

Geoplano circular trigonométrico: Un recurso didáctico para la enseñanza de la Geometría

Trigonometric circular geoplany: A didactic resource for the teaching of Geometry

Derling José Mendoza Velazco (dmendoza@unibe.edu.ec)

Universidad Iberoamericana del Ecuador UNIB.E
Instituto de Investigaciones Científicas y Tecnológicas INCYT

Resumen

La dificultad en el proceso de enseñanza de la Trigonometría, sirvió de estímulo para la presente investigación, cuyo objetivo consistió en diseñar y proponer el uso de un *Geoplano Circular Trigonométrico* para la construcción de aprendizajes significativos en el área de Matemática en la Universidad Iberoamericana del Ecuador UNIB.E. Para su desarrollo, se realizó una investigación de campo, tipo descriptiva, bajo la modalidad de proyecto especial. Como informantes claves, se contó con la participación de veinte (20) estudiantes y tres (3) docentes que laboran en el primer semestre de la institución antes mencionada. Para recopilar la información, se utilizó la técnica de observación y la entrevista, y como instrumentos la guía de observación y guía para la entrevista, sometidos a un proceso de validez. La fiabilidad, se efectuó a través de la estandarización de los registros mediante la categorización, luego se analizaron los hallazgos en base a un análisis descriptivo cualitativo para elaborar las conclusiones en búsqueda de los objetivos propuestos sobre el diseño y uso de una herramienta didáctica que contribuya de manera positiva a la enseñanza y aprendizaje de la Geometría, de igual manera, se observó la motivación y receptividad al utilizar el Geoplano, en razón de permitir desarrollar metodologías innovadoras que brindan un cambio de la práctica andragógica, como lo es, enseñar habilidades de aprendizaje que duren para toda la vida.

Palabras y frases clave: Educación matemática, Trigonometría, aprendizaje significativo.

Abstract

The difficulty in the teaching process of Trigonometry, served as a stimulus for the present investigation, whose objective was to design and propose the use of a *Trigonometric Circular Geoplan* for the construction of significant learning in the area of Mathematics at the Universidad Iberoamericana del Ecuador UNIB.E. For its development, a field investigation was carried out, descriptive type, under the special project modality. As key informants, there was the participation of twenty (20) students and three (3) teachers who work in the first semester of the institution mentioned above. To collect the information, the observation technique and the interview were used, and as an instruments the observation guide and

guide for the interview, submitted to a validity process. The reliability was done through the standardization of the records through categorization, then the findings were analyzed based on a qualitative descriptive analysis to elaborate the conclusions in search of the proposed objectives on the design and use of a didactic tool that contributes positively to the teaching and learning of Geometry, in the same way, the motivation and receptivity was observed when using the Geoplane, in order to allow to develop innovative methodologies that provide a change of the andragogic practice, as it is, teach learning skills that last for a lifetime.

Key words and phrases: Mathematics education, Trigonometry, meaningful learning.

1 Introducción

El proceso de aprendizaje y enseñanza de la Matemática en las instituciones universitarias, especialmente en la educación superior, se ha convertido, durante los últimos años, en una tarea ampliamente compleja y fundamental. A tal efecto, los docentes de Matemática y de otras áreas del conocimiento científico se encuentran con frecuencia frente a exigencias didácticas cambiantes e innovadoras, lo cual requiere una mayor atención por parte de las personas que están dedicadas a la investigación en el campo de la educación matemática y, sobre todo, al desarrollo de unidades de aprendizaje para el tratamiento de la variedad de temas dentro y fuera de esta ciencia.

En este contexto, quienes están vinculados con la didáctica de la Matemática consideran que las y los estudiantes deben adquirir diversas formas de conocimientos matemáticos en y para diferentes situaciones, tanto para su aplicación posterior como para fortalecer estrategias didácticas en el proceso de aprendizaje y enseñanza. Ello exige, obviamente, profundizar sobre los correspondientes métodos de aprendizaje y, muy particularmente, sobre técnicas y recursos adecuados para ser aplicados en el contexto educativo.

2 Sustento teórico

2.1 Educación matemática

Las ciencias numéricas siempre han existido en la humanidad desde que el hombre hace uso de su razón, lo cual evidencia que la sociedad considera de gran importancia la formación científica del ser, desde su contexto infantil hasta el desarrollo de su madurez intelectual. La Matemática, es esencial en la vida de todos los seres humanos, en razón de ello, es contemplada dentro de la educación, como una de las áreas que requiere atención. En este sentido, Mora en [11] indica:

El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas contribuye considerablemente con el cultivo permanente de las matemáticas, su avance conceptual y la conformación de grupos y sujetos investigadores motivados y convencidos por la importancia, utilidad, potencialidad, poder, etc. que caracterizan a las matemáticas cuando son enfocadas desde una cultura de aprendizaje y enseñanza polivalente e interdisciplinar, sumamente contraria a las tendencias predominantes actualmente.

El producto del conocimiento científico en la Matemática es fundamental, no solo para el estudiante sino también para todas las personas. Es, además, un derecho básico del ser humano

tener acceso al conocimiento científico, comprenderlo y hacer uso de él. La Matemática como ciencia ha de estructurar una realidad, que abarca diferentes áreas, como la Geometría, la Historia, el Arte, entre otras. La diversidad cultural del enriquecimiento cognitivo permitido por esta ciencia permite comprender desde diferentes perspectivas la investigación.

2.2 Motivación en el aprendizaje

Según Chiavenato (ver [5]), “*La motivación es el interés que tiene el alumno por su propio aprendizaje o por las actividades que le conducen a él*”. Hoy en día es un factor clave para el aprendizaje, por eso resulta importante entender por qué tan frecuentemente en los adolescentes desciende la motivación y con ella el desempeño matemático, especialmente al pasar de la secundaria a la educación superior.

El interés se puede adquirir, mantener o aumentar en función de elementos intrínsecos y extrínsecos. Se debe distinguir de lo que tradicionalmente se ha venido llamando en las instituciones como motivación, es decir, distinguir de lo que el profesor hace para que los alumnos se motiven. El término motivación hace alusión al aspecto en virtud del cual el sujeto vivo es una realidad autodinámica que le diferencia de los seres inertes. El organismo vivo se distingue de los que no lo son porque puede moverse a sí mismo. La motivación, trata por lo tanto, de esos determinantes que hacen que el sujeto se comporte de una determinada manera teniendo en sí mismo el principio de su propio movimiento.

Según Vigotsky en [16], el desarrollo de los procesos psicológicos superiores, en el ser humano, es una actividad compleja que incluye el uso del lenguaje, el pensamiento, la memoria, la atención, la percepción y la abstracción. El aprendizaje es un proceso psicológico de orden superior, que ocurre por internalización de actividades externas sobre la base de estructuras internas. Es auxiliado por instrumentos de orden material, denominados recursos, y de orden psicológico llamados signos.

En el proceso de aprendizaje se reconstruyen estructuras cognitivas y consiste en transformar actividades que ocurren externamente en actividades que ocurren internamente, es decir, pasan del plano interpersonal al plano intrapersonal. El signo externo se convierte en interno con significado y es utilizado, entre otras cosas, para recordar, pensar, analizar y hablar.

Un procedimiento implica el hacer como actividad práctica y externa, y el pensar hacer, como actividad cognitiva e interna. En Matemática, el aprendizaje de procedimientos se basa en la idea de construcción progresiva y el avance se detecta por la ejecución de los pasos que la componen, la corrección de dicha ejecución, la capacidad de saber cuándo y cómo utilizarlo. Un procedimiento se aprende practicando, aplicándolo, reflexionando y analizando. El aprendizaje se basa en el traspaso progresivo del control y de la responsabilidad en la ejecución.

La motivación al logro consiste en una red de conexiones cognitivo-afectivas relacionadas con el desarrollo personal e impulsa a las personas a exigirse más, a rendir más, a usar eficientemente las capacidades, las destrezas y los conocimientos adquiridos. Entonces, cuando se han establecido metas, tareas, creencias y actividades facilitadoras de logro, la acción o desempeño del estudiante aprendiz es un acto consciente con intencionalidad. Por ello, se supone que el efecto de la motivación al logro se refleja en la elaboración de aquellas tareas que representan conflictos cognitivos generadores de nuevo conocimiento.

2.3 Motivación en el proceso didáctico educacional de la Matemática

Para Meyer en [10], cuando un docente de Matemática prepara una actividad:

...las preocupaciones principales radican en cómo mantener a los estudiantes interesados en el tema que se va a desarrollar. Más aún, nos preguntamos cómo debemos estructurar nuestro discurso didáctico para atraer y mantener la atención de los estudiantes. Después de todo, el profesor de Matemática tiene, por lo general, el estigma de ser el profesor de una materia difícil y aburrida.

La creación de materiales didácticos como carteles filminas, rotafolios etc., fue en el pasado una actividad de los profesores para lograr este cometido. Aún hoy siguen siendo un recurso valioso. Por otro lado, la facilidad con que se puede acceder a la información vía internet, la introducción de las plataformas multimediales en la educación y el desarrollo del software educativo interactivo plantea un nuevo paradigma dentro del cual, el profesor de Matemática puede desarrollar estrategias educativas que motiven el aprendizaje de la Matemática.

En este sentido, para Arrieche en [1] *“ya se observan los juegos solo como un entretenimiento o una diversión, como algo útil para motivar, pero poca cosa”*. Actualmente, como resultado de la investigación en distintos aspectos de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, el docente es mucho más consciente del potencial educacional de los juegos o instrumentos didácticos.

Por otra parte, es labor del docente en buscar estrategias que motiven al estudiante a estudiar Matemática. Son muchos los esfuerzos que se han planteado a través del tiempo, pero el que mejor plantea la posibilidad de motivar a los estudiantes es la creación de herramientas didácticas que permiten facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las universidades, colegios o instituciones. Este tipo de estrategia, no solo permite presentar al estudiante temas de Matemática que son interesantes, sino que al estar fuera del currículo formal del curso, libera al estudiante de la preocupación de tener que aprenderlo, además se presenta como un entretenimiento y por tanto una actividad de carácter lúdico.

Desgraciadamente, la práctica de instrumentos didácticos a nivel universitario ha caído en desuso, debido en parte a la cultura matemática de los profesores, quienes mantienen una metodología academicista en su praxis educativa, en consecuencia, de la programación de actividades que resultan poco interesantes para los alumnos y en parte por el exceso de trabajo a que están sometidos los docentes en las funciones institucionales como la investigación. Sin embargo, es necesario realizar esfuerzos por rescatar este componente de la enseñanza de la Matemática que, sin lugar a duda, es una estrategia importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

2.4 La Trigonometría

La Trigonometría es definida por Becerra en [4] como: *“el área que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. Su etimología proviene de trigono triángulo y metría medida”* (p.1). De igual forma, en el diccionario etimológico de la lengua castellana, Corominas en [6] establece que: *“Trigonometría, 1727. Cpt. Del gr. métron ‘medida’ con trigonos ‘triángulo’ (a su vez cpt. de tres ‘tres’ y gonía ‘ángulo’)”*. Por lo tanto, la Trigonometría es una parte de la Matemática que, genéricamente, estudia la relación entre los ángulos, sus medidas y los lados de un triángulo, es decir medida de figuras geométricas con tres ángulos.

En la educación matemática y en especial en el área de Trigonometría se utiliza en gran cantidad de ocasiones, las clases magistrales a través de los métodos expositivos, considerándose

que existe una gran eficacia en la transmisión de conocimientos, al contrario del poder comprender lo esencial en los temas brindados en las clases. Estos aspectos, crean en la población estudiantil amplios vacíos de lo que significa un tema o área de las ciencias numéricas.

La Geometría, como una de las disciplinas matemáticas más demostrativas, concretas e intuitivas, se encuentra interrelacionada al universo del ser humano, ya que se pueden demostrar de distintas formas, los teoremas o axiomas, mediante instrumentos o materiales factibles. En cuanto a los instrumentos, estos se pueden diseñar de manera óptima y adecuada para experimentar conceptos geométricos, facilitando la posibilidad de recrear figuras e imágenes con patrones geométricos de índole fenomenológico.

2.5 El Geoplano

Espinoza en [7], expresa que el primer geoplano se presentó en *“la primera publicación conjunta de la comisión internacional para la mejora de la enseñanza de la Matemática en 1961. El Geoplano original diseñado por Gattegno (1911-1988) consistía en una plancha de madera con pivotes o clavos formando una trama ortométrica”* (p.17). Como instrumento didáctico se presentó para realizar el cálculo de áreas y perímetros, uniendo los clavos con ligamentos o cuerdas, demostrándose la construcción de figuras geométricas.

Para Potoy et al, en [13], *“El geoplano es un recurso didáctico para la introducción de gran parte de los conceptos geométricos; el carácter manipulativo”* (p.25). Como recurso didáctico para inducir los temas de Geometría, el aspecto manipulativo facilita al docente generar la apertura de la imaginación y la factibilidad en las clases, donde los contenidos abstractos de la Matemática pueden disolverse a través de su uso y de la creatividad de los estudiantes.

Actualmente existen diferentes tipos de geoplano, entre ellos el ortométrico, el cual consta de una tabla cuadrangular, donde se colocan los clavos, formalizando cuadros. El geoplano isométrico, utilizado para el cálculo de triángulos trigonométricos, y el geoplano circular donde se ubican los clavos de manera circular, destacándose una distancia equitativa desde el centro hasta sus extremos. Las dimensiones de los geoplanos dependen de la necesidad de su diseñador.

2.6 Teoría del aprendizaje significativo

El *aprendizaje significativo* se entiende como la dimensión del conocimiento que tiene el alumno. Ausubel en [2] se inscribe en la corriente psicológica cognoscitiva, la cual tiene su fundamento en la existencia de una estructura cognoscitiva, donde el individuo organiza el conocimiento.

Esa estructura debe ser tomada en cuenta al momento de diagnosticar, planificar, ejecutar y evaluar la acción educativa, puesto que los conocimientos previos son el soporte para que el estudiante pueda adquirir y procesar nuevos conocimientos a través de la capacidad de relacionarlos con los conceptos que ya posee en su estructura cognoscitiva.

El mismo Ausubel, (ver [2]), considera a esta teoría como una teoría psicológica del aprendizaje en el aula, pues se ocupa de los procesos mismos que el individuo pone en juego para aprender. Pero desde esa perspectiva no trata temas relativos a la psicología misma ni desde un punto de vista general, ni desde la óptica del desarrollo, sino que pone énfasis en lo que ocurre en el aula cuando los estudiantes aprenden; en la naturaleza de ese aprendizaje; en las condiciones requeridas para que éste se produzca; en sus resultados y, consecuentemente, en su evaluación Ausubel (ver [3]). Es una teoría de aprendizaje porque esa es su finalidad.

La *teoría del aprendizaje significativo* aborda todos y cada uno de los elementos, factores, condiciones y tipos que garantizan la adquisición, la asimilación y la retención del contenido que la escuela ofrece al alumnado, de modo que adquiera significado para el mismo.

El origen de la teoría del aprendizaje significativo está en el interés que tiene Ausubel (ver [3]) por conocer y explicar las condiciones y propiedades del aprendizaje, que se pueden relacionar con formas efectivas y eficaces de provocar de manera deliberada cambios cognitivos estables, susceptibles de dotar significado individual y social. Como finalidad es conseguir que los aprendizajes producidos en la escuela sean significativos, Ausubel entiende que una teoría del aprendizaje escolar realista y científicamente viable debe ocuparse del carácter complejo y significativo que tiene el aprendizaje verbal y simbólico. Así mismo, y con objeto de lograr esa significatividad, debe prestar atención a todos y cada uno de los elementos y factores que le afectan, y puedan ser manipulados para tal fin.

Lo que define a la teoría ausubeliana es el “*aprendizaje significativo*”, una etiqueta que está muy presente en el diálogo de docentes, diseñadores del currículum e investigadores en educación y que, sin embargo, son muchos también los que desconocen su origen y su justificación. El aprendizaje significativo es el proceso según el cual se relaciona un nuevo conocimiento o información con la estructura cognitiva del que aprende de forma no arbitraria y sustantiva o no literal. Esa interacción con la estructura cognitiva no se produce considerándola como un todo, sino con aspectos relevantes presentes en la misma, que reciben el nombre de subsumidores o ideas de anclaje (ver [2]). La presencia de ideas, conceptos o proposiciones inclusivas, claras y disponibles en la mente del aprendiz es lo que dota de significado a ese nuevo contenido en interacción con el mismo.

3 Metodología

3.1 Investigación de campo

Para efectos de la investigación se aplicó la investigación de campo, según la Universidad Pedagógica Experimental Libertador UPEL (ver [15]) consiste en:

...el análisis sistemático de problemas en la realidad, con el propósito bien sea de describirlos, interpretarlos, entender su naturaleza y factores constituyentes, explicar sus causas y efectos, o predecir su ocurrencia, haciendo uso de métodos característicos de cualquiera de los paradigmas o enfoques de investigación conocidos o en desarrollo.

Es decir, su incuestionable valor reside que a través de ellos el investigador puede certificar de las verdaderas condiciones que se han obtenido los datos, haciendo posible su revisión ó modificación en el caso de que surjan dudas en relación a su calidad.

3.2 Investigación interpretativa

La investigación se formuló mediante el enfoque cualitativo, caracterizado por el paradigma interpretativo que para, Ricoy en [14], es un estudio donde se busca:

...profundizar en la investigación, planteando diseños abiertos y emergentes desde la globalidad y contextualización. Las técnicas de recogida de datos más usuales son la observación participativa, historias de vida, entrevistas, los diarios, cuadernos de

campo, los perfiles, el estudio de caso, etc. Tanto las conclusiones como la discusión que generan las investigaciones que comparten la doctrina del paradigma interpretativo están ligadas fundamentalmente a un escenario educativo concreto contribuyendo también a comprender, conocer y actuar frente a otras situaciones.

3.3 Investigación de tipo proyecto especial

Por otra parte, se adoptó la modalidad de proyecto especial, el cual según UPEL en [15] son estudios que llevan a:

...creaciones tangibles, susceptibles de ser utilizadas como soluciones a problemas demostrados, o que respondan a necesidades e intereses de tipo cultural. Se incluyen en esta categoría los trabajos de elaboración de libros de texto y materiales de apoyo educativo, el desarrollo de software, prototipos y productos tecnológicos en general, así como también las creaciones literarias y artísticas.

Es decir, se caracteriza como proyecto especial, por estar orientado a resolver un problema planteado, mediante la solución de dificultades y satisfacción de necesidades en una institución, cuyo propósito es diseñar material didáctico de apoyo educativo en la enseñanza de la Matemática.

4 Técnicas e instrumentos de investigación

Por el carácter cualitativo de la investigación los tres docentes participantes de la UNIB.E, emplearon la técnica de observación tipo participante, donde Becerra en [4] indica que el investigador forma parte o se integra con la comunidad o grupo donde se desarrolla el estudio. La observación ejecutada en el estudio tuvo como propósito principal identificar en los estudiantes sus actitudes y gestos expresados en la aplicación del geoplano, donde se registraron datos especiales, por medio de una guía de observación aplicada como instrumento para la recolección de información.

Para la obtención de datos importantes y resaltantes en el estudio, se ejecutó a los estudiantes una entrevista de tipo semiestructurada, las cuales, según Peláez, Rodríguez, Ramírez, Pérez, Vázquez y González en [12], expresan que:

Se determina de antemano cual es la información relevante que se quiere conseguir. Se hacen preguntas abiertas dando oportunidad a recibir mas matices de la respuesta, permite ir entrelazando temas, pero requiere de una gran atención por parte del investigador para poder encauzar y estirar los temas. (Actitud de escucha)

Los datos suministrados por las entrevistas aplicadas a los estudiantes y las observaciones por parte de los docentes fueron contrastados, proceso sugerido por Martínez en [9], donde los resultados son relacionados al comparar y contraponer conclusiones con las de otros investigadores, permitiendo no sólo entender mejor las posibles diferencias, sino que hará posible una integración mayor y, por consiguiente, un enriquecimiento del cuerpo de conocimientos del área estudiada. La validez de los instrumentos fueron hechas por tres expertos especialistas en las áreas de: Educación Superior y Educación Matemática.

5 Análisis de los resultados

En calidad del mejoramiento del proceso enseñanza aprendizaje de los estudiantes de la UNIB.E, respecto a los contenidos de la Geometría, se procedió a la construcción y uso de un geoplano de tipo circular para la explicación de los temas de Trigonometría, dedicado a los estudiantes del primer semestre. El diseño del geoplano circular trigonométrico aplicado en la investigación, consta del modelo básico de una tabla rectangular de 20 cm los cuatro lados. Circunscritos en la subdivisión de un plano cartesiano (4 cuadrantes) como se puede visualizar en la Figura 1. Adjunto una circunferencia de radio 1 de color azul, más una circunferencia de radio $\sqrt{3}$, ambas con centro único desde el punto de origen.

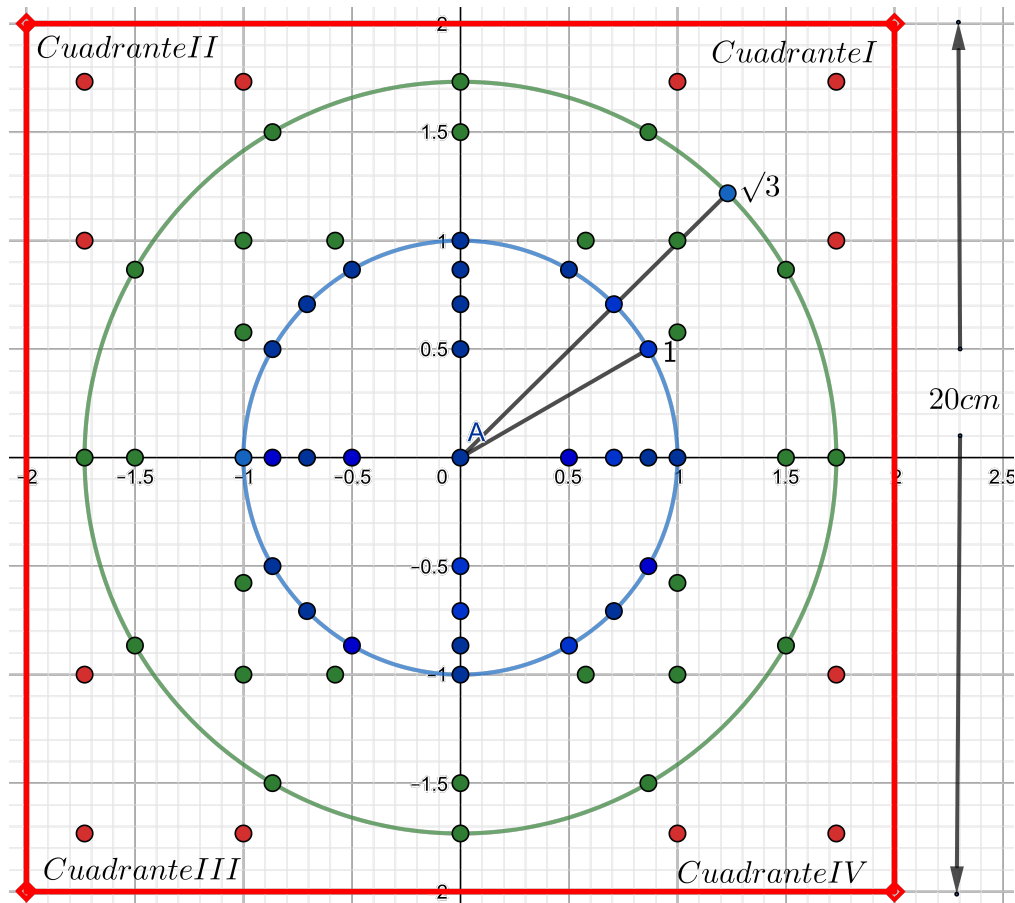


Figura 1: Geoplano circular trigonométrico

Respecto a la cantidad y ubicación específica de clavos adscritos a la tabla, se requirió de un total de 69. De los cuales 29 clavos, están ubicados en la circunferencia concéntrica azul con radio 1. Luego 28 clavos en la corona verde con radio de circunferencia $\sqrt{3}$, y por último 12 clavos de color rojo es la parte externa. Todos los clavos se ubicaron en los siguientes puntos como se describe en la Figura 2:

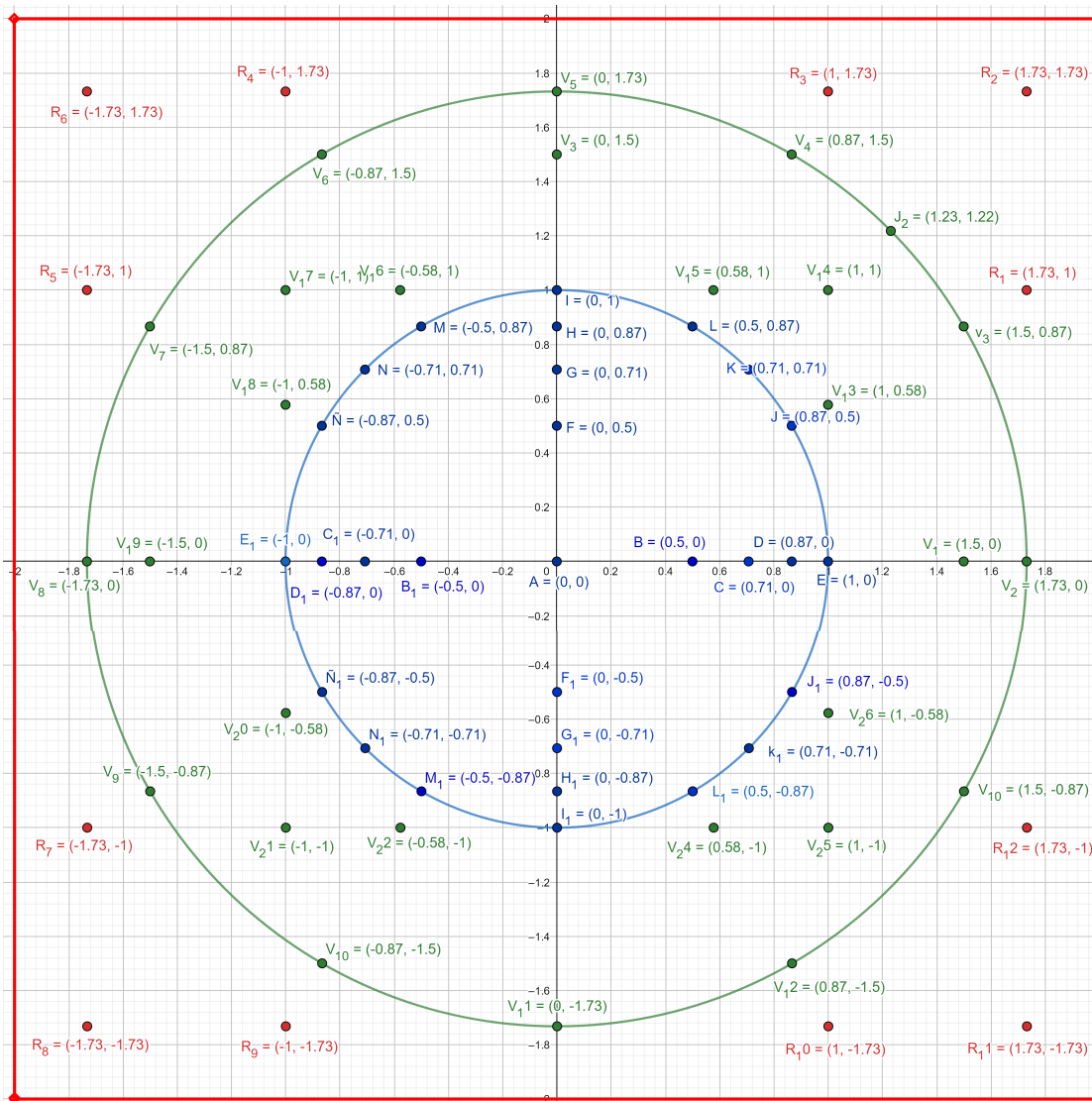


Figura 2: Ubicación de los clavos en el geoplano mediante coordenadas cartesianas

En la parte posterior del geoplano se ubicó un formulario básico de trigonometría, el mismo se encuentra dividido en cuatro componentes, los cuales se muestran desde la Figura 3 hasta la Figura 6. En el presente marco se ostenta el análisis e interpretación de la información obtenida en el referente metodológico destacado, mediante los informantes y sucesos observados en las circunstancias donde se desenvuelve las actividades matemáticas, cuyo propósito permitió examinar las características motivacionales de los estudiantes en la enseñanza de la Geometría bajo la incursión del geoplano circular trigonométrico. Para construir los elementos teóricos, que sustenten los análisis teóricos de los resultados, se requirió de un estudio riguroso de los datos, inmerso en un análisis secuencial para desarrollar la temática prevista en la investigación.

Formulario de Trigonometría

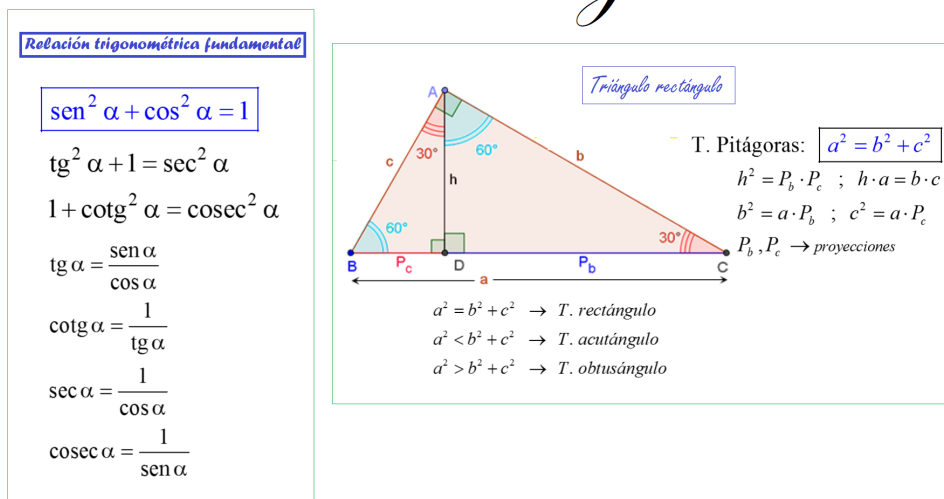


Figura 3: Formulario de Trigonometría, primer componente

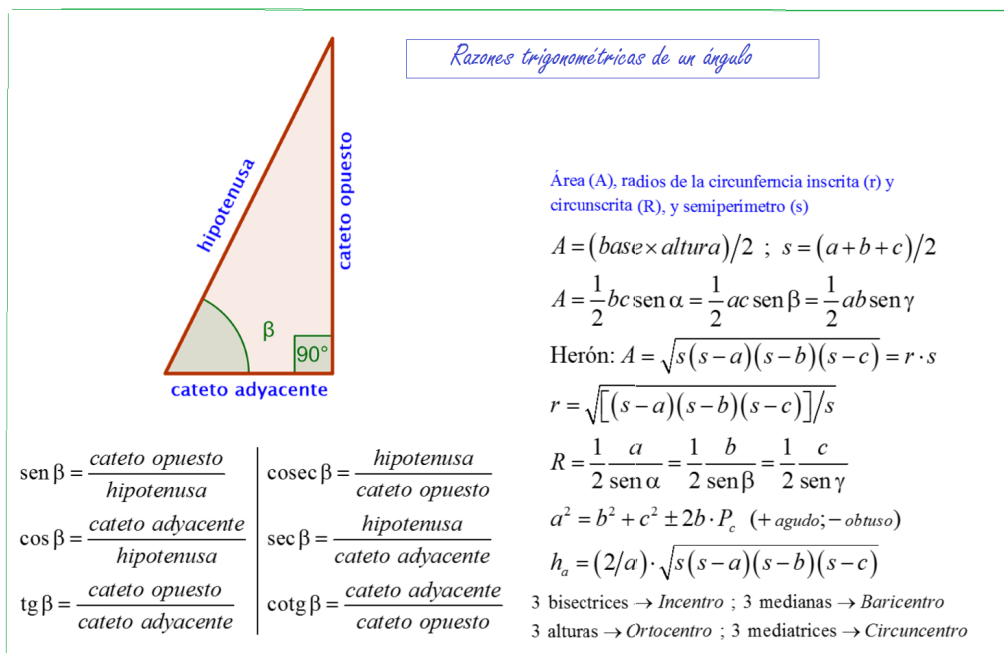


Figura 4: Formulario de Trigonometría, segundo componente

Conversión

Conversión: $\frac{a}{180} = \frac{b}{\pi}$

grados $\xleftrightarrow[\times \frac{\pi}{180}]{\times \frac{180}{\pi}}$ radianes

$1^\circ \approx 0,0175 \text{ rad}$; $1 \text{ rad} \approx 57,296^\circ$

$19,57^\circ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{parte entera} \rightarrow 19^\circ \\ 0,57 \times 60 = 34,2 \rightarrow 34' \\ 0,20 \times 60 = 12 \rightarrow 12'' \end{array} \right] \Rightarrow 19^\circ 34' 12''$

$\left[19 + 0,5\bar{6} + 0,00\bar{3} = 19 + \frac{34}{60} + \frac{12}{3600} \right]$

Sistema sexagesimal: $\text{circunferencia} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$
 $1^\circ = 60'$; $1' = 60''$; $L_{\text{arco}} = \text{radio} \cdot \text{ángulo (en rad)}$

Relación Trigonométrica de Ángulos

Ángulo doble

$\text{sen } 2\alpha = 2 \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \alpha$
 $\text{cos } 2\alpha = \text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$
 $\text{tg } 2\alpha = \frac{2 \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}$

Medio Ángulo

$\text{sen } \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos } \alpha}{2}}$
 $\text{cos } \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \text{cos } \alpha}{2}}$
 $\text{tg } \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos } \alpha}{1 + \text{cos } \alpha}}$

Suma de ángulos

$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \text{sen } \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \text{cos } \frac{\alpha - \beta}{2}$
 $\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta = 2 \text{cos } \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \text{sen } \frac{\alpha - \beta}{2}$
 $\text{cos } \alpha + \text{cos } \beta = 2 \text{cos } \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \text{cos } \frac{\alpha - \beta}{2}$
 $\text{cos } \alpha - \text{cos } \beta = -2 \text{sen } \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \text{sen } \frac{\alpha - \beta}{2}$

Productos de ángulos

$\text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \beta = \frac{1}{2} \text{sen } (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \text{sen } (\alpha - \beta)$
 $\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta = \frac{1}{2} \text{cos } (\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \text{cos } (\alpha + \beta)$
 $\text{cos } \alpha \cdot \text{cos } \beta = \frac{1}{2} \text{cos } (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \text{cos } (\alpha - \beta)$

Sumas y diferencias

$\text{sen } (\alpha \pm \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \beta \pm \text{cos } \alpha \cdot \text{sen } \beta$
 $\text{cos } (\alpha \pm \beta) = \text{cos } \alpha \cdot \text{cos } \beta \mp \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$
 $\text{tg } (\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg } \alpha \pm \text{tg } \beta}{1 \mp \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}$

Teorema del seno

Las longitudes de los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} = 2R$

$\frac{a}{\text{sen } \alpha}$ $\frac{b}{\text{sen } \beta}$ $\frac{c}{\text{sen } \gamma}$

Teorema del Coseno

En todo triángulo se verifica que

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{cos } \alpha$
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \text{cos } \beta$
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{cos } \gamma$

Nota: Para ángulos obtusos el coseno es negativo

Función arco seno: $y = \text{arc sen } x \Leftrightarrow x = \text{sen } y$
 ej. con la calculadora: $\boxed{\sin^{-1}}$ $\rightarrow \text{arc sen}(0,5) = 30^\circ$

Tabla de Valores

grados	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*	0	*	0
cotg	*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	*	0	*
sec	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	*	-1	*	1
cosec	*	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	*	-1	*

Un radián (1 rad) es el ángulo central de una circunferencia que abarca un arco con igual longitud que el radio.

Notación:
 $(\text{sen } \alpha)^2 = \text{sen}^2 \alpha$ pero no es $\text{sen } \alpha^2$
 $\text{tg } \alpha = \text{tan } \alpha$; $\text{cotg } \alpha = \text{cot } \alpha$; $\text{cosec } \alpha = \text{csc } \alpha$

Figura 5: Formulario de Trigonometría, tercer componente

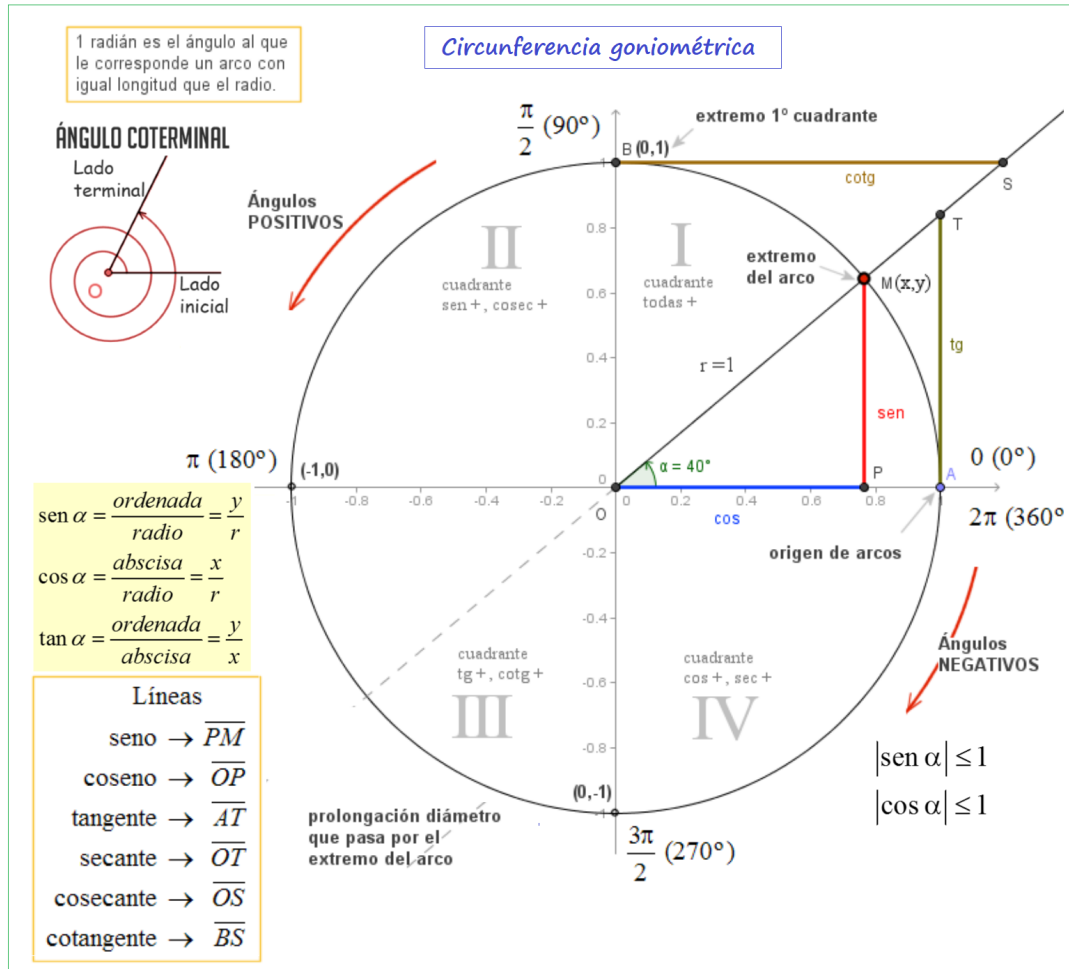


Figura 6: Formulario de Trigonometría, cuarto componente

Al aplicarse ligamentos de diferentes colores en diferentes puntos (o clavos del geoplano) se puede distinguir la formación de triángulos, como el triángulo de ligamento violeta con vértices (L_1, A, D_1) con ángulo de inclinación de 30° con el eje horizontal, el triángulo de ligamento rosa, con vértices (K_1, A, D) y ángulo de inclinación 45° con el eje X , el triángulo de ligamento amarillo, con vértices (J_1, A, D_2) , con ángulo de inclinación de 60° respecto al eje horizontal del geoplano. (ver Figura 7).

De forma analítica, se pueden comprobar distintos teoremas en el área de la Geometría, como el Teorema de Thales, en cuanto la semejanza de los triángulos que se encuentran uno al lado del otro, estableciendo la relación de semejanza entre varios triángulos. Por ejemplo:

$$\frac{F_2R}{DA_2} = \frac{AD'_1}{AL_1} = \frac{D'_1F_2}{DL_1} = \frac{RD_1}{VA_2}$$

También se puede apreciar las propiedades trigonométricas, en cuanto al $\sin(30^\circ)$ en el triángulo $\triangle ADF_2$ donde la longitud del cateto opuesto es de 0,57 igual en los lados F_2R con una longitud de 0,57 al cumplirse por razón de semejanza trigonométrica. La aplicación del geoplano como instrumento didáctico en la enseñanza de la Matemática, contribuyó a dos aspectos importantes de la educación: primero, facilitar la comprensión lógica y significativa de la Trigonometría; y segundo, facilitar la resolución de problemas para que así los estudiantes logren alcanzar de forma sucesiva el dominio de las propiedades y razones trigonométricas expuestas en el desarrollo de cada problema. De igual forma, en el transcurso de la investigación, esta herramienta permitió ejercitar la creatividad y destreza del estudiantado al instante de afrontar un problema, los cuales siempre fueron concebidos como temas únicos e inalcanzables que se encontraban solamente a la altura de los docentes, mas no de los estudiantes, fortaleciendo de esta manera la confianza en sí mismo.

Se puede hacer mención, en cuanto a la importancia del uso y aplicabilidad de la Matemática en todo instante para el ser humano, en especial para el estudiante universitario quien presenta un déficit en la resolución de problemas, en el cual, por medio de la explicación didáctica de la Geometría los estudiantes expresaron sentirse un poco más atraídos por la materia, al visualizar que pueden obtener conocimiento matemático de forma significativa con un instrumento factible; aplicándose el geoplano con el fin de motivar a los estudiantes y sientan la relación entre el tema brindado y su utilidad en la carrera de estudio, que no solo han de resolver, obtener o calcular un simple dígito, número o variable sin sentido o interpretación alguna.

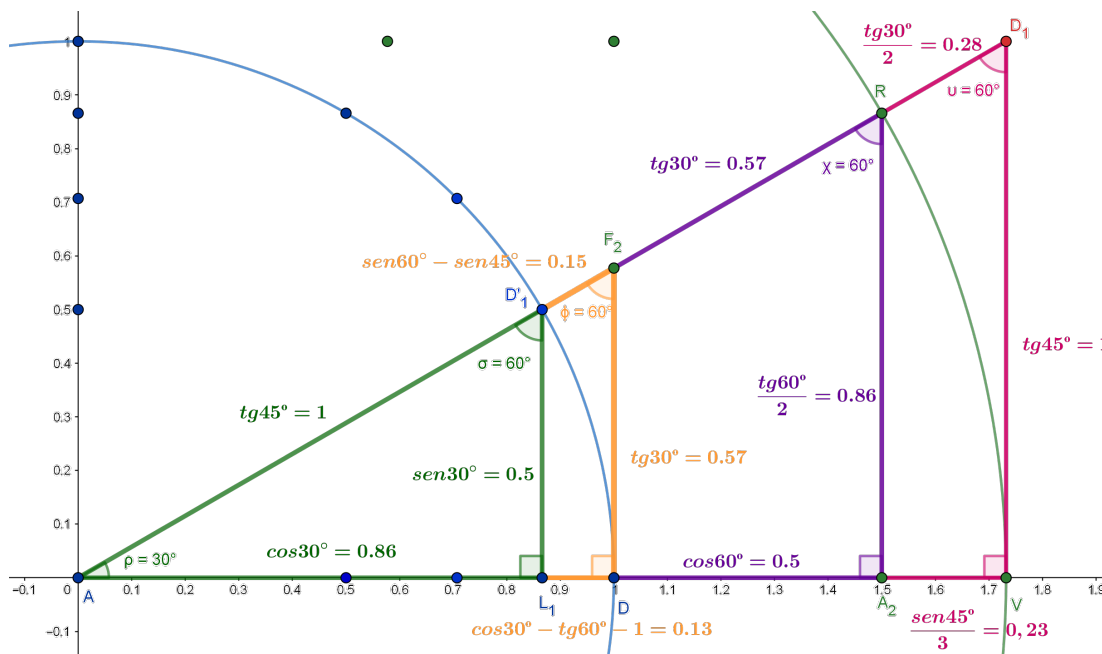


Figura 7: Formación de triángulos en el primer cuadrante del geoplano

El uso del geoplano facilitó la demostración triangular de las funciones trigonométricas, a favor de un menos uso de tiempo desarrollado en el aula de clases y la minimización de recursos materiales cotidianos; como el pizarrón acrílico y la construcción o representación de imágenes a

través de diapositivas, como se puede visualizar en la Figura 8.

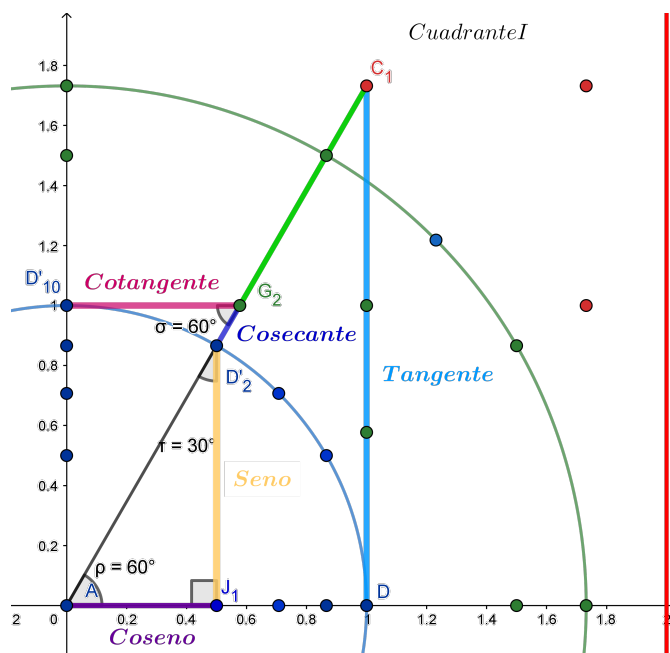


Figura 8: Representación del círculo y funciones trigonométricas

Al iniciar las actividades demostrativas de Trigonometría se visualizó el desinterés por los alumnos en el curso, donde en su mayoría, los estudiantes indicaban que en el bachillerato fueron temas incomprensibles y que acarrearán malos recuerdos. Cabe destacar que la mayoría de los estudiantes no recordaban las razones trigonométricas, la esencia o el significado y aplicación de dichas funciones, por lo que una herramienta didáctica, conlleva a eliminar la visión abstracta de la Matemática a un mundo sencillo y comprensible, sin apatías o temores que docentes han sembrado desde la educación secundaria.

6 Conclusiones y recomendaciones

6.1 Conclusiones

Diseñar y aplicar un instrumento didáctico para generar un cambio en la enseñanza de la Matemática a nivel universitario, fue el punto de inicio del desarrollo de esta investigación. Entre las principales áreas de la Matemática, la Geometría, representa ser una de las más intuitivas, demostrativas, sintetizadas y unidas a la realidad que se conoce. Por ello, el estudio brinda numerosas posibilidades para percatarse, mediante materiales accesibles y adecuados, los conceptos, propiedades y demostraciones de la Trigonometría. Por consiguiente, para Giroux en [8] el docente posee la responsabilidad de:

...discutir y analizar los objetivos educativos y las maneras de enseñar, basándose en las condiciones sociales, políticas y económicas particulares de los contextos institu-

cionales; todo ello es necesario para poder estar conscientes de la existencia de unas relaciones sociales y formas de conocimientos impregnadas de valores socios culturales, que legitiman estilos de vida.

En base al autor, un docente crítico constructivista, considera al estudiante como sujeto céntrico de su aprendizaje, que construye y fortalece el conocimiento, mediante la reflexión derivada de su propio compromiso. Desde otra arista epistémica de la docencia, al alumno es el único interprete del pensamiento matemático, con su creación de instantes didácticos y manipulación.

Se afina en el presente estudio que la aplicación de un geoplano circular como herramienta didáctica, desempeña y cumple con las posibilidades de la comprensión y resolución de problemas geométricos, en especial de la Trigonometría. Además, es de gran apoyo para el docente universitario, ya que facilita optimizar su labor andragógica. El instrumento permite a los estudiantes ser productores innovadores de sus propias concepciones matemáticas, de forma dinámica e imaginativa, como también les hace capaz de construir un nuevo conocimiento significativo del estudio de la Geometría.

De igual forma, se indaga en que los estudiantes y docentes desistan a un lado el sistema educativo academicista o tradicionalista, desarrollado solo con la realización de clases magistrales y solicitud de deberes continuos, para que se integren a la situación real y se pueda fomentar el estudio de la Geometría con un carácter didáctico, creativa y ameno, donde el estudiante logre desarrollar su creatividad y fortalecer sus capacidades mentales. Por lo tanto, se busca mejorar la educación superior, implementando material didáctico concreto para mejorar la calidad de enseñanza y aprendizaje dejando a un lado el conductismo.

En especial los estudiantes ostentaron su interés en que las asignaturas restantes de su carrera, sean impartidas con material factible y didáctico demostrativo para generar motivación, bien sea de tipo lúdico o de aplicabilidad, de igual manera expresaron su agrado por el presente modelo del geoplano, pues conjuntamente además de brindarles la circunstancia de conocer de un tema de Matemática de forma agradable, también se les permitió fortalecer sus conocimientos a través de las actividades en los cuales se les permitió desarrollar y estar al tanto de aplicaciones matemáticas que son de gran importancia en el que hacer humano. Además, reiteraron ser la primera vez que ven una asignatura de manera didáctica, razón por la cual, les fue de mucho agrado, recalcando que esta manera de enseñanza sea aplicada en las otras asignaturas.

6.2 Recomendaciones

Tras concluir la presente investigación, se recomienda exigir a los docentes universitarios de Matemática aplicar el uso de material didáctico en su desempeño académico, en especial el geoplano circular trigonométrico. Recordando la importancia del mismo para el estudio, demostración y conceptualización de las razones trigonométricas.

Enseñar al estudiante desde la educación básica a realizar justificaciones significativas y demostraciones de temas para que, desde un principio, se logre dispersar el desinterés, temor o fobia que presentan los estudiantes por la ciencia Matemática.

7 Agradecimientos

Quiero dar un especial agradecimiento a mi hijo Derling Isaac Mendoza Flores por darme la idea de modificar los geoplanos comunes y construir geoplanos más fáciles y manejables en temas tan

complejos para los estudiantes de educación básica y universitaria, motivándome así a realizar esta investigación.

Referencias

- [1] Arrieche, J.; La didácticas de las matemáticas educativas. Universidad Técnica Particular de Loja, UTPL, Simposio Internacional Universidad y Humanismo. Ecuador. 2008.
- [2] Ausubel, D. P.; *Aprendizaje significativo*. Círculo de Lectores, S.A. Barcelona, España. 1980.
- [3] Ausubel, D. P.; *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Editorial. Trillas. México. 1976.
- [4] Becerra, J.; *Funciones trigonométricas*. Universidad Nacional Autónoma de México. Disponible en: <http://dgenp.unam.mx/direccgral/secacad/cmatematicas/pdf/m5unidad02.pdf>. 2018.
- [5] Chiavenato, I.; La motivación es el interés que tiene el alumno por su propio aprendizaje o por las actividades que le conducen a él. Colombia. *Revista Eduteka*. 2006.
- [6] Corominas, J.; *Diccionario etimológico de la lengua castellana*. Editorial Gredos, Madrid. 1987.
- [7] Espinoza, N.; *Elaboración y uso adecuado del Geoplano, Origami y Geogebra como material concreto y tecnológico para mejorar el logro de aprendizajes en el dominio de Geometría en los estudiantes del segundo año sección "A" de la Institución educativa "Antonio Ocampo" – Curahuasi – Abancay, 2013-2015*. Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa Facultad de Ciencias de la Educación. Disponible en: <http://repositorio.unsa.edu.pe/bitstream/handle/UNSA/4857/EDessan.pdf?sequence=1>. 2015.
- [8] Giroux, H.; *Los profesores como intelectuales. Hacia una pedagogía crítica del aprendizaje*. Barcelona: Paidós. 1990.
- [9] Martínez, M. *Ciencia y arte de la metodología cualitativa*. México: Trillas. 2006.
- [10] Meyer, R.; *Metodología de la Investigación*. Bogotá – Colombia. Editorial Episteme. 2007.
- [11] Mora, D.; *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemáticas*. Bolivia: Campo Iris. 2005.
- [12] Peláez, A. Rodríguez, J. Ramírez, S. Pérez, L. Vázquez, A. y González, L. *Entrevista* Universidad Autónoma de Madrid. España. 2010.
- [13] Potoy, Y.; Poveda, S.; Alarcon, R.; Gomez, P.; Vilches Y. y Aleman, J. *Material didáctico para la enseñanza – aprendizaje de conceptos matemáticos. (el tangram y el geoplano)*. Universidad Nacional de Nicaragua. Departamento de Matemática. 2007.
- [14] Ricoy, M. *La prensa como recurso educativo*. Revista Mexicana de Investigación Educativa. México. 2005.

- [15] UPEL. *Manual de Trabajos de Grado y Maestría y Tesis Doctoral de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador*. Caracas, Venezuela: UPEL. 2012.
- [16] Vygotsky, L. *Psicología y Pedagogía*. Editorial Océano, S.L. Madrid – España. 1978.