


Divulgaciones Matemáticas Vol. 22, No. 2 (2021), pp. 1–9  
<https://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones/>  
DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.7487372>  
 (CC BY-NC-SA 4.0)

©Autor(es)  
e-ISSN 2731-2437  
p-ISSN 1315-2068

# Análisis de conflicto en sistemas dinámicos de eventos discretos usando redes de Petri

*Analysis of conflict on discrete event dynamic systems using Petri nets*

Marcia Caicedo ([rociomar82@hotmail.com](mailto:rociomar82@hotmail.com))  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4739-3855>  
Instituto de Postgrado,  
Universidad Técnica de Manabí  
Av. Urbina y Che Guevara, 130103, Ecuador.

Guelvis Mata ([gematad2017@gmail.com](mailto:gematad2017@gmail.com))  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7147-1422>  
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias  
Universidad de los Andes  
Mérida, República Bolivariana de Venezuela

Bladismir Ruiz ([bladismir@ula.ve](mailto:bladismir@ula.ve))  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7737-3847>  
Instituto de Ciencias Básicas  
Universidad Técnica de Manabí  
Portoviejo, 130103, Ecuador.

## Resumen

Este manuscrito considera al modelo de redes de Petri como una herramienta útil para el análisis de conflictos en sistemas dinámicos de eventos discretos. Particularmente, tratamos al conflicto basados en la estructura de la red más allá de su comportamiento dinámico, estableciendo para ello argumentos teóricos centrados en la “independencia” entre eventos. Con mayor precisión, la conjugación entre algunas clases de redes tales como las redes seguras, de libre decisión, vivas y de libre escogencia caracterizan la ausencia de conflictos en la clase de sistemas nombrada arriba.

**Palabras y frases clave:** Sistemas de eventos discretos, redes de Petri, conflicto.

## Abstract

This manuscript considers the Petri nets model as a useful tool for conflict analysis in dynamic systems of discrete events. In particular, we treat conflict based on the structure of the network beyond its dynamic behavior, establishing theoretical arguments focused on the “independence” between events. More precisely, the conjugation between some classes of networks such as secure, free-choice, live, and free-choice networks characterize the absence of conflicts in the class of systems named above.

**Key words and phrases:** Discrete event systems, Petri nets, conflict.

---

Recibido 12/06/2021. Revisado 28/08/2021. Aceptado 22/11/2021.  
MSC (2010): Primary 37N35; Secondary 93C65.  
Autor de correspondencia: Gelvis Mata

## 1 Introducción

Las Redes de Petri (*RP*) han sido desde su inicio (1962) de gran interés en la teoría y aplicaciones de redes para la modelación y análisis de sistemas concurrentes asincrónicos, incluyendo áreas de aplicación tales como sistemas de computación con programación concurrente y sistemas de multiprocesadores, protocolos de diseños y verificación en redes de computación [1, 2, 5]. Todos estos sistemas son caracterizados como Sistemas Dinámicos de Eventos Discretos (*SDED*) y constituyen el contexto en el cual estaremos centrados.

Ahora, la complejidad resultante desde la no linealidad inherente y la dimensión del espacio de estados en los *SDED* conducen a dificultades inusuales tanto en diseño como en análisis [3, 6, 7]. En efecto, con diseños inapropiados, los *SDED* pueden ser conducidos a bloqueos y sobreflujos de capacidad, entre otros rasgos indeseables, permitiendo la degradación en la ejecución. Por lo tanto, es necesario contar con herramientas potenciales para detectar y corregir estos problemas. Nuestro objetivo consiste en el análisis de conflictos usando redes de Petri. Tempranamente, un conflicto en un *SDED* toma lugar cuando dos o más subsistemas están listos para ejecutar eventos u acciones diferentes cuyas ocurrencias dependen directamente de la utilización de una entidad compartida e indivisible; en consecuencia, la ausencia de conflicto expresa que cualquier evento en la evolución del sistema en el tiempo solo puede ser inhabilitado por su propia ocurrencia.

Convencionalmente, tal como es expuesto en [7, 8], las herramientas para el análisis de *SDED* usando *RP* están fundamentadas en dos técnicas: el árbol de Alcanzabilidad y las Ecuaciones Matriciales; y ambas son expresadas directamente en términos del comportamiento dinámico de la red. Sin embargo, la direccionalidad de los argumentos dados aquí para el análisis de conflicto está relacionada con la estructura propia de la red y no de su dinámica. Los resultados más resaltantes establecen, bajo ciertas condiciones, las relaciones más estrictas entre la ausencia de conflicto y la independencia de la ocurrencia de eventos, permitiendo desde un punto de vista teórico algunas caracterizaciones bajo estructuras de libre decisión, de libre escogencia, seguras y vivas.

La organización es como sigue: Comenzamos dando las definiciones básicas de la teoría de las *RP* e incluiremos su comportamiento dinámico. Luego, expresamos conceptualmente algunas de sus propiedades; para finalmente, establecer los resultados teóricos de análisis de conflicto.

## 2 Nociones preliminares

Con el propósito de incluir nuestro contexto, comenzamos con la definición formal de una red de Petri, sus marcaciones y su correspondiente grafo asociado para finalmente establecer la dinámica o el comportamiento dinámico de una red.

Una Red de Petri es un cuádruple  $R = (L, T, E, S)$  donde  $L = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$  es un conjunto finito cuyos elementos serán llamados lugares,  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$  es un conjunto finito cuyos elementos serán llamados transiciones,  $L \cap T = \emptyset$ ,  $E : T \rightarrow L^\infty$  es una función de entrada: para cada  $t \in T$ ,  $E(t) \in L^\infty$  es llamado multiconjunto de lugares de entrada para  $T$  ( $L^\infty$  denota el conjunto de todos los multiconjuntos sobre  $L$  para los cuales no hay limitación del número de ocurrencias de sus elementos); y  $S : T \rightarrow L^\infty$  es una función de salida: para cada  $t \in T$ ,  $S(t) \in L^\infty$  es llamado multiconjunto de lugares de salida para  $t$ .

El comportamiento dinámico de la red comienza por considerar la representación de estatus de lugares: asociamos a cada lugar de la red un número natural que expresa el significado preciso de la condición o configuración lógica del lugar en el tiempo. Formalmente, una *RP* marcada es

un par  $M = (R, m)$ , donde  $R$  es una  $RP$  y  $m : L \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , es una función llamada función de marcación (o marcación): para cada  $l_i \in L$ ,  $m(l_i) \in \mathbb{N}$  es llamado número de fichas en el lugar  $l_i$ ; la cual especifica un vector  $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ ,  $n = \text{card}L$ ,  $m_i \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  con  $m(l_i) = m_i$  [8].

Las  $RP$  marcadas pueden ser representadas por grafos dirigidos como sigue: los lugares son etiquetados por círculos y las transiciones por barras. Si un lugar  $l_i$  es un lugar de entrada para una transición  $t$ ; es decir  $l_i \in E(t)$ , entonces hay  $|l_i, E(t)|$  (número de veces que  $l_i$  está en el multiconjunto de lugares de entrada  $E(t)$ ) arcos dirigidos del correspondiente círculo a la correspondiente barra. Si un lugar  $l_j$  es un lugar de salida para la transición  $t$ ; es decir,  $l_j \in S(t)$ , entonces hay  $|l_j, S(t)|$  (número de veces que  $l_j$  está en el multiconjunto de lugares de salida  $S(t)$ ) arcos dirigidos de la correspondiente barra al correspondiente círculo. Finalmente, las fichas son representadas por puntos en el interior del círculo y, en consecuencia, la función de marcación es representada por el número de puntos en el interior de cada círculo. Enfatizamos que las  $RP$  vistas como una herramienta gráfica nos proveen de un método unificado para representar Sistemas Dinámicos de Eventos Discretos, permitiendo facilidad para modelar sus características: asincronización, secuencialidad, concurrencia, conflicto, exclusion mutua, etc; mostrando excelente visualización de las dependencias del sistema y focos de información local.

En cuanto al comportamiento dinámico de una  $RP$  debemos enfatizar que una marcación representa el estatus de cada uno de los lugares en la red. Así, ésta especifica exactamente el estado actual del sistema que establece las condiciones lógicas para la ocurrencia de eventos; luego, una vez que ocurra un evento las condiciones del sistema en general varían dando lugar a una nueva marcación o estado. Para ser más precisos, una transición  $t \in T$  en una  $RP$  marcada  $M = (R, m)$  es llamada habilitada si  $m(l_i) \geq |l_i, E(t)|$ , para todo lugar  $l_i \in L$ . En este caso también diremos que la transición  $t$  es habilitada por la marcación  $m$ . El conjunto de transiciones habilitadas por la marcación  $m$  es dado por  $\mathcal{E}(m) = \{t \in T : m(l_i) \geq |l_i, E(t)|, \forall l_i \in L\}$ .

Ahora, si  $t \in \mathcal{E}(m)$  entonces la marcación  $m'$  dada por  $m'(l_i) = m(l_i) - |l_i, E(t)| + |l_i, S(t)|$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $n = \text{card}L$ , es llamada marcación alcanzable desde  $m$  por el disparo de  $t$ . Además, si  $t' \in \mathcal{E}(m')$  y esta es disparada, obtenemos una marcación  $m''$ , y así sucesivamente. Por lo tanto, se obtiene una función de cambio de marcaciones, la cual puede ser extendida de manera natural; es decir, si la función de cambio de marcaciones  $\delta : \mathbb{N}^n \times T \rightarrow \mathbb{N}^n$ ,  $n = \text{card}L$ , es dada por  $\delta(m, t) = m'$  donde  $m'(l_i) = m(l_i) - |l_i, E(t)| + |l_i, S(t)|$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ; entonces su extensión es la función parcial  $\widehat{\delta} : \mathbb{N}^n \times T^* \rightarrow \mathbb{N}^n$ , dada por  $\widehat{\delta}(m, \theta) = m$  y  $\widehat{\delta}(m, \sigma t) = \delta(\widehat{\delta}(m, \sigma), t)$ ,  $m \in \mathbb{N}^n$ ,  $t \in T$ ,  $\sigma \in T^*$ . Aquí,  $T^*$  denota el monoide libre con unidad  $\theta$ :  $T^*$  es el conjunto de todas las combinaciones finitas de elementos de  $T$  [4]. Finalmente, como  $\widehat{\delta}$  es una extensión de  $\delta$  no haremos distinción notacional entre ambas.

Note que la función parcial de cambio de marcaciones  $\delta$  está definida en  $(m, t)$  sí, y solamente sí,  $t \in \mathcal{E}(m)$ .

Por su parte, en una  $RP$  marcada  $M = (R, m_0)$ , una marcación  $m \in \mathbb{N}^n$ ,  $n = \text{card}L$ , será llamada alcanzable desde  $m_0$  sí existe una sucesión de disparos de transiciones  $\sigma = t_{j_1} t_{j_2} \dots t_{j_k} \in T^*$  tal que  $\delta(m_0, \sigma) = m$ . Luego, el conjunto de alcanzabilidad de la  $RP$  desde la marcación  $m_0$  es dado por

$$A(R, m_0) = \{m \in \mathbb{N}^n / \exists \sigma \in T^*, \delta(m_0, \sigma) = m\}.$$

**Ejemplo 2.1.** Consideremos la  $RP$  marcada dada en la figura 1. En esta red  $\varepsilon(m) = \{t_1.t_3.t_4\}$ . Disparando  $t_4$  obtenemos la nueva marcación  $m' = (1,0,1,3,0)$ . Ahora  $\varepsilon(m') = \{t_1.t_3\}$ : Disparando  $t_1$  obtenemos la marcación  $m'' = (0,1,2,5,0)$ , en la cual  $\varepsilon(m'') = \{t_2.t_3\}$ . Este comportamiento particular de la  $RP$  dada es ilustrado en las figuras 1, 2, 3.

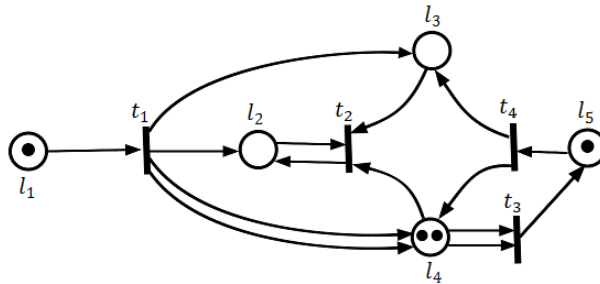


Figura 1: Una  $RP$  marcada con  $m = (1, 0, 0, 2, 1)$  y  $\varepsilon(m) = \{t_1, t_3, t_4\}$

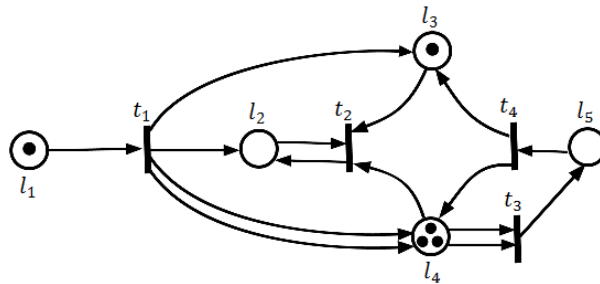


Figura 2: La marcación resultante del disparo de la transición  $t_4$  en la figura 1.

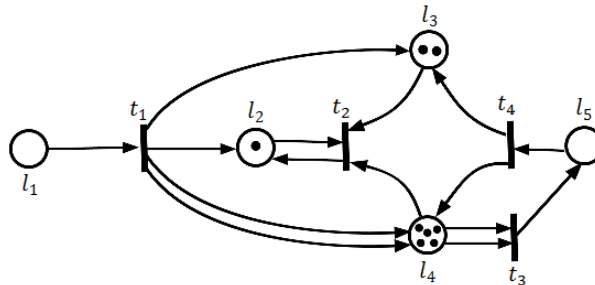


Figura 3: La marcación resultante del disparo de la transición  $t_1$  en la figura 2

Como se puede apreciar desde el ejemplo 2.1, el cambio de marcación en una  $RP$  es producido por el disparo de transiciones y estas marcaciones pertenecen a  $\mathbb{N}^n$ ,  $n = \text{card}(L)$ .

**Ejemplo 2.2.** Sea  $M = (R, m_0)$  una  $RP$  marcada, con  $L = \{1, 2, \dots, n\}$  y funciones de entrada ( $E$ ) y salida ( $S$ ) tomando valores en el conjunto potencia de  $L$ . Consideremos  $\mathcal{L} = \{\sigma \in$

$T^*/\delta(m_0, \sigma)$  está definida}. Entonces,

$$\delta(m, t) = m - \sum_{i \in E(t)} e_i + \sum_{j \in S(t)} e_j,$$

donde  $e_i$  denota la  $n$ -upla unitaria con ceros en sus componentes excepto en la  $i$ -ésima componente. Para cada  $\sigma \in \mathcal{L}$ , sea  $\mathcal{O}(\sigma) = (\mathcal{O}_{t_1}(\sigma), \mathcal{O}_{t_2}(\sigma), \dots, \mathcal{O}_{t_k}(\sigma))$ , con  $\mathcal{O}_{t_j}(\sigma)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , denotando el número de apariciones de  $t_j$  en  $\sigma$ , luego

$$\delta(m, \sigma) = m - \sum_{i \in T} \mathcal{O}_i(\sigma) \left( \sum_{i \in E(t)} e_i - \sum_{j \in S(t)} e_j \right)$$

para todo  $m \in A(R, m_0)$  y todo  $\sigma \in \mathcal{L}$ .

En efecto, por inducción sobre la longitud de la sucesión de disparos de transiciones tenemos que para  $k = 2 = |\sigma|$ ,  $\sigma = t_{j_1} t_{j_2} \in \mathcal{L}$ .

$$\begin{aligned} \delta(m, t_{j_1} t_{j_2}) &= \delta(\delta(m, t_{j_1}), t_{j_2}) \\ &= \delta(m, t_{j_1}) - \sum_{i \in E(t_{j_2})} e_i - \sum_{j \in S(t_{j_2})} e_j \\ &= m - \left( \sum_{i \in E(t_{j_1})} e_i - \sum_{j \in E(t_{j_1})} e_j \right) - \left( \sum_{i \in E(t_{j_2})} e_i - \sum_{j \in E(t_{j_2})} e_j \right) \\ &= m - \sum_{t \in T} \mathcal{O}_t(t_{j_1} t_{j_2}) \left( \sum_{i \in E(t)} e_i - \sum_{j \in S(t)} e_j \right) \end{aligned}$$

Supongamos que

$$\delta(m, \sigma) = m - \sum_{t \in T} \mathcal{O}_t(\sigma) \left( \sum_{i \in E(t)} e_i - \sum_{j \in S(t)} e_j \right),$$

para  $k = |\sigma| > 2$ , así para  $t_h \in T$ ,  $\sigma t_h \in \mathcal{L}$ .

$$\begin{aligned} \delta(m, \sigma t_h) &= \delta(\delta(m, \sigma), t_h) = \delta(m, \sigma) - \sum_{i \in E(t_h)} e_i + \sum_{j \in S(t_h)} e_j \\ &= m - \sum_{t \in T} \mathcal{O}_t(\sigma) \left( \sum_{i \in E(t_h)} e_i - \sum_{j \in S(t_h)} e_j \right) - \left( \sum_{i \in E(t_h)} e_i - \sum_{j \in S(t_h)} e_j \right) \\ &= m - \sum_{t \in T} \mathcal{O}_t(\sigma t_h) \left( \sum_{i \in E(t)} e_i - \sum_{j \in S(t)} e_j \right). \end{aligned}$$

### 3 Estructuras de redes

Mostraremos algunas estructuras que garantizan la representación de diversas propiedades funcionalmente correctas en un sistema tales como disponibilidad de recursos, ausencia de conflictos y no bloqueo.

Particularmente, en términos de conflicto, si todo par de eventos diferentes no dependen simultáneamente de alguna condición común para sus ocurrencias ni conducen a una condición común luego de sus ocurrencias, entonces esto es apropiado para decir que todo par de eventos en el sistema son “independientes”.

**Definición 3.1.** Una *RP*  $R = (L, T, E, S)$  es llamada de libre decisión si  $E(t_i) \cap E(t_j) = \emptyset$  y  $S(t_i) \cap S(t_j) = \emptyset$ , para cualesquiera  $t_i, t_j \in T, i \neq j$ .

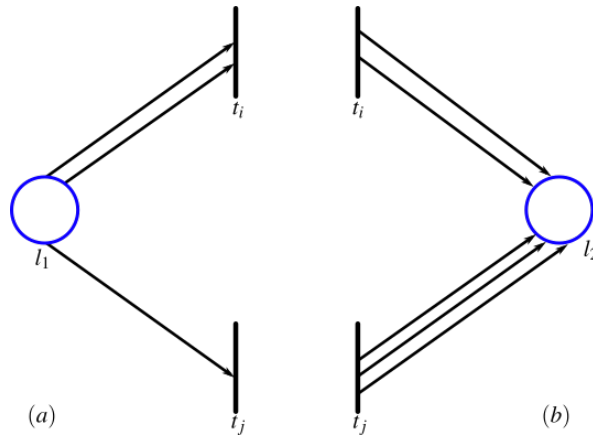


Figura 4: Dos fragmentos de redes representando de izquierda a derecha dos transiciones con un lugar de entrada común y con un lugar de salida común respectivamente.

Otra propiedad importante, relativa a la estructura de una *RP*, es la libre escogencia. Tal propiedad es incluida para representar la ocurrencia de diferentes eventos “dependientes” de la misma condición (ver figura 4(a)), la cual definimos como sigue.

**Definición 3.2.** Una *RP*  $R = (L, T, E, S)$  es llamada de libre escogencia si para todo par  $t_i, t_j \in T, t_i \neq t_j$ , se tiene que  $E(t_i) \cap E(t_j) = \{l\}$  para algún  $l \in L$  o  $E(t_i) \cap E(t_j) = \emptyset$ .

**Definición 3.3.** Un lugar  $l \in L$  en una *RP* marcada  $M = (R, m_0)$  es llamada  $k$ -acotado si existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $m(l) \leq k$ , para todo  $m \in A(R, m_0)$ . Si todos los lugares en la red son  $k$ -acotados, entonces la red es llamada  $k$ -acotada o simplemente acotada. En particular, si la red es 1-acotada diremos que la red es segura.

**Definición 3.4.** Una *RP* marcada  $M = (R, m_0)$  es llamada persistente (libre de conflictos) si para todo  $m \in A(R, m_0)$ , y todo par  $t_i, t_j \in T; t_i \neq t_j; t_i, t_j \in \mathcal{E}(m)$ , se tiene que  $t_i \in \mathcal{E}(\delta(m, t_j))$ .

**Definición 3.5.** Una *RP* marcada  $M = (R, m_0)$  es llamada viva (no bloqueada) si para toda marcación  $m \in A(R, m_0)$  y toda transición  $t_i \in T$ , existe una marcación  $m' \in A(R, m_0)$  alcanzable desde  $m$  tal que  $t_i \in \mathcal{E}(m')$ .

## 4 Resultados teóricos

En esta sección serán dados los argumentos para el análisis de *RP* que caracterizarán la clase de redes persistentes mediante la estructura propia de la red, y en consecuencia la ausencia de conflictos en el sistema.

**Proposición 4.1.** *Si  $R = (L, T, E, S)$  es una RP de libre decisión, entonces  $M = (R, m_0)$  es persistente.*

*Demostración.* Sea  $m \in A(R, m_0)$ , y sean  $t, t' \in \mathcal{E}(m)$  con  $t \neq t'$ . Como  $R$  es de libre decisión, entonces  $E(t) \cap E(t') = \emptyset$ . Sea  $\delta_i(m, t)$  la componente  $i$ -ésima de  $\delta(m, t)$ . Si  $l_i \notin E(t)$ , entonces

$$\begin{aligned}\delta_i(m, t) &= m(l_i) - |l_i, E(t)| + |l_i, S(t)| \\ &= m(l_i) + |l_i, S(t)| \geq m(l_i) \geq |l_i, E(t')|\end{aligned}$$

Finalmente, si  $l_i \in E(t)$  entonces  $l_i \notin E(t')$ ; de donde,  $|l_i, E(t_i)| = 0$ . En consecuencia,  $\delta_i(m, t) \geq 0 = |l_i, E(t')| = 0$ . Luego,  $\delta_i(m, t) \geq |l_i, E(t')|$  para todo  $l_i \in L$ . Por lo tanto,  $t' \in \mathcal{E}(\delta(m, t))$ . Luego,  $M$  es persistente.  $\square$

**Teorema 4.1.** *Si  $M = (R, m_0)$  es una RP marcada persistente, entonces para toda marcación  $m \in A(R, m_0)$  y todo par de transiciones  $t, t'$ , con  $t, t' \in \mathcal{E}(m)$ ,  $t \neq t'$  se tiene la propiedad siguiente:*

$$l_k \in E(t) \cap E(t'), l_k \notin S(t) \cap S(t') \Rightarrow m(l_k) > 1.$$

*Demostración.* Sea  $m \in A(R, m_0)$ , y sean  $t, t' \in \mathcal{E}(m)$ , con  $t \neq t'$ , entonces  $m(l_i) \geq |l_i, E(t)|$  para todo  $l_i \in L$ . Sea  $l_k \in E(t) \cap E(t')$ , entonces en particular  $m(l_k) \geq |l_k, E(t)| \geq 1$ . Supongamos que  $l_k \notin S(t) \cap S(t')$  y  $m(l_k) = 1$ , entonces por la persistencia de  $M$ ,  $\delta_k(m, t) > 0$ , así  $1 - |l_k, E(t)| + |l_k, S(t)| > 0$ . Luego,  $1 + |l_k, S(t)| > |l_k, E(t)|$ . Ahora, si  $l_k \notin S(t)$  entonces  $|l_k, E(t)| < 1$ ; de donde  $|l_k, E(t)| = 0$  lo cual es contradictorio.

Finalmente, si  $l_k \in S(t)$  entonces  $l_k \notin S(t')$ . Luego, usando el razonamiento previo tenemos que  $\delta_k(m, t') > 0$ , con lo cual llegamos a la contradicción  $|l_k, E(t')| = 0$ . Por lo tanto,  $m(l_k) > 1$ .  $\square$

**Corolario 4.1.** *Dada  $M = (R, m_0)$  una RP marcada segura.  $M$  es persistente si, y solo si,  $R$  es de libre decisión.*

*Demostración.* Inmediato desde el teorema 4.1.  $\square$

**Teorema 4.2.** *Dada  $M = (R, m_0)$  una RP segura. Si  $M$  es persistente, entonces para cualesquiera  $m \in A(R, m_0)$ ;  $t, t' \in \mathcal{E}(m)$ ,  $t \neq t'$ , se tiene la propiedad siguiente:*

$$l \in E(t) \cap E(t') \Rightarrow l \in S(t) \cap S(t').$$

*Demostración.* Sea  $l \in E(t) \cap E(t')$  y  $l \notin S(t) \cap S(t')$ , entonces  $m(l) > 1$ , lo cual contradice la seguridad de  $M$ .  $\square$

**Corolario 4.2.** *Dada  $M = (R, m_0)$  una RP segura, con  $S(t) \cap S(t') = \emptyset, \forall t \neq t'$ . Entonces,  $M$  es persistente si, y solo si,  $E(t) \cap E(t') = \emptyset, \forall t \neq t'$ .*

*Demostración.* Desde el teorema 4.2 se sigue que si  $S(t) \cap S(t') = \emptyset, \forall t \neq t'$ , entonces  $E(t) \cap E(t') = \emptyset, \forall t \neq t'$ ; en consecuencia, se obtiene el resultado.  $\square$

**Teorema 4.3.** *Dada  $M = (R, m_0)$  una RP marcada donde  $E$  y  $S$  tienen rango en el conjunto potencia de  $L$ . Supongamos que para toda marcación  $m \in A(R, m_0)$ , todo par  $t, t' \in \mathcal{E}(m)$ ,  $t \neq t'$ , y todo lugar  $l_k \in E(t) \cap E(t')$  se tiene que  $m(l_k) > 1$ , entonces  $M$  es persistente.*

*Demostración.* Sea  $m \in A(R, m_0)$ , y sean  $t, t' \in \mathcal{E}(m)$ , con  $t \neq t'$ . Si  $l_i \in E(t) \cap E(t')$ , entonces por hipótesis  $m(l_i) > 1$ ; de donde

$$\begin{aligned} \delta_i(m, t) &= m(l_i) - |l_i, E(t)| + |l_i, S(t)| \\ &\geq m(l_i) - 1 \geq 1 = |l_i, E(t')|. \end{aligned}$$

Por otro lado, si  $l_i \notin E(t) \cap E(t')$  entonces consideramos los casos siguientes:  $l_i \in E(t)$  y  $l_i \notin E(t')$ . Así,  $l_i \in E(t) \Rightarrow l_i \notin E(t') \Rightarrow \delta_i(m, t) \geq 0 = |l_i, E(t')|$ . Finalmente,  $l_i \notin E(t) \Rightarrow \delta_i(m, t) = m(l_i) + |l_i, S(t)| \geq m(l_i) \geq |l_i, E(t')|$ .

El caso  $l_i \notin E(t)$  y  $l_i \notin E(t')$  es trivial. Luego,  $\delta_i(m, t) \geq |l_i, E(t')|$  para todo  $l_i \in L$ . Por lo tanto,  $t' \in \mathcal{E}(\delta(m, t))$ . Luego,  $M$  es persistente.  $\square$

**Teorema 4.4.** *Dada  $M = (R, m_0)$  una RP marcada viva, donde  $R$  es de libre escogencia. Supongamos que las funciones de entrada y salida tienen rango en el conjunto potencia de  $L$ . Entonces, la persistencia de  $M$  implica que para cualesquiera  $t, t' \in T, t \neq t'$ , se tiene la propiedad siguiente:*

$$l \in E(t) \cap E(t') \Rightarrow l \in S(t) \cap S(t').$$

*Demostración.* Supongamos que existen transiciones  $t, t' \in T, t \neq t'$ , y  $l \in L$  tales que  $l \in E(t) \cap E(t')$  y  $l \notin S(t) \cap S(t')$ . Como  $R$  es de libre escogencia, entonces  $E(t) = E(t') = \{l\}$ . La vivencia de  $M$  asegura que existe  $m \in A(R, m_0)$  tal que  $t' \in \mathcal{E}(m)$ ; luego,  $m(l) > 0$  y en consecuencia  $t \in \mathcal{E}(m)$ .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $l \in S(t')$  y sea  $m' = \delta(m, \phi)$ , donde  $\phi = tt \dots t$ ,  $(m(l) - 1)$ -veces, entonces claramente  $m' \in A(R, m_0)$ ;  $t, t' \in \mathcal{E}(m')$  pero  $t' \notin \mathcal{E}(\delta(m', t))$ . Por lo tanto  $M$  no es persistente.  $\square$

**Corolario 4.3.** *Dada  $M = (R, m_0)$  una RP marcada viva, con  $R$  de libre escogencia tal que  $S(t) \cap S(t') = \emptyset, \forall t \neq t'$ . Entonces,  $M$  es persistente sí, y solo si,  $E(t) \cap E(t') = \emptyset, \forall t \neq t'$ .*

*Demostración.* Si  $S(t) \cap S(t') = \emptyset, \forall t \neq t'$ , entonces desde el teorema 4.3  $E(t) \cap E(t') = \emptyset, \forall t \neq t'$ ; de donde se sigue lo requerido.  $\square$

**Corolario 4.4.** *Dada  $M = (R, m_0)$  una RP marcada viva, con  $R$  de libre escogencia tal que  $S(t) \cap S(t') = \emptyset, \forall t \neq t'$ . Entonces,  $M$  es persistente si, y solo si,  $R$  es de libre decisión.*

*Demostración.* Inmediato desde el teorema 4.4.  $\square$

## 5 Conclusión

El modelo  $RP$  verificando los argumentos teóricos establecidos en la sección 4 proporcionan una estructura para estudiar un amplio rango de  $SDED$ , donde la red es conocida. La persistencia de una  $RP$  excluye la existencia de cualquier conflicto. Por lo tanto, en la asignación de recursos compartidos, un modelo de red persistente implica que no hay conflicto entre procesos. La no persistencia de una red puede implicar cierto grado de injusticia en la asignación de recursos en un contexto de sistemas distribuidos, en especial, en un medio ambiente de manufactura.



## Referencias

- [1] Aldaniyazov, K.N, (2018), *Main Factors for the Improvement of a Complex System of Strategic Production Cost Management*, Revista Espacios, **39**(11), pp. 29.
- [2] Andrade, Herlandi de Souza and Loreiro, Geilson, (2018), *Proposta de um modelo de Planejamento estratégico baseado em engenharia de sistemas*, Revista Espacios, **39**(13), pp. 10.
- [3] Castellano C., (2006), *Consideraciones para el modelado de sistemas mediante Redes de Petri*, Revista Ciencia e Ingeniería, UPM, Madrid, ISSN 1316-7081, **27**(2), 49–58.
- [4] Eilemberg S., (1974), *Automata, languages and machines*, Academic Press, New York, Vol. A.
- [5] Mata, G., Lugo, A., and Rojas, G.,(2016), *Aplicación de bases de Grobner en el problema de alcanzabilidad de estados de sistemas de eventos discretos modelados por redes de Petri*, *Lecturas Matemáticas*, **37**(1), 5–23.
- [6] Mata, G., Ruiz, B.,Camacho, C.,Méndez, A., Muñoz, S. and Zambrano, H.,(2018), *Planning algorithm in a class of discrete event systems*, *DYNA*, **85**(206), 283–293.
- [7] Murata T., (1989), *Petri Nets: properties, analysis and applications*, *Proceedings of the IEEE*, **77**(4).
- [8] Peterson J., (1981), *Petri net theory and the modeling of systems*, Prentice Hall, PTR Upper Saddle River, NJ, USA.