

Los números de Ramsey con componentes H -buena y secuencias simétricas

The Ramsey numbers with components H -good and simultaneous sequences

José Figueroa (jose3765@gmail.com)

Departamento de Química
Universidad Clodosbaldo Russián
Cumaná, Venezuela.

Felicia Villarroel (feliciavillarroel@gmail.com)

Departamento de Matemática
Universidad de Oriente
Cumaná, Venezuela.

Henry Ramírez (hlramirez6@hotmail.com)

Departamento de Higiene y Seguridad Laboral
Universidad Clodosbaldo Russián
Cumaná, Venezuela.

Juan Otero (jmotero746@gmail.com)

Departamento de Informática
Universidad Clodosbaldo Russián
Cumaná, Venezuela.

Resumen

Dado dos grafos G y H no vacío. El número de Ramsey $R(G, H)$ se define como el menor entero positivo n , tal que para algún grafo F que contiene una copia monocromática G' isomorfo a G o el complemento de F , contiene una copia monocromática H' isomorfo a H . En este trabajo, se presenta un método basado en la teoría combinatoria, y la definición de bosque lineal, para determinar un conjunto W de secuencias con $m + 1$ elementos de tamaño m cada una, con cada secuencias s_i se colorean los lados del menor de los grafos completo, $K_n = F \cup \overline{F}$. En segundo lugar, se realiza la demostración del teorema que resulta de la combinación de los grafos: rueda W_n para $n \geq 5$ y diamante. En este caso, se prueba que el número de Ramsey es $R(G, H) = n + 1$, además se demuestra la simetría y la k -baricentricidad monocromática del conjunto de secuencias.

Palabras y frases clave: teoría combinatoria, conjunto de secuencias simétricas, secuencias k -baricéntrica.

Abstract

Given two graphs G and H do not empty. The number of Ramsey $R(G, H)$ is defined as the minor positive integer n , such that for some graph F wich containing a monochromatic

Recibido 05/04/2019. Revisado 20/04/2019. Aceptado 28/08/2019.

MSC (2010): Primary 05C55; Secondary 05C15.

Autor de correspondencia: José Figueroa

copy G' isomorphic to G or the complement of F , contains a monochromatic copy H' isomorphic to H . In this work, we present a method based on the combinatorial theory, and the definition of linear forest, to determine a set W of sequences with $m + 1$ elements of size m each one, with each sequence s_i the sides of the minor complete graphs $K_n = F \cup \overline{F}$ are colored. In second place, the demonstration of the theorem wich result of the combination of the graphs: wheel W_n for $n \geq 5$ and diamond is done. In this case, we prove that the Ramsey number is $R(G; H) = n + 1$, furthermore we prove the symmetry and k -baricentricity monochromatic of the set of sequences.

Key words and phrases: combinatory theory, set of symmetric sequences, sequences k -baricentric sequences.

1 Introducción

En este artículo se consideran todos los grafos simples, finitos y sin dirección. Un grafo G , es un par de conjuntos (V, E) , denotado por $G = (V, E)$, donde V es un conjunto no vacío de elementos llamados vértices o nodos y E es un conjunto de pares no ordenado de elementos de V , llamados lados o aristas; si G no posee lazos ni lados múltiples es un grafo simple, el orden se denota por $|G|$. Un árbol, es un grafo conexo (para cualquier par de vértices diferentes existe un camino que los une) que no contiene ciclos y un bosque es un grafo no conexo cuyas componentes son árboles. Un camino P de longitud n que va desde un vértice u hasta un vértice v es una sucesión de vértices $(u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n = v)$ tal que $u_{i-1}u_i \in E(P)$, para cada i y se denota por P . Los vértices u y v son llamados los vértices extremos del camino P si todos los vértices restantes de P son vértices interiores. Se denotará el interior de un camino por $int(p)$, la longitud de un camino por $long(P)$, un árbol por T_n . Un grafo rueda (W_n), es un grafo con n vértices que se forma conectando un único vértice a todos los vértices de un ciclo $(n - 1)$. El grafo diamante es un grafo plano con 4 vértices y 5 lados y se denotará por $K_4 - l$, y el subgrafo de G inducido por lados de F , se denotará por $G[F]$. Un grafo F es un bosque lineal, si cada componente forma un camino. Un grafo completo es un grafo simple donde cada par de vértices está conectado por lados y se denotará por K_n . Un grafo G' es un subgrafo propio de F y el cual se denota por $G' \Delta F$. Un grafo F se llama independiente del par (G, H) si F no contiene un subgrafo isomorfo a G o su complemento \overline{F} no contiene un subgrafo isomorfo a H .

En 1994 Radziszowski y Xia [5], dieron un método sencillo y unificado para mostrar resultados más generales del número de Ramsey $R(C_3, G)$, donde G es un camino, ciclo o rueda. Zhou [9] da la prueba de $R(C_n, W_m) = 2m + 1$, para n impar y $m \geq 5n - 7$. Recientemente, Surahmat y Baskoro [6] demostraron, para cada $n \geq 3$, $R(P_n, W_4) = 2n - 1$ y $R(P_n, W_5) = 3n - 2$. Baskoro et. al. [1] y Chen et. al. [2] dieron la prueba para $R(P_n, W_6) = 2n - 1$, para todo $n \geq 6$, $R(P_n, W_7) = 3n - 2$, para todo $n \geq 7$ y en [7] Villaroel et. al. estudia un método algorítmico para el cálculo del número baricéntrico de Ramsey para el grafo estrella. En este artículo se presenta un método que permite calcular el menor de los grafos completos K_n , que contiene copias monocromáticas isomorfas a G o a H , es decir, los números de Ramsey $R(G, H)$, con G el grafo rueda W_n , para $n \geq 5$ y H el grafo diamante. En particular, se demostrará que G es bueno con respecto a H , además se probará la simetría y la k -baricentricidad monocromática.

2 Definiciones

En esta sección se presentan varias definiciones que se utilizarán para el desarrollo de este manuscrito.

Definición 1. Sea $s = \{a_i\}_{i=1}^{m-r} \cup \{b_j\}_{j=m-r+1}^m$ una secuencia finita, con $|s| = m$, $m > r$ y $r \geq 1$. Sean $\{a_i\}_{i=1}^{m-r}$ y $\{b_j\}_{j=m-r+1}^m$ dos subsecuencias finitas de s , donde $\{a_i\}_{i=1}^{m-r}$ representa un color y $\{b_j\}_{j=m-r+1}^m$ representa otro color, entonces se dice que s es una secuencia bicromática finita.

Definición 2. Sean dos secuencias monocromáticas $s = \{a_i\}_{i=1}^m$ y $w = \{b_j\}_{j=1}^m$ tal que $a_i \neq b_j$ en coloraciones. Se dice que s y w son simétricas, con respecto a las coloraciones $\{a_i\}_{i=1}^m$ y $\{b_j\}_{j=1}^m$, si $|s| = |w| = m$ y se denotará por $s \Delta w$.

Nótese, que $s \cap w = \phi$.

Definición 3. Sean $s_p = \{a_{pi}\}_{i=1}^{m-r} \cup \{b_{pj}\}_{j=m-r+1}^m$ y $s_u = \{a_{ui}\}_{i=1}^{m-l} \cup \{b_{uj}\}_{j=m-l+1}^m$, dos secuencias bicromáticas, tal que $s_p \neq s_u$, con $r = p - 1$ y $l = u - 1$, donde $\{a_{pi}\}_{i=1}^{m-r}$ y $\{a_{ui}\}_{i=1}^{m-l}$ representan el mismo color, con $|\{a_{pi}\}_{i=1}^{m-r}| > |\{a_{ui}\}_{i=1}^{m-l}|$ y $\{b_{pj}\}_{j=m-r+1}^m$ y $\{b_{uj}\}_{j=m-l+1}^m$ representa el otro color, con $|\{b_{uj}\}_{j=m-l+1}^m| > |\{b_{pj}\}_{j=m-r+1}^m|$. Decimos que s_p y s_u son simétricas con respecto a las coloraciones respectivas si satisface:

- 1) $|s_p| = |s_u|$
- 2) $|\{a_{pi}\}_{i=1}^{m-r}| = |\{b_{uj}\}_{j=m-l+1}^m|$
- 3) $|\{b_{pj}\}_{j=m-r+1}^m| = |\{a_{ui}\}_{i=1}^{m-l}|$

y se denotan por $s_p \Delta^2 s_u$.

Definición 4. Sea $s_p = \{a_{pi}\}_{i=1}^{m-r} \cup \{b_{pj}\}_{j=m-r+1}^m$ una secuencia bicromática, con $r = p - 1$. Se dice que s_p es simétrica sobre sí misma, con respecto a las coloraciones $\{a_{pi}\}_{i=1}^{m-r}$ y $\{b_{pj}\}_{j=m-r+1}^m$, si $|\{a_{pi}\}_{i=1}^{m-r}| = |\{b_{pj}\}_{j=m-r+1}^m|$ y se denotará por s_p^Δ .

Definición 5. Sea $s_k = \{a_{ki}\}_{i=1}^{m-k+1} \cup \{b_{kj}\}_{j=m-k+2}^m$ para todo $k \geq 2$, una colección de secuencias finitas, con cada $|s_k| = m$. Sean $\{a_{ki}\}_{i=1}^{m-k+1}$ y $\{b_{kj}\}_{j=m-k+2}^m$, para $k = \overline{2, m}$, dos subsecuencias finitas, donde $\{a_{ki}\}_{i=1}^{m-k+1}$ representa un color y $\{b_{kj}\}_{j=m-k+2}^m$ representa otro color, entonces se dice que s_k es una colección finita de secuencias bicromáticas internas.

Definición 6. Sea $W = \{s_1, s_2, \dots, s_{\alpha-1}, s_\alpha, s_{\alpha+1}, \dots, s_m, s_{m+1}\}$ un conjunto de secuencias, donde s_1 y s_{m+1} son secuencias monocromáticas y cada una de las secuencias $s_2, \dots, s_{\alpha-1}, s_\alpha, s_{\alpha+1}, \dots, s_m$ son secuencias bicromáticas internas. Decimos que:

- 1) W es un conjunto de secuencias simétricas con $|W|$ impar, si satisface las siguientes condiciones:
 - i) $W = \{s_1, s_2, \dots, s_{\alpha-1}, \} \cup \{s_\alpha\} \cup \{s_{\alpha+1}, \dots, s_m, s_{m+1}\}$
 - ii) $|\{s_1, s_2, \dots, s_{\alpha-1}, \}| = |\{s_{\alpha+1}, \dots, s_m, s_{m+1}\}|$
 - iii) $s_1 \Delta s_{m+1}$

$$\text{iv) } s_2 \Delta^2 s_m, \dots, s_{\alpha-1} \Delta^2 s_{\alpha+1}$$

$$\text{v) } s_p^\Delta$$

y se denota por $W \Delta_I$

2) W es un conjunto de secuencias simétrica con $|W|$ par, sí satisface las siguientes condiciones:

$$\text{i) } W = \{s_1, s_2, \dots, s_\alpha\} \cup \{s_{\alpha+1}, \dots, s_m, s_{m+1}\}$$

$$\text{ii) } |\{s_1, s_2, \dots, s_\alpha\}| = |\{s_{\alpha+1}, \dots, s_m, s_{m+1}\}|$$

$$\text{iii) } s_1 \Delta s_{m+1}$$

$$\text{iv) } s_2 \Delta^2 s_m, s_3 \Delta^2 s_{m-1}, \dots, s_\alpha \Delta^2 s_{\alpha+1}.$$

y se denota por $W \Delta_P$.

Definición 7. Sean G y H dos grafos distintos del vacío. Se dice que el grafo completo K_n contiene k -baricentricidad monocromática, si G es bueno con respecto a H y satisface la siguiente igualdad: $k = \frac{n(n-1)+2}{4}$, con n el número de vértices del grafo completo K_n resultante. Y además, se cumplen las siguientes condiciones:

1) Si, $|w|$ es un entero par, la k -baricentricidad puede ser par o impar.

2) Si, $|w|$ es un entero impar, seleccionemos el nuevo k' que es el mayor entero que sea menor que o igual a k , en este caso se considera k' como la parte entera o el piso de simetría.

Definición 8. Sean G y H dos grafos distintos del vacío. Sí para cada secuencia $s_i, \forall i = \overline{1, m+1}$ que colorean los lados del grafo completo K_n , se pueden extraer una copia $G' \Delta F$ isomorfa a G o una copia $H' \Delta \overline{F}$ isomorfa a H , entonces se dice que el grafo completo K_n contiene k -baricentricidad monocromática.

3 Método

En esta sección se dará un método que determina alguna clase de los números de Ramsey con componentes H -buena, basado en la Teoría de Grafo y la Teoría Combinatoria. Es oportuno señalar, que ya existen una gran cantidad de métodos en este estilo. Por ejemplo, en [8] se presenta un método que articula la Teoría de Órbitas con las constantes baricéntricas. En [3] se da un método matricial que relaciona a las constantes baricéntricas y la Teoría de Matrices, este método se implementó en el lenguaje de computación conocido como MatLab y recientemente en [4], se muestra un método que representa a los grafos divisores de cero.

Con el siguiente método, se determina alguna clase de los números de Ramsey con componentes H -bueno.

1) Considérese $n = \text{máx}\{|G|, |H|\}$, para formar el menor de los grafos completo de cardinalidad n , con este n se calcula la talla del K_n , con el valor m y dos colores diferentes $\{0, 1\}$ se calcula la cantidad de secuencias con repetición, es decir, $CR_m^2 = m + 1$, este número indica la cantidad de elementos del conjunto W formados por secuencias, s_i , para todo $i = \overline{1, m+1}$.

Sea $W = \{s_1, s_2, \dots, s_{\alpha-1}, s_\alpha, s_{\alpha+1}, \dots, s_{m+1}\}$, el conjunto de todas las posibles secuencias finitas formada con los dos colores, donde $|W|$ es de tamaño $m + 1$, y se usan para colorear

los lados del grafo completo K_n , y la longitud de cada s_i es igual a m . Luego se descompone el grafo completo K_n de acuerdo a la coloración que se haga con cada secuencia s_i , en dos subgrafos monocromáticos $K_n = F \cup \bar{F}$, donde el subgrafo F está coloreado por el cero o el complemento de F por el uno. En tal caso, si se colorea el grafo completo K_n con cada una de las secuencias s_i y no se logra encontrar en alguna de ella una copia monocromática $G' \Delta F$ isomorfa a G o una copia monocromática $H' \Delta \bar{F}$ isomorfa a H , entonces se debe incrementar el número de vértices en uno, es decir, $n \rightarrow n' = n + 1$ con este nuevo n' se buscará la nueva talla m' del nuevo grafo completo $K_{n'}$ y con un procedimiento similar se sigue el proceso, hasta que el grafo completo $K_{n'}$, coloreado con cada secuencia s_i para todo $i = \bar{1}, \bar{m} + \bar{1}$, se pueda extraer al menos una copia monocromática $G' \Delta F$ isomorfa a G o una copia monocromática $H' \Delta \bar{F}$ isomorfa a H . Luego, se procede a determinar la simetría y la k -baricentricidad monocromática del conjunto W , nótese que:

- 2) Sí, $|W|$ es impar. Considérese el conjunto de secuencias W , separadas en tres subconjuntos de secuencias, $W_1 = \{s_1, s_2, \dots, s_{\alpha-1}\}$, $W_2 = \{s_\alpha\}$ y $W_3 = \{s_{\alpha+1}, \dots, s_{m+1}\}$. Para los subconjuntos de secuencias W_1 y W_3 se tiene que, las secuencias s_1 y s_{m+1} son monocromáticas y simétricas dos a dos con respecto al tamaño de las coloraciones, donde $s_1 \cap s_{m+1} = \phi$. Cada uno de los subconjuntos de secuencias restantes de W_1 y W_3 , son secuencias bicromáticas internas, para cada $i \neq j$, ahora separando las secuencias bicromáticas internas de W_1 y W_3 en dos subsecuencias $\{a_{\alpha_i}\}$ y $\{b_{\alpha_j}\}$, se observa que $|\{a_{\alpha_i}\}|$ y $|\{b_{\alpha_j}\}|$ son distintas en tamaño. Para $i > j$, se tiene $|\{a_{\alpha_i}\}| > |\{b_{\alpha_j}\}|$ y para $j > i$, se tiene $|\{a_{\alpha_i}\}| < |\{b_{\alpha_j}\}|$, en tal caso, para $i \neq j$, se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\{a_{m_i}\}| = |\{b_{2_j}\}| \\ |\{a_{(m-1)_i}\}| = |\{b_{3_j}\}| \\ \vdots \\ |\{a_{(\alpha+1)_i}\}| = |\{b_{(\alpha-1)_j}\}| \\ \vdots \\ |\{a_{3_i}\}| = |\{b_{(m-1)_j}\}| \\ |\{a_{2_i}\}| = |\{b_{m_j}\}|. \end{array} \right.$$

Para la secuencia bicromática $W_2 = \{s_\alpha\} = \{a_{\alpha_i}\} \cup \{b_{\alpha_j}\}$, se separa en dos subsecuencias monocromáticas, se tiene $|W_2| = |\{a_{\alpha_i}\}| + |\{b_{\alpha_j}\}|$, para $i = j$. Las cardinalidades o los tamaños de coloraciones son iguales, es decir; $|\{a_{\alpha_i}\}| = |\{b_{\alpha_j}\}|$, luego W_2 , es simétrica en si misma con respecto a las coloraciones.

$$\begin{array}{l} |\{0\}| = |\{1\}| \\ |\{0, 0\}| = |\{1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0\}| = |\{1, 1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, 0\}| = |\{1, 1, 1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, 0, 0\}| = |\{1, 1, 1, 1, 1\}| \\ \vdots \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0\}| = |\{1, 1, 1, \dots, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0\}| = |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0\}| = |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1\}| \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{aligned} |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots, 1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1\}|. \end{aligned}$$

Se puede concluir que todos los subconjuntos de secuencias W_1, W_2 y W_3 son simétricas dos a dos en tamaño con respecto a las coloraciones $\forall \alpha = \overline{1, m+1}$.

- 3) Sí $|W|$ es par. El conjunto de secuencias W , se separa en dos subconjuntos de secuencias, $W_1 = \{s_1, s_2, \dots, s_\alpha\}$ y $W_2 = \{s_{\alpha+1}, \dots, s_{m+1}\}$, en el cual los elementos de W_1 y W_2 satisfacen el caso 2), donde se señala que todas las secuencias son simétricas dos a dos con respecto a las coloraciones.
- 4) Por último la k -baricentricidad monocromática de cada secuencia s_i de W , está dada por $k = \frac{w_1+w_2}{2} = \frac{m+1}{2}$, para $m+1$ par, va a depender del número de vértices del grafo completo $K_{n'}$. Si $|W|$ es par o impar, tómesese k -elementos monocromáticos de cada secuencia s_i para todo $i = \overline{1, m+1}$ que contienen m elementos cada uno, estos k -elementos se pueden expresar como una suma k -baricéntrica, es decir, $0_1 + 0_2 + \dots + 0_k = k \cdot 0$ o $1_1 + 1_2 + \dots + 1_k = k \cdot 1$, donde el baricentro es 0 o 1. Por lo tanto, $K_{n'}$ contiene k -baricentricidad monocromática.

4 Ejemplo de aplicación del método

Ejemplo 1. Sean G el grafo rueda, para $n = 5$, con $|W_5| = 6$ y H el grafo diamante. Sea $n = \max\{|G|, |H|\} = \max\{6, 4\} = 6$ y $m = \frac{6(6-1)}{2} = 15$.

Cantidad de secuencias con repetición.

$$CR_{15}^2 = 16.$$

Conjunto de secuencias (s_i).

$$W = \begin{cases} s_1 = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\} \\ s_2 = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1\} \\ s_3 = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1\} \\ s_4 = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1\} \\ \vdots \\ s_{13} = \{0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} \\ s_{14} = \{0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} \\ s_{15} = \{0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} \\ s_{16} = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} \end{cases}$$

Se colorean los lados del K_6 con cada secuencia $s_i \forall i = \overline{1, 16}$, y de cada coloración que se realice a los lados del K_6 , siempre se puede extraer una copia monocromática $G' \Delta F$ isomorfa a G o una copia monocromática $H' \Delta \overline{F}$ isomorfa a H . Si se considera la secuencia s_{10} , para colorear los lados del K_6 , como se observa en la Figura 1.

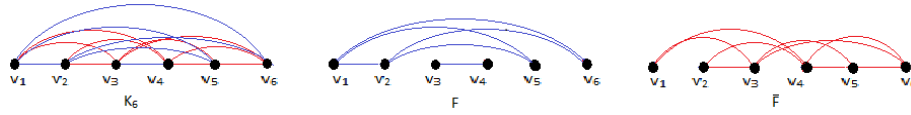


Figura 1: El K_6 coloreado con s_{10} , a F de color azul \bar{F} de color rojo.

Observe, que es posible extraer una copia $H' \Delta \bar{F}$ isomorfa a H , ver Figura 2.

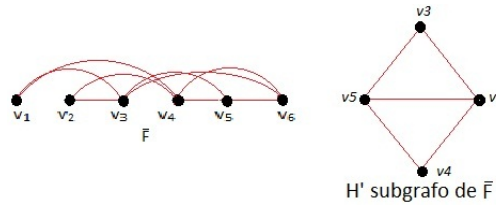


Figura 2: Los grafos \bar{F} y una copia monocromática $H' \Delta \bar{F}$ isomorfa a H .

Por lo tanto, $R(G, H) = 6$.

Como $|W|$ es par. Para $i > j$, se tiene $|\{a_{\alpha_i}\}| > |\{b_{\alpha_j}\}|$ y para $j > i$, se tiene $|\{a_{\alpha_i}\}| < |\{b_{\alpha_j}\}|$. En tal caso, para $i \neq j$, se tiene:

$$\begin{aligned} |\{0\}| &= |\{1\}| \\ |\{0, 0\}| &= |\{1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, 1, 1\}| \\ &\vdots \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1\}| \end{aligned}$$

se puede decir que todos los subconjuntos de secuencias W_1 y W_2 son simétricas dos a dos en tamaño con respecto a las coloraciones $\forall \alpha = \overline{1, 16}$.

La k -baricentricidad $k = \frac{6(6-1)+2}{4} = 8$, luego $0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 8 \star 0$ y $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8 \star 1$, el conjunto de secuencias es 8-baricéntico monocromático.

En el siguiente teorema es suficiente probar que el complemento de F contiene al menos una copia monocromática $H' \Delta \bar{F}$ isomorfa a H , es decir, lo que se prueba es que G es bueno con respecto a H , además se prueba la simetría del conjunto W de secuencias y la k -baricentricidad monocromática.

Teorema 1. Sean $G = W_n$ el grafo rueda, para $n \geq 5$ y H el grafo diamante. Si F contiene una copia isomorfa a G o el complemento de F contiene una copia isomorfa a H , entonces

$R(G, H) = n + 1$. Además, el conjunto de secuencias W es simétrico dos a dos y contiene k -baricentricidad monocromática dada por $k = \frac{n(n-1)+2}{4}$.

Demostración. Sea un grafo F con $n + 1$ vértices y supóngase que la rueda W_n contiene un camino P_n de longitud n , que no está contenido en F . Sea P un camino con k vértices de máxima longitud en F , con a_1 y a_2 vértices extremos de P en F . Observe que $|V(P)| \leq k$, con $n \geq k$. Sea $X = V(F) \setminus V(P)$, y supóngase que el subgrafo inducido generado por X , denotado por $F[X] = F[V(F) \setminus V(P)]$ contiene un camino M de máxima longitud, con vértices extremos b_1 y b_2 .

Considérese los vértices extremos de los caminos $P\Delta F$ y $M\Delta F[X]$ respectivamente, es claro que los lados que se forman con los extremos $\{a_1a_2\} \notin E(F)$ y $\{b_1b_2\} \notin E(F[X])$.

Para ver la prueba de esto, supóngase que el lado $\{a_1a_2\} \in E(F)$, luego se forma el camino cerrado $A = \{a_1a_2\} \cup P$, de $long(A) = k$ y $|A| = k$, esto implica que, $long(A) > long(P)$, esto contradice el hecho que P es el camino de máxima longitud en F , luego el lado $\{a_1a_2\} \notin E(F) \Rightarrow \{a_1a_2\} \in E(\overline{F})$. Un razonamiento similar ocurre, si supone que el lado $\{b_1b_2\} \in E(F[X])$, entonces $long(B) > long(M)$ es una contradicción, luego $\{b_1b_2\} \in E(\overline{F[X]})$. Como M es el camino de máxima longitud en $F[X]$, P es el camino de máxima longitud en F , entonces $P\Delta F$, $M\Delta F[X]$ y $F[X]\Delta F$ indican que $long(M) \leq long(P)$. Como $|V(F)| = n + 1$ y la longitud del camino P en F es $\leq k$, entonces existe al menos un vértice $z = w \notin V(P) \cup V(M) \Rightarrow w \in V(F) \setminus (V(P) \cup V(M))$. Evidentemente los lados que se forman con z , y los extremos de $P\Delta F$ y $M\Delta F[X]$, no, están en $E(F)$, para cada $z \in V(F) \setminus (V(P) \cup V(M))$, de no ser así, P y M dejarían de ser los caminos de máxima longitud en F y $F[X]$, esto indica que w no puede ser adyacente a los vértices extremos de P y M , lo que implica que cualquier lado que se forme con w esta en \overline{F} . Se presentan los siguientes casos:

1) $long(P) \geq 3$ y $long(M) \geq 1$.

En este caso $int(P) \geq 2$. Supóngase lo contrario que $|int(P)| < 2 \Rightarrow |int(P)| = 1 \Rightarrow long(P) = 2$, esto contradice el hecho que $long(P) \geq 3$. Por lo tanto, $|int(P)| \geq 2$. Luego, X debe tener al menos dos vértices, como $X = F \setminus P \Rightarrow V(X) = V(F) \setminus V(P)$ y de la teoría de conjunto se tiene,

$$V(F) = (V(F) \setminus V(P)) \cup V(P)$$

$$|V(F)| = |(V(F) \setminus V(P))| + |V(P)| - |(V(F) \setminus V(P)) \cap V(P)|,$$

pero como $(V(F) \setminus V(P)) \cap V(P) = \emptyset \Rightarrow |(V(F) \setminus V(P)) \cap V(P)| = |\emptyset| = 0$. Así, que $V(X) = |V(F)| - |V(P)|$. Por otro lado, se tiene que $|V(F)| = n + 1$ y $|V(P)| \leq k$, donde $k = n - 1$, con $n \geq 5$.

$$|V(X)| = |V(F)| - |V(P)|, \text{ pues } |V(P)| \leq k \Rightarrow -|V(P)| \geq -k$$

luego $|V(X)| \geq 2$, contiene al menos dos vértices, esto idica que Y debe tener al menos cero vértices y pueden presentarse tres posibilidades:

- Si, $|V(X)| = |V(M)|$, lo que implica

$$\begin{aligned} |V(Y)| &= |V(X)| - |V(M)| \\ &= |V(M)| - |V(M)| \\ &= 0, \text{ así } Y = \emptyset. \end{aligned}$$

- Si, $|V(X)| > |V(M)|$.

$$\begin{aligned} |V(Y)| &= |V(X)| - |V(M)| \\ &> |V(M)| - |V(M)| \\ &> 0, \text{ en consecuencia } |V(Y)| > 0 \Rightarrow Y \neq \emptyset. \end{aligned}$$

- Si, $|V(X)| < |V(M)|$.

$$\begin{aligned} |V(Y)| &= |V[X]| - |V(M)| \\ &< |V(M)| - |V(M)| \\ &= 0, \end{aligned}$$

$|V(X)| < 0$, contradicción, pues no puede existir ningún subgrafo con cardinalidad de sus vértices negativa, lo cual contradice que M es el camino de máxima longitud en $F[X]$.

1.1) $long(M) = 1$.

- Si, $long(M) = 1$ y $|V(M)| = 2$.

Luego, con los vértices extremos de P y los vértices extremos de X se forman los lados $\{a_1a_2\}, \{a_1b_1\}, \{a_1b_2\}, \{a_2b_1\}, \{a_2b_2\}$, lo cual resulta el diamante en el complemento de \bar{F} .

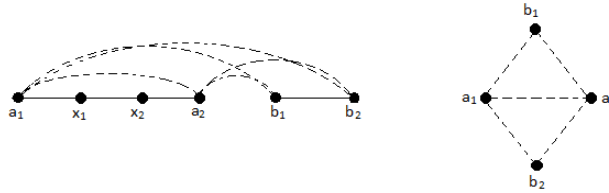


Figura 3: Los grafos: F y una copia $H' \Delta \bar{F}$ isomorfa a H .

1.2) $long(M) = 0$.

- Si, $log(M) = 0$ y $|V(M)| = 2$.

sea $x_1, x_2 \in int(P)$ tales que los lados $\{a_1x_1\}, \{x_1x_2\}, \{x_2a_2\} \in E(F)$, no pueden ser adyacentes a los vértices extremos M , porque no se cumpliría la regla y M dejaría de ser el camino de máxima longitud en $F[X]$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, con los vértices interiores de P y los extremos de M se forman los lados $\{x_1b_1\}, \{x_1b_2\}, \{x_2b_1\}, \{x_2b_2\}, \{b_1b_2\}$, resulta el diamante en el complemento de F .

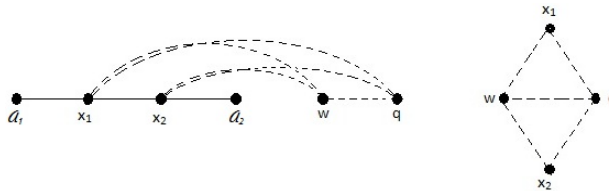


Figura 4: Los grafos: F y una copia $H' \Delta \bar{F}$ isomorfa a H .

- Si, $\log(M) = 0$ y $|V(M)| = 1$, entonces debe existir al menos un vértice w en Y .

$$\begin{aligned} |V(Y)| &= |V(F)| - |V(P)| - |V(M)| \\ |V(Y)| &\geq n + 1 - n + 1 - 1 = 1, \end{aligned}$$

en consecuencia $|V(Y)| \geq 1$, Y contiene al menos un vértice, sea w el vértice en Y . Por lo tanto, con el vértice w en Y , el vértice q en M , un vértice extremo en P y un vértice en el interior de P , se forma el diamante en el complemento de F .

Los demás casos se prueban análogos a el caso: 1.

2) $\log(P) \geq 2$ y $\log(M) \leq 2$.

3) $\log(P) \leq 1$.

- 4) Si, $\log(P) = 0 \Rightarrow |V(P)| = 1$, entonces F está formado unicamente por vértices aislados. Luego, X debe tener al menos cinco vértices.

$$\begin{aligned} |V(X)| &= |V(F)| - |V(P)| \\ |V(X)| &\geq n + 1 - 1 = n, \text{ para } n \geq 5 \\ |V(X)| &\geq 5 \end{aligned}$$

Por tanto, X tiene al menos cinco vértices aislados, con los vértices de X se forma el $K_4 - l$ en \overline{F} .

Se ha probado que G es buena con respecto a H .

Ahora, se probará que el conjunto W de secuencias es simétrico dos a dos. Suelen presentarse dos casos:

- a) Sí, $|W|$ es impar.

De la primera parte de la Definición 7, se separa el conjunto de secuencias W en tres subconjuntos de secuencias, $W_1 = \{s_1, s_2, \dots, s_{\alpha-1}\}$, $W_2 = \{s_\alpha\}$ y $W_3 = \{s_{\alpha+1}, \dots, s_{m+1}\}$. Por la Definición 2, los subconjuntos de secuencias W_1 y W_3 , se tiene que las secuencias s_1 y s_{m+1} son monocromáticas y simétricas dos a dos con respecto a el tamaño de las coloraciones. Por la Definición 3, el resto de los elementos de los subconjuntos de secuencias W_1 y W_3 , son bicromáticas, para cada $i \neq j$, observe que las cardinalidades de las subsecuencias $|\{a_{\alpha_i}\}|$ y $|\{b_{\alpha_j}\}|$ son distintas en tamaños de coloraciones. Para $i > j$, se tiene $|\{a_{\alpha_i}\}| > |\{b_{\alpha_j}\}|$ y para $j > i$, se tiene $|\{a_{\alpha_i}\}| < |\{b_{\alpha_j}\}|$, en tal caso, para $i \neq j$, se tiene la Definición 5 una colección finita de secuencias bicromáticas $s_k = \{a_{k_i}\}_{i=1}^{m-k+1} \cup \{b_{k_j}\}_{j=m-k+2}^m$, para todo $k = \overline{2, m}$, resulta:

$$\left\{ \begin{aligned} s_2 &= \{a_{2_i}\}_{i=1}^{m-1} \cup \{b_{2_j}\}_{j=m}^m \\ s_3 &= \{a_{3_i}\}_{i=1}^{m-2} \cup \{b_{3_j}\}_{j=m-1}^m \\ &\vdots \\ s_{\alpha-1} &= \{a_{(\alpha-1)_i}\}_{i=1}^{m-\alpha+2} \cup \{b_{(\alpha-1)_j}\}_{j=m-\alpha+3}^m \\ s_\alpha &= \{a_{(\alpha)_i}\}_{i=1}^{m-\alpha+1} \cup \{b_{(\alpha)_j}\}_{j=m-\alpha+2}^m \\ s_{\alpha+1} &= \{a_{(\alpha+1)_i}\}_{i=1}^{m-\alpha} \cup \{b_{(\alpha+1)_j}\}_{j=m-\alpha+1}^m \\ &\vdots \\ s_{m-1} &= \{a_{(m-1)_i}\}_{i=1}^2 \cup \{b_{(m-1)_j}\}_{j=3}^m \\ s_m &= \{a_{m_i}\}_{i=1}^1 \cup \{b_{m_j}\}_{j=2}^m. \end{aligned} \right.$$

Luego de la teoría de conjunto se tiene que

$$|s_k| = |\{a_{k_i}\}_{i=1}^{m-k+1}| + |\{b_{k_j}\}_{j=m-k+2}^m| - |\{a_{k_i}\}_{i=1}^{m-k+1} \cap \{b_{k_j}\}_{j=m-k+2}^m|$$

como $\{a_{k_i}\}_{i=1}^{m-k+1} \cap \{b_{k_j}\}_{j=m-k+2}^m = \emptyset \Rightarrow |\{a_{k_i}\}_{i=1}^{m-k+1} \cap \{b_{k_j}\}_{j=m-k+2}^m| = 0$, para todo $k = \overline{2, m}$, resulta: $|s_k| = |\{a_{k_i}\}_{i=1}^{m-k+1}| + |\{b_{k_j}\}_{j=m-k+2}^m|$.

Por tanto, se tiene para todo $k = \overline{2, m}$ que:

$$\left\{ \begin{array}{l} |s_2| = |\{a_{2_i}\}_{i=1}^{m-1}| + |\{b_{2_j}\}_{j=m}^m| \\ |s_3| = |\{a_{3_i}\}_{i=1}^{m-2}| + |\{b_{3_j}\}_{j=m-1}^m| \\ \vdots \\ |s_{\alpha-1}| = |\{a_{(\alpha-1)_i}\}_{i=1}^{m-\alpha+2}| + |\{b_{(\alpha-1)_j}\}_{j=m-\alpha+3}^m| \\ |s_\alpha| = |\{a_{(\alpha)_i}\}_{i=1}^{m-\alpha+1}| + |\{b_{(\alpha)_j}\}_{j=m-\alpha+2}^m| \\ |s_{\alpha+1}| = |\{a_{(\alpha+1)_i}\}_{i=1}^{m-\alpha}| + |\{b_{(\alpha+1)_j}\}_{j=m-\alpha+1}^m| \\ \vdots \\ |s_{m-1}| = |\{a_{(m-1)_i}\}_{i=1}^2| + |\{b_{(m-1)_j}\}_{j=3}^m| \\ |s_m| = |\{a_{m_i}\}_{i=1}^1| + |\{b_{m_j}\}_{j=2}^m|. \end{array} \right.$$

Resulta:

$$\begin{aligned} |\{a_{m_i}\}_{i=1}^1| &= |\{b_{2_j}\}_{j=m}^m|, |\{a_{(m-1)_i}\}_{i=1}^2| = |\{b_{3_j}\}_{j=m-1}^m|, \dots, \\ |\{a_{(\alpha+1)_i}\}_{i=1}^{m-\alpha}| &= |\{b_{(\alpha-1)_j}\}_{j=m-\alpha+3}^m|, \dots, |\{a_{3_i}\}_{i=1}^{m-2}| = |\{b_{(m-1)_j}\}_{j=3}^m|, \\ |\{a_{2_i}\}_{i=1}^{m-1}| &= |\{b_{m_j}\}_{j=2}^m|. \end{aligned}$$

Por la Definición 4 el subconjunto W_2 de secuencia es simétrica en si misma con respecto a las coloraciones. Observe que.

$$\begin{aligned} |\{0\}| &= |\{1\}| \\ |\{0, 0\}| &= |\{1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, 1, 1\}| \\ &\vdots \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1\}| \\ &\vdots \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots, 1, 1\}| \\ |\{0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0\}| &= |\{1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1\}| \end{aligned}$$

Con este resultado, se deduce que todas las secuencias son simétricas dos a dos en tamaño con respecto a las coloraciones.

Ahora, considérese las secuencias desde s_1 hasta s_m , y desde s_2 hasta s_{m+1} , todas de longitud m , para formar las matrices W' y W'' ambas de orden $m \times m$. Nótese, que las matrices W' y W'' son simétricas en el sentido usual de matrices, es decir, $(W')^t = W'$ y $(W'')^t = W''$. Como W' y W'' son matrices simétricas, evidentemente la suma es simétrica, es decir, $(W' + W'')^t = W' + W''$.

Por otro lado, el producto de W' por W'' también resulta una matriz simétrica. En efecto, sean $W' = [a_{ik}]$ y $W'' = [b_{kj}]$ simétricas. Nótese, que $W' \neq W''$ y $W' \cdot W'' \neq W'' \cdot W'$, luego $W' \cdot W'' = [a_{ik}] \cdot [b_{kj}] = [c_{ij}]$, donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{im}b_{mj}$, entonces

$$\begin{aligned} ([c_{ij}]^t &= (\sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj})^t \\ &= (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{im}b_{mj})^t \\ &= (a_{i1}b_{1j})^t + (a_{i2}b_{2j})^t + (a_{i3}b_{3j})^t + \dots + (a_{im}b_{mj})^t \\ &= (b_{1j})^t(a_{i1})^t + (b_{2j})^t(a_{i2})^t + (b_{3j})^t(a_{i3})^t + \dots + (b_{mj})^t(a_{im})^t \\ &= b_{j1}a_{1i} + b_{j2}a_{2i} + b_{j3}a_{3i} + \dots + b_{jm}a_{mi}, \\ &= [c_{ji}] \end{aligned}$$

Por tanto, el producto es simétrico.

b) Sí, $|W|$ es par.

Por el ítem 2) de la Definición 7, el conjunto de secuencias W , se separa en dos subconjuntos de secuencias, de la forma $W_1 = \{s_1, s_2, \dots, s_\alpha\}$ y $W_2 = \{s_{\alpha+1}, \dots, s_{m+1}\}$, con un razonamiento similar a los casos 1.1) y 1.2), cuando $|W|$ es impar, los elementos de los subconjuntos W_1 y W_2 satisfacen las mismas condiciones cuando $|W|$ es par. Así todas las secuencias son simétricas dos a dos con respecto a las coloraciones.

Ahora, se probará la k -baricentricidad.

- Sí, $|W|$ es impar, es válida la condición presente en el ítem 2, de la Definición 8, o lo que equivale al piso de simetría, es decir.

$$\begin{aligned} k &= \frac{|W_1| + |W_2| + |W_3|}{2} \\ &= \frac{\alpha - 1 + 1 + m + 1 - \alpha}{2} \\ &= \frac{m + 1}{2} \\ &= \frac{\frac{n(n-1)}{2} + 1}{2} \\ &= \frac{n(n-1) + 2}{4}. \end{aligned}$$

- Sí, $|W|$ es par, y del ítem 1 de la Definición 8.

$$k = \frac{|w_1| + |w_2|}{2} = \frac{\alpha + m + 1 - \alpha}{2} = \frac{m + 1}{2} = \frac{n(n-1) + 2}{4}.$$

Por tanto, se ha demostrado que el grafo completo K_n contiene k -baricentricidad monocromática. Por lo tanto, con este último resultado se ha demostrado el teorema. \square

Referencias

- [1] Baskoro, E.T. *The Ramsey number of paths and small wheels*. J. Indones. Math. Soc. (MIH-MI). **1** (2007), 13–16
- [2] Chen, Y.; Zhang, Y.; and Zhang, K. *The Ramsey number paths, versus wheels*. Discret Mathematics. **290** (2005), 85–87.
- [3] Otero, J. *Un método matricial para el cálculo de las constantes de Davenport y Olson k -baricéntricas*. Tesis de Maestría. Universidad de Oriente. Venezuela. 2011
- [4] Otero, J; Salazar, J; and Villarroel, F. *Representación de grafos divisores de cero para anillos*. Divulgaciones Matemáticas. **19**(2) (2018), 44–51.
- [5] Radziszowski, S. P.; and Xia, J. *Paths, cycles and wheels in graphs without antitriangles*. Australasian Journal of Combinatorics. **9** (1994), 221–232.
- [6] Surahmat and Baskoro, E.T. *On the Ramsey number of path or star versus W_4 or W_5* . Proc. Twelfth Australsian Workshop on Combinatorial Algorithms, Bandung, Indonesia. **14-17** (2001). 174–179.
- [7] Villarroel, F.; Figueroa, J.; Márquez, H. and Anselmi, A. *Un método algorítmico para el cálculo del número baricéntrico de Ramsey para el grafo estrella*. Bol.soc. Paran. Mat.3s. **36** (2018) 169–183.
- [8] Villarroel, F. *La constante de olson k -baricéntrica y un teorema inverso de Erds-Ginzburg-Ziv*. Tesis Doctoral. Universidad Central de Venezuela. 2008.
- [9] Zhou, H. L. *The Ramsey number of an odd cycles with respect to a wheel in chinese*. Journal of Mathematics, Shuxu Zazhi. **15** (1995), 119–120.