [1] Baskoro E.T. (2002) “The Ramsey number of paths and small wheels”, *J. Indones. Math. Soc. (MIHMI)* (1), 13-16.
- [2] Burr S.A. and Erdős P. (1984) “Generalizations of a Ramsey theoretic result of Chvatal”, *Journal of Graph Theory* **7**: 39–51.
- [3] Camacho D.J.A. *Teorema del Índice de Poincaré*, Universidad de Murcia 2012 – 2013.
- [4] Chen Y.; Zhang Y.; and Zhang K. (2005) “The Ramsey number paths, versus wheels”, *Discret Mathematics*, **290**, 85 – 87.
- [5] V. Chvátal and F. Harary, *Generalized Ramsey theory for graphs, III:small off- diagonal numbers*, *Pacific Journal of Mathematics*, **41** (1972), 335-345.
- [6] P. Erdős, *Some remarks on the theory of graphs* *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947), 292-294.
- [7] P. Erdős and G. Szekeres, *On a combinatorial problem in geometry*, *Composition Mathematica* **2** (1935), 463-470.
- [8] J. Figueroa; F. Villarroel; H. Ramirez y J. Otero, *Los Números de Ramsey con componente h-buena y secuencias simétricas*, *Divulgaciones Matemáticas*, No 1 **20**(2019), 78-90.
- [9] Radziszowski S.P. and Xia J. (1994) “Paths, cycles and wheels in graphs without antitriangles”, *Australasian Journal of Combinatorics* **9**, 221-232.
- [10] Surahmat and Baskoro E.T. (2001) “On the Ramsey Number of Path or Star versus W_4 or W_5 ”, *Proc. Twelfth Australasian Workshop on Combinatorial Algorithms, Bandung, Indonesia*, 14-17 July, 174-179.
- [11] Villarroel F.; Figueroa J.; Marquez H. and Anselmi A. *Un método algorítmico para el calculo del número Baricéntrico de Ramsey para el grafo estrella* *Bol.soc. Paran. Mat.* (3s) V.**36**. **2**(2018), 169–183.
- [12] Zhou H.L. (1995) “The Ramsey number of an odd cycles with respect to a wheel (in chinese”, *Journal of Mathematics, Shuxu Zazhi (Wuhan)*, **15**: 119–120.