

Potencial aproximado no-lineal de Debye para granos esféricos considerando los electrones como un fluido*

*Ricardo Pérez¹, Pablo Martín^{2**}, Enrique Castro² and Carlo Cereceda*

¹Instituto Universitario Tecnológico Región Capital, Apartado 40347, Caracas 1040 A, Venezuela. ²Universidad Simón Bolívar, Departamento de Física, Apdo. 89000, Caracas 1080A, Venezuela.

Recibido: 30-11-05 Aceptado: 10-04-06

Resumen

El Potencial de Debye no lineal, es considerado aquí para cargas esféricas positivas, tratando a los electrones como un fluido y los iones como partículas con distribución dada por el factor de Boltzmann. No hay solución analítica para la ecuación de Poisson correspondiente. Sin embargo, un aproximante cuasiracional en dos puntos se ha encontrado, el cual representa la solución de la ecuación diferencial con alta precisión. Los errores del aproximante dependen del parámetro de acoplamiento. Este problema ha sido tratado previamente para cargas puntuales en dos dimensiones. Nuestro aproximante recobra las soluciones aproximadas en los casos límites.

Palabras claves: potencial de Debye no lineal; aproximantes cuasi-racionales.

Approximated non-linear Debye potential for spherical grains with electrons as a fluid

Abstract

The non-linear Debye potential is considered here for positive spherical charges treating the electrons as a fluid and the ions as particles with distribution given by a Boltzmann factor. The solution of the corresponding Poisson equation cannot be solved analytically. However, a two-point quasi-rational approximant has been found, which represents the solution of the differential equation with high accuracy. The errors of this approximant depend of the coupling parameter. This problem has been treated previously for point charges in two dimensions. Our approximant recovers those approximated solutions in the corresponding limit case.

Key words: non-linear debye potential, quasi-rational approximants.

Introducción

Se estudiara el problema del potencial no lineal generado por un grano con carga positiva Z e inmerso en un plasmas de iones y electrones. Asumimos que la carga esta

distribuida uniformemente en la superficie esférica de radio R_0 .

Dado que el potencial de interacción con los electrones es negativo, y que da origen a un factor de Boltzmann con exponen-

* Trabajo presentado en el V Congreso de la Sociedad Venezolana de Física, Universidad del Zulia. Nucleo Punto Fijo - Edo. Falcón, Venezuela, Noviembre 2005.

** Autor para la correspondencia. E-mail: pmartin@usb.ve

cial positiva, es por eso que para la teoría no lineal no se puede asumir que dicha interacción es del tipo factor de Boltzmann y que hay que considerar otras hipótesis. Es así que en nuestro tratamiento consideramos a los electrones como un fluido neutralizante uniformemente distribuido. Para los iones la exponencial de factor de Boltzmann es negativa, y esta asunción es adecuada, es así como tenemos que la ecuación que rige este fenómeno es

$$\nabla^2 \varphi(r) = 4\pi z e n_0 [1 - \exp(-z e \varphi(r) / kT)] - \frac{Z e \delta(r - R_0)}{R_0^2}; \quad r \geq R_0, \quad [1]$$

esta ecuación es una generalización de un trabajo anterior en que se consideró una carga puntual central (1). El tratamiento del potencial de Debye no lineal en una dimensión es más simple (2-4).

Tratamiento Teórico

Similarmente al caso de una carga puntual, es conveniente definir el potencial auxiliar $V(r)$ como

$$\varphi(r) = \frac{Ze}{r} + V(r), \quad r \geq R_0 \quad [2]$$

y las cantidades adimensionales x , $\Phi(x)$, F y a como

$$x = \frac{r}{\lambda_D}, \quad \lambda_D^2 = \frac{k T}{4\pi n_0 z^2 e^2}, \quad F = \frac{Z z e^2}{\lambda_D k T}, \quad [3]$$

$$\Phi(x) = \Phi(r / \lambda_D) = \frac{z e V(r)}{k T}; \quad a = \frac{R_0}{\lambda_D}, \quad [4]$$

siendo F el "parámetro de acoplamiento". La nueva ecuación diferencial es

$$\nabla^2 \Phi(x) = 1 - \exp[-F/x - \Phi(x)] \quad [5]$$

$$\text{con las condiciones de borde } \Phi(a) = c_0 \quad [6]$$

$$-\varphi'(a) = \frac{Z e}{a^2}, \quad [7]$$

$$V(X) \rightarrow -(F/x), \text{ Cuando } x \rightarrow \infty \quad [8]$$

y c_0 es un valor a determinar, en la forma en que se detalla más adelante. Antes de proceder al análisis de los aproximantes es conveniente hacer nuevos cambios de variables, de manera que la región de interés de la variable independiente esté entre cero e infinito

$$s = \frac{x - a}{F}, \quad s_a = \frac{a}{F}, \quad [9]$$

$$\phi(s) = (s + s_a)\Phi[F(s + s_a)], \quad [10]$$

$$\phi''(s) = F^2(s + s_a)\Phi[F(s + s_a)]. \quad [11]$$

Aproximante para $\phi'(0)$:

Antes de estudiar un aproximante para $\phi(s)$ hay que encontrar un aproximante para $\phi'(0)$, o equivalentemente para c_0 puesto que

$$\Phi(a) = c_0 = s_a \phi'(0). \quad [12]$$

El análisis es un poco complicado, esencialmente hay que estudiar las expansiones en los límites $F \rightarrow 0$ y $F \rightarrow \infty$ y de la forma de estas expansiones se encuentra que

$$\phi'(0) \cong -\frac{F}{1+a}, \quad \phi(0) \cong -\frac{a}{1+a}, \quad \text{Para } F \ll 1, \quad [13]$$

$$\phi'(0) \cong -\frac{1}{2}(3F)^{2/3} + \frac{a^2}{2}, \quad \text{Para } F \gg 1 \quad [14]$$

El primer término de esta ecuación ha sido obtenido previamente por Salpeter (5). Teniendo en cuenta ambas estructuras se considera como un buen aproximante para cualquier F debe ser tal que en los límites $F \ll 1$ y $F \gg 1$ y $\phi'(0)$ se obtengan las formas señaladas arriba. Con esta idea en mente se ha escogido para $\phi'(0)$ la forma

$$\phi(s) = \phi(0) + \phi'(0)s + \frac{s_a b_0 F^2}{2} s^2 + \frac{b_1 F^2}{6} s^3 + O(s^4); \quad s \ll 1 \quad [15]$$

Aproximante para $\phi(s)$

En este caso hay que estudiar los límites $s \rightarrow 0$ y $s \rightarrow \infty$. En el límite $s \ll 1$, la solución $\phi(s)$ es:

$$\phi(s) = \phi(0) + \phi'(0)s + \frac{s_a b_0 F^2}{2} s^2 + \frac{b_1 F^2}{6} s^3 + O(s^4); \quad s \ll 1, \quad [16]$$

siendo

$$b_0 = 1 - \exp\left(-\frac{1 + \phi(0)}{s_a}\right); \quad \phi(0) = s_a \phi'(0), \quad [17]$$

$$b_1 = b_0 + \frac{1 - b_0}{s_a} [\phi(0)S_a - (1 + \phi(0))]. \quad [18]$$

Cuando $s \rightarrow \infty$, la ecuación diferencial se aproxima por

$$\phi''_{as}(s) = F^2 [1 + \phi(s)]; \quad \phi_{as}(s) = -1 + C \exp(-F s); \quad s \gg 1, \quad [19]$$

donde C es una constante de integración, y se ha impuesto la condición de borde $\phi(\infty) = -1$

La forma del aproximante cuasi-racional, tomando en cuenta ambos límites es

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + q_3 s^3}{1 + s^3} \exp(-F s) - 1 = g(s) \exp(-F s) - 1 \quad [20]$$

Los coeficientes q_1, q_2, q_3 y q_4 se obtienen expandiendo la ecuación [20] en serie de potencias hasta s^3 , e igualando a los coeficientes de la ecuación [16]. De esta manera se encuentra

$$q_0 = 1 + S_a \phi'_{ap}(0), \quad [21]$$

$$q_1 = \phi'_{ap}(0) + (1 + S_a \phi'_{ap}(0))F, \quad [22]$$

$$q_2 = \phi'_{ap}(0)F + \frac{1 + b_0 S_a + S_a \phi'_{ap}(0)}{2} F^2, \quad [23]$$

$$q_3 = 1 + S_a \phi'_{ap}(0) + \frac{b_1 + 3\phi'_{ap}(0)}{6} F^2 + \frac{1 + 3b_0 S_a + S_a \phi'_{ap}(0)}{6} F^3, \quad [24]$$

y se ha usado la aproximación $\phi'_{ap}(0)$ para $\phi'(0)$.

Resultados

Utilizando los valores previamente encontrados para $\phi(S)$, se determina el potencial de apantallamiento no lineal de la carga central o grano

$$\phi(r) = \frac{k T}{z e} \Phi[x(r)] = \frac{Z_1 e}{r} g\left(\frac{r - R_0}{\lambda_D}\right) \exp\left(-\frac{r - R_0}{\lambda_D}\right). \quad [25]$$

El máximo error relativo porcentual entre el aproximante $\phi(s)$ y el valor numérico obtenido por el método del disparo (shooting) de la ecuación diferencial exacta, se muestra en la tabla 1.

Las figuras 1 y 2, ilustran los potenciales y sus aproximaciones para distintos valores del parámetro de acoplamiento F y del radio de la carga central a. Como se puede observar de estas figuras, para estas escalas, las aproximaciones son casi indistinguibles de sus valores numéricos.

Conclusiones

Se han encontrado soluciones analíticas aproximadas para el potencial de Debye no lineal alrededor de una carga central no puntual. Las aproximaciones aquí encontradas son muy precisas y para cualquier valor del coeficiente de acoplamiento. Los máximos errores de los aproximantes aquí encontrados dependen del radio de la carga central y del coeficiente de acoplamiento. EL modelo usado es el de campo medio y se asume que la correlación entre partículas es poco importante. En este trabajo se extienden previos análisis para cargas puntuales a aquellas que son de tamaño finito, lo cual permitiría su aplicación a "dusty plasmas".

Tabla 1

Máximo error porcentual para diferentes parámetros de acoplamiento F . La columna de la izquierda y derecha son respectivamente, para tamaños adimensionales del grano $a=0.1$ y $a=1$.

$a=0.1$		$a=1$	
F	Máximo error porcentual	F	Máximo error porcentual
0,01	0,45%	0,01	1,17%
0,1	1,46%	0,1	2,79%
1	4,03%	1	1,73%
10	3,13%	10	1,42%
25	4,97%	25	1,51%
50	4,81%	50	1,57%
75	3,09%	75	3,6%
100	3,13%	100	2,85%

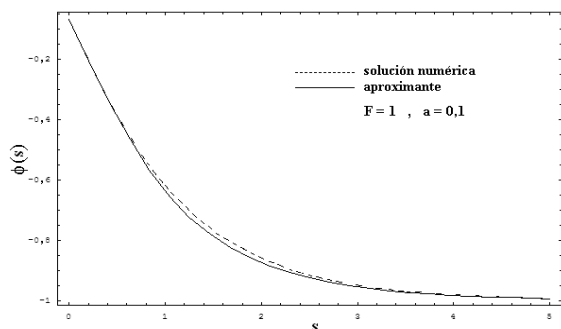


Figura 1. Potencial adimensional aproximado y numérico versus distancia adimensional para parámetro de acoplamiento $F=1$ y radio adimensional de la carga $a=0,1$. La curva superior es la solución numérica y la inferior es la solución analítica aproximada.

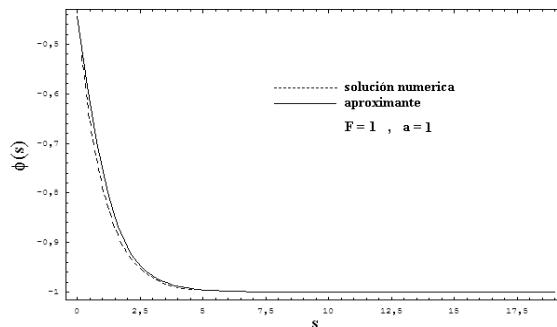


Figura 2. Potencial adimensional aproximado y numérico versus distancia adimensional para parámetro de acoplamiento $F=1$ y radio adimensional de la carga $a=1$. La curva inferior es la solución numérica y la superior es la solución analítica aproximada.

Referencias

1. PÉREZ R. and MARTÍN P. *Astrophysics and Space Science* 256: 263-268, 1998.
2. CLEMENTE R. and MARTÍN P. *J. Phys. Soc. Japn.* 61: 34-37, 1992.
3. PÉREZ R. and MARTÍN P. *Physics of Plasmas* 1: 2105-2109, 1994.
4. SALPETER, E.E. *Australian J. Phys.* 7: 353, 1954.