

Propagación causal de calor en esferas de polvo inhomogéneas en relatividad general

José Gerardo^{1*}, *Nelson Falcón*^{2,3} y *Williams Pitters*¹

¹*Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia, Apdo. 526. Maracaibo, Venezuela.* ²*Departamento de Física, Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad de Carabobo. Valencia, Venezuela.*

³*Centro de Astrofísica Teórica, Universidad de los Andes. Mérida, Venezuela.*

Recibido: 30-06-97 Aceptado: 06-04-99

Resumen

En el presente trabajo se estudia el comportamiento del flujo de calor en el interior de esferas de polvo inhomogéneas en el contexto de Relatividad General, para modelar el enfriamiento de sistemas estelares embrionarios y nebulosas oscuras. Empleando la ley de propagación causal de calor en la formulación dada por Triginert-Pavón se muestra que en una esfera inhomogénea, con densidad inversamente proporcional al radio $\frac{1}{r^k}$, el flujo térmico estará controlado por el valor del tiempo de relajación térmico, y que en consecuencia la luminosidad del glóbulo de polvo evoluciona de manera diferente aun para pequeñas variaciones de tiempo de relajación. Este trabajo representaría una primera aproximación en el estudio de la evolución de sistemas autogravitante de interés astrofísicos como por ejemplo, los globulos de Bok.

Palabras clave: Esferas de polvo; relatividad general.

Heat causal propagation in inhomogeneous dust spheres in general relativity

Abstract

In this work we study the behaviour of heat flux inside inhomogeneous dust spheres in General Relativity, in order to modeling cooling of early stelar systems and dark nebulaes. Using the causal propagation law of heat flux of Triginert-Pavon we show that, in a inhomogeneous dust spheres with density proportional to $\frac{1}{r^k}$, the termic flow will be controlated by the relaxation termic time, and in consequence, the luminosity of the the dust globule changes in different ways for small variations of the relaxation time. This work represents, in this way a first approach in the study of the evolution of self-gravitating systems, like Bok globules.

Key words: Dust spheres; general relativity.

1. Introducción

En las primeras etapas de la evolución de un objeto estelar, se cree que en general,

el estado inicial es altamente inhomogéneo, es por ello que en este artículo se considerará que la distribución de materia presenta esta característica. La clase de soluciones a

* Autor para la correspondencia.

las ecuaciones de campo de Einstein, más general que describen nubes de polvo esféricamente simétricas, independientes de la condición de inhomogeneidad, fue dada por Tolman (1), la cual fue posteriormente desarrollada y estudiada por Bondi (2). Como un caso particular de este tipo de soluciones es la obtenida por Oppenheimer-Snyder (3), quienes estudian una nube de polvo completamente homogénea con presión nula.

Sin embargo, estos modelos no incorporan la propagación de calor, esto es una característica importante a la hora de modelar las primeras etapas de formación estelar y la dinámica de nebulosas oscuras (como por ejemplo M16) existentes en el plano galáctico (4). Así, en el estudio de esferas relativistas radiantes, es usual suponer que el flujo de radiación (y de la conducción térmica) es proporcional al gradiente de temperatura y por lo general el flujo de calor viene dado por la ley de Maxwell-Fourier (5) ó Eckart (6) – Landau (7) en Relatividad General.

Sin embargo, la ley de Maxwell-Fourier es acausal ya que la misma, conduce a una ecuación parabólica para la temperatura (ecuación de difusión) que predice la velocidad de propagación de la perturbación térmica con velocidad infinita (8). Así, las formulaciones de Eckart y Landau presentan el mismo problema ya que son extensiones de ley de Maxwell-Fourier a la relatividad General (9).

El problema de la causalidad presente en la formulación de Maxwell-Fourier fue resuelto por Cattaneo (10) (en el marco de la teoría de los gases), quién consideró que el tiempo de relajación no es despreciable, de este modo, la formulación de Cattaneo establece que el flujo de calor comienza un tiempo τ , después de establecido el gradiente de temperatura. La versión relativista de la ley de Cattaneo, fue obtenida por Triginert-Pavón (11)

En el presente trabajo se estudiará una esfera no-homogénea $\rho = \rho(r)$, sin presión

(polvo), en la que se considera la propagación de calor bajo la ley de Cattaneo (causal), en su versión relativista dada por Triginert-Pavón, con ello se pretende encontrar una ecuación para el flujo de calor que permita describir la propagación del calor dentro de la esfera. En la sección 2, se presentan las ecuaciones de campo obtenidas al considerar una métrica simétricamente esférica y en un sistema comóvil de referencia con unidades geometrizadas ($G = c = 1$). En la sección 3 se presenta la solución de estas ecuaciones considerando que la densidad solo varía radialmente como $\frac{1}{r^k}$, se asume esta

condición con el fin de realizar, en primera aproximación, un estudio del fenómeno en un modelo estelar simple, además esta condición permite la resolución de las ecuaciones de una forma más directa. En la sección 4 se presentan los resultados obtenidos y una discusión de los mismos. Finalmente en la sección 5 se presentan las conclusiones del trabajo.

2. Ecuaciones de Campo

Se considerará que el espacio-tiempo será descrito por la métrica (12):

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad [1]$$

En el sistema comóvil de coordenadas, la cuadrivelocidad viene dada por:

$$u^\alpha = (e^{-\nu/2}, 0, 0, 0) \quad [2]$$

Se usará un tensor de energía-impulso con propagación de calor dado por:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu - P(u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}) - q_\mu u_\nu - q_\nu u_\mu \quad [3]$$

donde ρ es la densidad de masa-energía; P es la presión isotrópica y q_μ es el cuadrivector flujo de calor el cual cumple con la relación (13) $q_\mu = q \delta_\mu^1$.

Así las ecuaciones de campo son:

$$e^{-\lambda} \frac{1}{r^2} \frac{\lambda}{r} \frac{1}{r^2} = 8\pi\rho \quad [4]$$

$$e^{-\lambda} \frac{v}{r} \frac{1}{r^2} \frac{1}{r^2} = 0 \quad [5]$$

$$\frac{e^{-\lambda}}{2} v \frac{v^2}{2} \frac{v \lambda}{r} \frac{v \lambda}{2} = 0 \quad [6]$$

Una cuarta ecuación proviene de la ley de propagación de calor de Triginert-Pavón, esta ecuación se presenta, considerando el elemento de línea [1] como:

$$\tau e^{-\lambda/2} \frac{dq}{dt} \frac{\lambda}{2} q = q = T \quad [7]$$

Para determinar el gradiente de temperatura se usa el método propuesto por Herrera y Falcón (14) de modo que la ecuación [7] se convierte en:

$$\tau e^{-\lambda/2} \frac{dq}{dt} \frac{\lambda}{2} q = q_{MAX} \exp \left[-\frac{t}{d} \right] \quad [8]$$

donde se ha escogido la forma de un pulso gaussiano mostrado en la Figura 1 para el gradiente de temperatura.

En la siguiente sección se resolverá el sistema presentado por las ecuaciones [4-6] y la ecuación [8] para el caso de una esfera formada por un fluido sin presión (polvo) y con densidad variando como $\frac{1}{r^k}$.

3. Resolución de las Ecuaciones

De la ecuación [4] se obtiene:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r}, \quad [9]$$

donde

$$m = 4\pi \int_0^r r^2 \rho dr, \quad [10]$$

Por otro lado, la masa total de la esfera viene dada por:

$$M_T = \int_0^R \rho dV \quad [11]$$

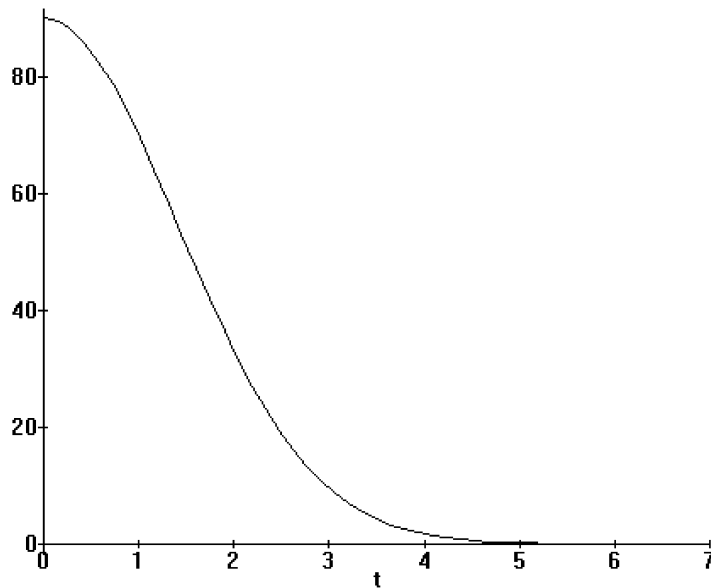


Figura 1. Flujo de calor q ($\text{g}/\text{cm}^2\text{-seg}$) para tiempo de relajación $\tau=0$ seg.

Ahora bien, como se mencionó anteriormente, se considerará que la densidad es de la forma:

$$\rho = \frac{B}{r^k} \quad [12]$$

Insertando la ecuación [12] en [11] se tiene:

$$M_T = \frac{4\pi}{(3-k)} R^{3-k} B \quad [13]$$

Así, de la expresión anterior se despeja el valor de B , el cual es insertado en la ecuación [12], ello permite encontrar la función m de la ecuación [10], de modo que de la ecuación [9] se obtiene el coeficiente métrico:

$$e^{-\lambda r} = 1 - 2 \frac{M_T}{R^{3-k}} R^{2-k} \quad [14]$$

Usando la expresión anterior y de la ecuación [5], se tiene:

$$e^{-\lambda r} = 1 - 2 \frac{M_T}{R^{3-k}} R^{2-k} \frac{1}{2-k} \quad [15]$$

Ahora de la ecuación [8], tomando en cuenta las expresiones [14] y [15], se tiene que el flujo de calor viene dado por la expresión:

$$\frac{dq}{dt} = Hq - q_{MAX} H \exp\left(-\frac{t-b}{d}\right)^2 \quad [16]$$

donde $H = \frac{e^{-\lambda R}}{\tau}$. En la siguiente sección se muestran los resultados obtenidos.

4. Resultados y Discusión

Al integrar la ecuación [22] y considerando que los tiempos estudiados son mucho mayores que el tiempo de relajación, se obtiene:

$$q(r, t) = H \frac{d\sqrt{\pi}}{2} q_{MAX} (t-b) H \frac{d^2}{4} q_{MAX} H^2 \quad [17]$$

Se evaluó la ecuación anterior en la superficie ($r = R$), a fin de observar como es el flujo de calor en dicho punto. Además se le dieron a las constantes q_{MAX} , b y d de la ecuación [16] los valores de 90, 0 y 2 respectivamente, ello se hizo con el fin de ilustrar el fenómeno estudiado.

En la Figura 2 se muestra el comportamiento de la ecuación [17] para un tiempo

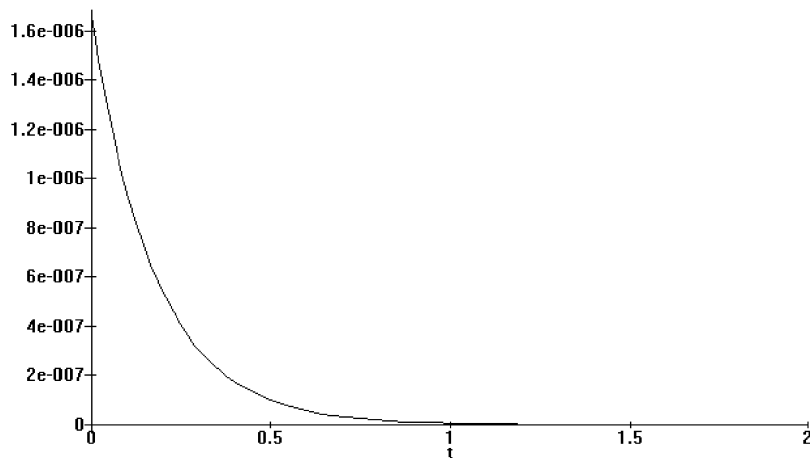


Figura 2. Flujo de calor $q \times 10^5$ (g/cm²-seg) para tiempo de relajación $\tau = 0,001$ seg.

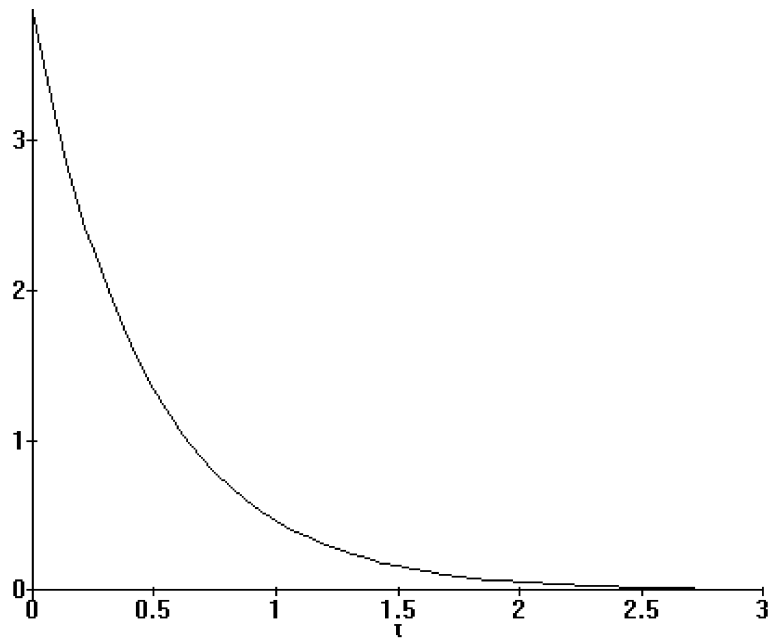


Figura 3. Flujo de calor q ($\text{g}/\text{cm}^2\text{-seg}$) para tiempo de relajación $\tau = 0,05$ seg.

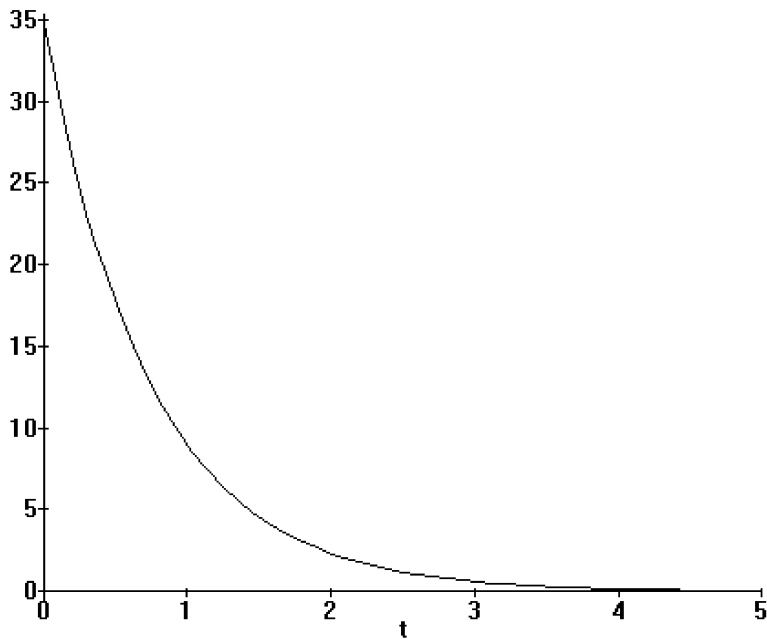


Figura 4. Flujo de calor q ($\text{g}/\text{cm}^2\text{-seg}$) para tiempo de relajación $\tau = 0,3$ seg.

de relajación $\tau = 0,001$ s y se observa que la cantidad de calor propagado en la esfera es menor en este caso que en el caso cuando se considera que el tiempo de relajación es nulo (Figura 1).

En las Figuras 3 y 4 se muestra el comportamiento del flujo de calor en la superficie para los tiempos de relajación $\tau = 0,05$ s y $\tau = 0,3$ s respectivamente. En cada caso se observa que la cantidad de calor propagado

a través de la superficie de la esfera aumenta con el tiempo de relajación, en comparación al caso donde el tiempo de relajación es nulo, la cantidad de calor propagada sigue siendo menor.

5. Conclusiones

Se obtuvo una expresión que describe el flujo de calor dentro de la esfera de polvo (ecuación [17]). Dicha expresión fue evaluada en la superficie para observar el enfriamiento de la misma. Se observa que al evaluar en la superficie de la esfera ($r = R$), el comportamiento del flujo de calor (ecuación [17]) es el mismo para cualquier valor de k . Por otro lado, se observa que el flujo de calor depende del tiempo de relajación como se mostró en las Figuras 2-4, el tiempo de enfriamiento del objeto aumenta con el tiempo de relajación, que el tiempo de enfriamiento de la esfera es directamente proporcional al tiempo de relajación, como era de esperarse.

Por otro lado, la cantidad de calor propagada a través de la superficie de la esfera, es proporcional el tiempo de relajación como se mostró en las Figuras 2-4, sin embargo en cada caso se observa que la cantidad de calor propagada es menor en comparación al caso cuando se considera que el tiempo de relajación es nulo, esto significa que a medida que el tiempo de relajación aumenta, la energía tarda más en llegar a la superficie de modo que la energía remanente contribuye al flujo total a través de la superficie.

Estos resultados podrían servir como primera aproximación al estudio de sistemas astrofísicos reales con propagación de calor, en particular esferas de polvo, tales como los globulos de Bok (15), que representan las primeras fases de la formación de estrellas.

Referencias Bibliográficas

1. TOLMAN R.C. *Proc Ntl Acad Sci* 20: 410-415, 1934.
2. BONDI, H. *Mon Not Astron Soc* 107: 343-350, 1947.
3. OPPENHEIMER J., SNYDER H. *Phys Rev* 107: 343-349, 1939
4. HANSEN C.J., KAWALES S.K. *Stellar Interior*, Springer-Verlag, New York (USA), pp. 162-260, 1993.
5. MENDL F. *Física Estadística*, Limusa, México (México), pp.156-232, 1979.
6. ECKART C. *Phys Rev* 58: 919-924, 1940.
7. LANDAU L., LIFCHITZ E.M. *Mécanique des Fluides*, Editions MIR, Moscou (URSS), pp 621-631, 1971.
8. JOSEPH D., PREZIOSI L. *Rev Mod Phys* 61: 41-73, 1989.
9. DI PRISCO A., FALCÓN N., HERRERA L., ESCULPI M., SANTOS N.O. Resultados no publicados.
10. CATTANEO C. *Atti Semin Mat Univ Modena* 3: 3-10, 1948.
11. TRIGINERT J., PAVÓN D. *Class Quantum Grav* 12: 689-698, 1995.
12. KRAMER D., STEPHANI H., McCALLUM M.A.H. *Exact Solutions of Einstein field Equations*, Cambridge University Press, Cambridge (England), pp. 272-324, 1980.
13. HERRERA L., LE DENMAT G., SANTOS N.O. *Mon Not R astr Soc* 237:257-268, 1989.
14. FALCÓN N. Propagación de calor por Ondas en escenarios Astrofísicos (Doctoral Theses). Universidad Central de Venezuela, Caracas (Venezuela), pp. 74, 1995.
15. SHU H. *The Physical Universe*, McGraw-Hill, New York (USA), pp. 192-230, 1978.