CIENCIA, 2(2) (1994), 75-85
Maracaibo, Venezuela

Procesos de Markov

Leida Thais González Villegas
Departamento de Matemáticas. Facultad Experimental de Ciencias
La Universidad del Zulia. Maracaibo 4011, Venezuela

Recibido: 11-02-94 Aceptado: 01-09-94

Resumen

En el estudio de los procesos de Markov surgen preguntas acerca de la existencia y unicidad de vectores de equilibrio y del comportamiento asintótico de dichos procesos. En el trabajo que presento a continuación se dan respuestas a esas inquietudes a través de las distintas formas del Teorema Fundamental de las Cadenas de Markov. En ellos veremos que todo proceso de Markov tiene un vector equilibrio y si el proceso es regular entonces el vector equilibrio es único y el proceso es asintóticamente estable.

Palabras claves: Asintóticamente estable: procesos de Markov; vector equilibrio.

Markov Processes

Abstract

In the study of Markov processes arise questions about the existence and uniqueness of equilibrium vectors and us the asymptotic behavior of such processes. The present work gives answers to these questions through the different forms of the Fundamental Theorem of Markov Chains. We'll see that every Markov process has an equilibrium vector and if the process is regular then the equilibrium vector is unique and the process is asymptotically stable.

Key words: Asymptotically stable; equilibrium vector: Markov process.

Introducción

Estocástico es sinónimo de *aleatorio*. Un proceso estocástico es un sistema que se desarrolla en el tiempo mientras que pasa por fluctuaciones al azar. Se puede describir un sistema así, definiendo una familia de v.a $\{X_t\}$ donde X_t mide, en el instante t, el aspecto del sistema en consideración. Por ejemplo; X_t podría ser el número de personas que hay en una cola en el instante t. Conforme transcurre el tiempo llegarán y saldrán personas, por lo tanto los valores de X_t cambiarán, a estos valores se le llamará *estados* del sistema y los cambios en el valor de X_t reciben el nombre de *transiciones* entre sus estados. Gráficamente podemos ver un proceso *estocástico* como una trayectoria. como muestra la Figura l.

Material y Métodos

Formalmente podemos definir un *proceso estocástico* como una familia de v.a $\{X_t\}$. donde t es un punto en un espacio T llamado espacio paramétrico y donde para cada $t \in T$. X_t toma valores en un espacio E llamado espacio de estados (1).

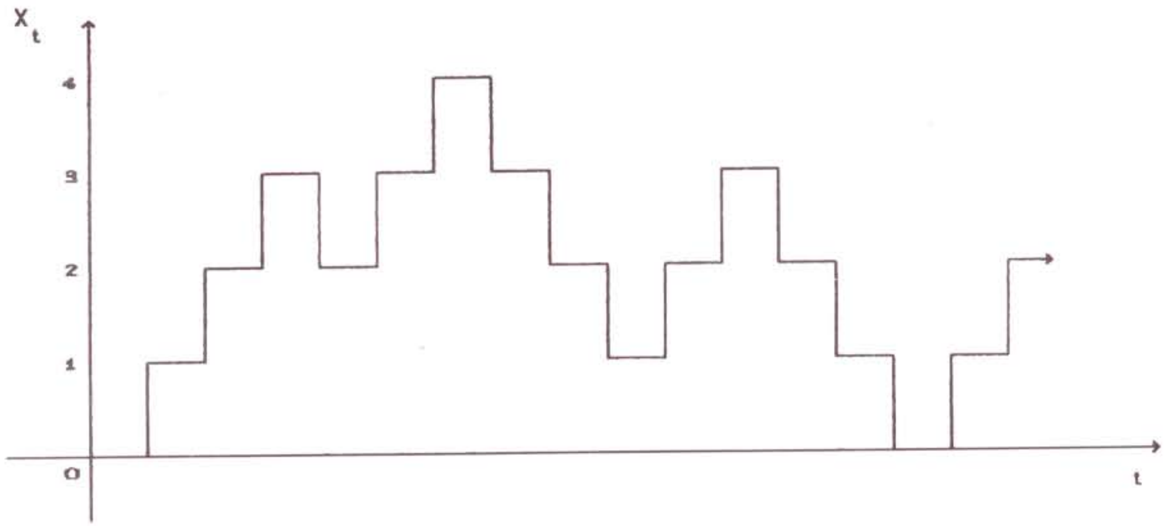

Figura 1. La figura describe un proceso estocástico donde X es el número de personas que hay en una cola en el instante t.

Considerando un conjunto de estados $E=\{E_0,E_1,E_2,\ldots\}$ y $\{X_t\}$, $t \in R$ una secuencia de v.a que toma valores en E. Un *proceso de Markov* es un proceso estocástico que cumple con la siguiente propiedad: Si $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{t+1}$ son elementos de E entonces

$$P\{X_{t+1}=x_{t+1} \mid X_t=x_t, X_{t-1}=x_{t-1},\ldots,X_0=x_0\}$$
$$=P\{X_{t+1}=x_{t+1} \mid X_t=x_t\}$$
$$\text{si } P\{X_t=x_t, X_{t-1}=x_{t-1},\ldots,X_0=x_0\} > 0.$$

Esta propiedad expresa que la evolución futura probabilística es determinada una vez que el pasado inmediato es conocido y es llamada *propiedad de Markov*. Una cadena de Markov es un proceso de Markov en el cual el espacio paramétrico de tiempo es discreto y el espacio de estado es contable.

Como hemos dicho anteriormente en las cadenas de Markov el resultado de cualquier ensayo depende del resultado del ensayo inmediatamente anterior (y sólo de él) entonces el resultado de un estado j ya no estará asociado con una probabilidad fija P_j, sino que a cada pareja (E_i,E_j) le corresponderá una probabilidad condicional P_{ij} llamada *probabilidad de transición* luego $P_{ij} = P\{X_{t+1}=j \mid X_t = i\}$ es la probabilidad de que en el instante t+1 el proceso se encuentre en el estado j dado que en el instante t el proceso se encontraba en el estado i. Si hay n estados entonces existen nxn probabilidades de transición P_{ij} que se arreglarán en una matriz llamada *matriz de probabilidades de transición*, denotada por:

$$P=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \ldots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \ldots & P_{2n} \\ \vdots & & & & \\ P_{n1} & P_{n2} & P_{n3} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

Es claro que P es una matriz cuadrada con elementos no negativos y sumas unitarias de las filas (2).

Como ejemplos de cadenas de Markov podemos considerar: Una caminata al azar unidimensional (2), una cola discreta (1), el problema de la genética de células (2).

A continuación presentaré el Teorema Fundamental de los Procesos de Markov (3), se verá en ellos la gran diferencia que hay entre la existencia y unicidad de puntos fijos y puntos asintóticamente fijos, pero antes veremos un teorema que garantiza la existencia de vectores de equilibrio en los procesos de Markov. Un *vector equilibrio o punto fijo* para un proceso de Markov P es un vector estocástico x tal que xP=x. Si la repetición iterada de los procesos de Markov aplicado a cualquier vector estocástico produce una secuencia de vectores que converge al único vector equilibrio de P decimos que P es *asintóticamente estable*. Esto nos lleva a realizarnos las siguientes preguntas, cuyas respuestas las encontraremos en las distintas formas del teorema fundamental de las cadenas de Markov:

i) ¿Cuándo un proceso de Markov tiene un vector equilibrio?

ii) ¿Cuándo un proceso de Markov tiene un único vector equilibrio?

iii) ¿Cuándo es un proceso de Markov asintóticamente estable?

Teorema Fundamental Débil

Todo proceso de Markov tiene un vector equilibrio.

Demostración: Sea P un proceso de Markov, demostraremos que la ecuación xP=x tiene una solución que es un vector estocástico; para ello es suficiente probar que la ecuación x(P-I)= 0 tiene una solución no trivial en la cual todas sus entradas son no negativas, puesto que podemos dividir por la suma de sus componentes y obtener asi una solución estocástica.

Considérese dos casos: Primero supongamos que una o varias filas de P tienen un 1 en la diagonal principal i.e $p_{ii}=1$ entonces el i-ésimo vector coordenado es un vector equilibrio para P. Para el segundo caso supóngase que ninguna de las entradas de la diagonal es 1. Entonces la matriz P-I cumple con las siguientes condiciones:

a) Cada entrada de la diagonal es negativa.

b) Todas las demás entradas son no negativas.

c) La suma de cada fila es 0.

Realizemos operaciones columna en P-I para ponerla en forma diagonal inferior donde todas las entradas fuera de la diagonal son no negativas y todas las entradas de la diagonal son no positivas y aquellas filas donde la entrada de la diagonal es igual a cero se colocan abajo. Logrando esta forma con r columnas de ceros tenemos que cada solución del sistema de ecuaciones es una combinación lineal positiva de r parámetros que podemos tomar iguales a 1. Luego dividiendo el vector resultante por la suma de sus componentes obtenemos la solución estocástica requerida. Para obtener esta forma trabajemos fila por fila cambiando todas las entradas a la derecha de la diagonal por ceros. Para la primera fila agreguemos $p_{1i}/-p_{11}$ veces la primera columna a la i-ésima columna. Ahora mostraremos que después de haber ejecutado esas operaciones la matriz obtenida por eliminación de la primera fila y la primera columna satisface las condiciones a), b) y c). Luego completamos el argumento por inducción. Para esto sea Q la matriz resultante de esas operaciones, e.g.,

$$q_{ij} = P_{ij} - \frac{P_{1j}}{P_{11}} \cdot P_{i1}$$

Puesto que la suma de cada fila de P-I es cero, i.e

$$\forall i = 1,2,\ldots,n \ \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 0$$

entonces

$$\sum_{i \neq j} p_{ij} = - p_{ii} \quad \forall i = 1,2,\ldots,n$$

luego

$$-p_{ii} \geq p_{i1} \text{ y } -p_{11} \geq p_{1i}$$

esto implica que

$$\left(-p_{ii}\right)\left(-p_{11}\right) \geq p_{i1} p_{1i} \longrightarrow \left(-p_{ii}\right) \geq \frac{p_{i1}}{\left(-p_{11}\right)} \cdot p_{1i}$$

entonces

$$0 \geq p_{ii} - \frac{p_{i1}}{\left(p_{11}\right)} \cdot p_{1i} = q_{ii}$$

luego $q_{ii} \leq 0$, cuando n > 2 se tiene que $-p_{ii} > p_{1i}$ entonces $q_{ii} < 0$ cumpliéndose así a).

Por otra parte si $i \neq j$ entonces

$$q_{ij} = p_{ij} - \frac{p_{i1}}{p_{11}} \cdot p_{1j} \geq p_{ij} \geq 0$$

dándose la condición b). Para la condición c) sabemos que la primera fila de P-Ies 0 entonces $\sum_{j=2}^{n} p_{1j} = -p_{11}$. Calculemos la suma de la i-ésima fila de Q

$$\sum_{j=2}^{n} q_{ij} = \sum_{j=2}^{n}\left(p_{ij} - \frac{p_{1j}}{p_{11}} \cdot p_{i1}\right) = \sum_{j=2}^{n} p_{ij} - \frac{p_{i1}}{p_{11}} \sum_{j=2}^{n} p_{1j} =$$

$$= -p_{i1} - \frac{p_{i1}}{p_{11}}\left(-p_{11}\right) = -p_{i1} + p_{i1} = 0$$

como se quería.

Continuando el proceso inductivamente y obteniéndose r columnas de ceros tenemos que una solución a la ecuación x(P-I)= 0 sería tomar las primeras n-r coordenadas iguales a cero y las r siguientes coordenadas iguales a 1 y luego dividiendo el vector por r se obtiene una solución estocástica.

Un proceso de Markov es *regular* si en alguna potencia de la matriz de transición P toda entrada es estrictamente positiva.

Teorema Fundamental de las Cadenas de Markov

Supóngase que P es la matriz de transición de una cadena de Markov regular. Entonces

i) *Hay un único vector estocástico* x *que satisface* xP=x.

ii) *Para cualquier vector estocástico* a *la secuencia* a,aP,aP^2,... tiende a x. *Esto es:* P *es asintóticamente estable.*

Demostración:

i) Sea P una matriz de transición de una cadena de Markov regular entonces para algún m todas las entradas de P^m son estrictamente positivas. Si P tiene un punto fijo es evidente que ese punto fijo también lo es de P^m. Por lo tanto si P^m tiene un único punto fijo entonces P tiene a lo más un punto fijo. Por el teorema anterior, P tiene a lo menos un punto fijo. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que todas las entradas de P son positivas (i.e trabajemos con P^m). Para n > 2 tenemos que $-p_{11} > p_{1i}$ $\forall i = 1,2,\ldots,n$ por lo tanto $q_{ii} < 0$ $\forall i = 1,2,\ldots,n$ entonces realizando operaciones columnas se tiene que las entradas por encima de la diagonal pueden llegar a ser cero excepto la esquina inferior derecha i.e. llegamos a la situación donde las últimas dos columnas contienen n-2 ceros seguido por -a,a y b,-b respectivamente, donde a y b son positivos. Luego sumando estas dos últimas columnas obtenemos que la n-ésima columna es cero entonces el espacio de solución para x(P-I)= 0 tiene dimensión 1 y el sistema tiene una única solución estocástica.

ii) Sea υ_0 el único punto fijo estocástico, sea H el hiperplano de vectores estocásticos. Considere el subconjunto

$$W = \{\upsilon - \upsilon_0 : \upsilon \in H\}$$

Trabajaremos con la norma definida por $\|y\| = \sum_{i \le n} |y_i|$ en R^n. Probemos que si todas las entradas de una matriz estocástica Q son estrictamente positivas y c es la más pequeña entrada en Q entonces para cualquier $w \in W$ se tiene $\|wQ\| \le (1-nc)\ \|w\|$. En efecto

$$wQ = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\, q_{i1}, \sum_{i=1}^{n} w_i\, q_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} w_i\, q_{in} \right)$$

Como la suma de las componentes de w es cero entonces

$$wQ = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \left(q_{i1} - c\right), \sum_{i=1}^{n} w_i \left(q_{i2} - c\right), \ldots, \sum_{i=1}^{n} w_i \left(q_{in} - c\right) \right)$$

luego

$$\|wQ\| = \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} w_i \left(q_{ij} - c\right) \right| \le \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left| w_i \right| \left(q_{ij} - c\right)$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \left| w_i \right| \sum_{j=1}^{n} \left(q_{ij} - c\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left| w_i \right| (1 - nc) = (1 - nc)\ \|w\|$$

W es invariante bajo Q. En efecto, dado $w \in W$ entonces

$$Qw = Q(\upsilon - \upsilon_0) = Q\upsilon - Q\upsilon_0 = Q\upsilon - \upsilon_0$$

ya que υ_0 es el punto fijo y el producto de matrices estocásticas es estocástica.

Veamos por inducción que para cualquier $w \in W$

$$\|wQ^k\| \le (1 - nc)^k\ \|w\|$$

Anteriormente se probó para k=1, supongamos que se cumple para k, probemos que es cierto para k+1. En efecto:

$$\|wQ^{k+1}\| = \|wQ^kQ\| \le (1 - nc)^k\ \|wQ\|$$
$$\le (1 - nc)^k\ \|w\|$$

Como la suma de los elementos de la fila donde está c es 1 y c es la menor entrada se tiene que $c \le 1/n$ por lo tanto $0 \le 1\text{-}nc < 1$ entonces $\|wQ^k\|$ converge geométricamente a 0 i.e.

$$\|wQ^k\| \le (1 - nc)^k\ \|w\| \longrightarrow 0 \text{ cuando } k \longrightarrow \infty$$

entonces

$$\| (\upsilon - \upsilon_0) Q^k \| \longrightarrow 0 \text{ cuando } k \longrightarrow \infty$$

pero υ_0 es fijo para Q y por tanto lo es para Q^k entonces la secuencia υ, υQ, υQ^2, υQ^3, ... tiende a υ_0.

Bastaría probarse que todas las entradas de Q son estrictamente positivas. En efecto: como P es regular entonces para algún m todas las entradas de P^m son estrictamente positivas entonces tomemos $Q = P^m$. Ahora probemos que para cualquier P estocástico y cualquier $w \in W$ $\|wP\| \le \|w\|$.

$$wP = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\, p_{i1}, \sum_{i=1}^{n} w_i\, p_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} w_i\, p_{in} \right)$$

$$\|wP\| = \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} w_i\, p_{ij} \right| \le \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left| w_i \right|\ p_{ij} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left|w_i\right| \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \left|w_i\right| = \|w\|$$

luego la secuencia $\|wP^m\|$ converge a 0 ya que esta es no decreciente y contiene una subsecuencia que converge a cero.

La regularidad es una condición suficiente pero no necesaria para que una cadena de Markov sea asintóticamente estable: ya que podemos encontrar procesos asintóticamente estables que no son regulares, como por ejemplo la siguiente matriz de probabilidades de transición asociada a una cadena de Markov:

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Podemos confundir la existencia de un único punto fijo estocástico de P con la condición que P es regular, i.e. la condición que P sea regular es una condición suficiente, mas no necesaria para que una cadena de Markov tenga un único punto fijo (3). Puede observarse también cadenas de Markov con más de un vector de equilibrio, como es el caso de una cadena con dos estados tal que la probabilidad de ir desde el estado 1 al estado 2 es 0 y viceversa. Entonces la matriz de probabilidades de transición P es la matriz identidad, luego todos los vectores de la forma (x,y) tal que $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $x + y = 1$ son vectores de equilibrio para P.

Consideremos el siguiente proceso de cola para observar, de manera práctica, todo lo expuesto anteriormente. LLegan unos clientes a un sitio de servicio, un solo dependiente atiende a los clientes. Durante cada periodo de tiempo un solo cliente es servido, si hay alguno esperando. Si no hay clientes en espera de servicio entonces durante ese período, el servicio no es ejecutado. Durante un nuevo periodo de servicio llegan más clientes, supóngase que en el intervalo de tiempo (n,n+1) llegan ε_n clientes, donde $\{\varepsilon_n\}$ es una sucesión de v.a. independientes y cuya función de distribución está dado por:

$$Pr\{\varepsilon_n=k\} = p_k;\ k= 0,1,2,\ldots;\ p_k \geq 0 \text{ y } \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

Si la v.a. X_n es el número de clientes presentes (incluyendo el que está siendo servido) en el instante n, entonces $\{X_n | n=0,1,2,\ldots\}$ es una cadena de Markov: en efecto, es claro que esta familia de v.a. es un proceso estocástico ya que el estado del sistema al comienzo de cada período está definido por el número de clientes esperando en la línea de servicio y este es discreto, el espacio paramétrico son los lapsos de periodo de tiempo de servicio. Ahora probemos que X_{n+1} sólo depende de X_n y ε_n y no de cualquier otra información anterior. Notemos que el número de clientes presentes en el instante n+1 es el número de clientes en el instante n, menos el que fue atendido en el instante n más el número de clientes nuevos que llegaron en el periodo de tiempo (n,n+1): es decir,

$$X_{n+1} = \left(X_n - 1\right)^+ + \varepsilon_n$$

donde $Y^+ = \text{máx}\ (Y,0)$. Por lo tanto

$$P_{0j} = Pr\{X_{n+1} = j \mid X_n = 0\} = Pr\{\varepsilon_n = j\} = p_j$$
$$j = 0,1,2,\ldots$$

Si $i \neq 0$ entonces

$$P_{ij} = Pr\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = Pr\{X_n - 1 + \varepsilon_n = j \mid X_n = i\}$$
$$= Pr\{\varepsilon_n = j - i + 1\} = \begin{cases} P_{j-i+1} & j = i-1, i, i+1, i+2, \ldots \\ 0 & j = 0,1,2,\ldots,i-2 \end{cases}$$

luego la matriz de probabilidades de transición es

$$
P = \begin{pmatrix}
P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\
P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & P_0 & P_1 & P_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & P_0 & P_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & P_0 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}
$$

Por el teorema fundamental débil tenemos que P tiene un vector de equilibrio. En efecto, consideremos el vector estocástico $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ tal que $xP = x$, resolviendo obtenemos

$$x_k = x_0 p_k + \sum_{i=1}^{k+1} x_i p_{k+1-i} \quad k = 0, 1, 2, \dots \qquad (*)$$

Asi tenemos un sistema de ecuaciones lineales infinito y podemos resolverlas sucesivamente para encontrar x en términos de x_0, entonces $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = 1$ dará el valor de x_0.

Definamos las siguientes funciones generatrices:

$$\mathscr{U}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k s^k \;\; \text{y} \;\; \mathscr{P}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

Sea $\nu = E(\varepsilon)$, multipliquemos la ecuación (*) por s^k y sumémosla desde $k = 0$ hasta ∞

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k s^k = x_0 \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k + \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{i=0}^{k+1} x_i \, p_{k+1-i} \Big) \, s^k$$

$$\mathscr{U}(s) = x_0 . \mathscr{P}(s) + \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{k+1} x_i \, s^i \, p_{k+1-i} \, s^{k+1-i}$$

$$\mathscr{U}(s) = x_0 . \mathscr{P}(s) + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{\infty} x_i s^i \sum_{r=k+1-i=0}^{\infty} p_r s^r$$

$$\mathscr{U}(s) = x_0 . \mathscr{P}(s) + \frac{1}{s} \left[\mathscr{U}(s) - x_0 \right] \mathscr{P}(s)$$

luego

$$\mathscr{U}(s) = \frac{x_0 (1-s) . \mathscr{P}(s)}{\mathscr{P}(s) - s}$$

$$1 = \mathscr{U}(1) = x_0 \lim_{S \to 1} \frac{(1-s) . \mathscr{P}(s)}{\mathscr{P}(s) - s}$$

$$= x_0 \lim_{S \to 1} \frac{- \mathscr{P}(s) + (1-s) . \mathscr{P}'(s)}{\mathscr{P}'(s) - 1} =$$

$$= x_0 \frac{(-1)}{\nu - 1} \quad \text{ya que } E(\varepsilon) = \mathscr{P}'(1)$$

de donde se tiene que $x_0 = 1 - \nu$. Por lo tanto

$$\mathscr{U}(s) = \frac{(1-\nu)(1-s) . \mathscr{P}(s)}{\mathscr{P}(s) - s}$$

Una solución de equilibrio seria si $\nu < 1$, es decir, si el número esperado de clientes $E(\varepsilon)$ que llegan durante un período de servicio es menor que 1 ya que si $\nu > 1$ implica que $x_0 = 0$ y por tanto $\mathscr{U}(s) = 0$ y si $\nu = 1$ se tiene que $x_0 < 0$ y no es una probabilidad, es este caso la longitud de la linea de espera incrementa sin límite.

Denotaremos con $p_{ij}^{(n)}$ la probabilidad de una transición del estado i al estado j realizada en, exactamente, n pasos. Esto equivale a la suma de las probabilidades de todas las trayectorias posibles de longitud n, que empiezan en el estado i y terminan en el estado j. En particular

$$p_{ij}^{(1)} = P_{ij} \;\; \text{y} \;\; p_{ij}^{(2)} = \sum_{\upsilon} p_{i\upsilon} p_{\upsilon j} \qquad [1]$$

Por inducción tenemos la fórmula de recursión

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{\upsilon} p_{i\upsilon} p_{\upsilon j}^{(n)} \qquad [2]$$

una nueva inducción sobre m nos conduce a la identidad básica

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{\upsilon} p_{i\upsilon}^{(m)} p_{\upsilon j}^{(n)} \qquad [3]$$

llamada ecuación de Chapman-Kolmogorov, que refleja el hecho de que los primeros m pasos conducen desde el estado i hasta algún estado intermedio υ y que la probabilidad de un paso posterior del estado υ al estado j no depende de la forma en que se haya alcanzado el estado υ. Al igual que las p_{ij} forman la matriz P, las $p_{ij}^{(n)}$ forman la matriz P^n, donde P^n es la n-ésima potencia de P.

La relación "j es accesible a i", escrita i ——> j significa que se puede llegar al estado j desde el estado i en algún número de pasos posibles o igual a cero, i.e. si existe algún $n \geq 0$ tal que $P_{ij}^{(n)} > 0$. Por ejemplo en una caminata al azar irrestricta, se puede llegar a cada estado desde cualquier otro pero desde una barrera absorbente no se puede llegar a ningún otro estado. Se dice que dos estados i y j se comunican si j es accesible a i e i es accesible a j y se escribe i <——> j (4). Esta relación de comunicación (accesibilidad) es una relación de equivalencia.

Un conjunto C de estados es *cerrado* si no se puede llegar a ningún estado que no esté en C, desde cualquier otro estado que esté en C. Para un conjunto arbitrario C de estados, al menor conjunto cerrado que contiene a C se le llama *cerradura de* C (2). A un solo estado k que forma un conjunto cerrado se le llamará *absorbente*, el estado k es absorbente sii $p_{kk} = 1$. Una cadena de Markov P es *irreducible* si tiene una única clase de accesibilidad, i.e: si no existe ningún otro conjunto cerrado que no sea el conjunto de todos los estados. En otras palabras una cadena de Markov es irreducible sii a todo estado se puede llegar desde cualquier otro estado.

Hay una importante distinción que nos permite caracterizar los procesos de Markov irreducibles que son asintóticamente estables (3). También se dice que el proceso es irreducible si para cada par i y j hay una potencia n tal que $p_{ij}^{(n)} > 0$. Esto es regular si hay un solo n tal que $p_{ij}^{(n)} > 0$ para todo i y j. El *período* de un estado i es el máximo común divisor de los k tales que $p_{ii}^{(k)} > 0$. Si el período es 1 decimos que el estado es *aperiódico*.

Teorema

Sea P *un proceso de Markov irreducible, sea* i *un estado de* P *con periodo* d(i). *Si* i ——> *i entonces* $p_{ii}^{(kd)} > 0$ *para todos los enteros* $k \geq N_0 (= N_0(i))$.

Demostración: Supóngase $p_{ii}^{(kd)} > 0$; $p_{ii}^{(sd)} > 0$. Entonces

$$p_{ii}^{[(k+s)d]} \geq p_{ii}^{(kd)}\, p_{ii}^{(sd)} > 0$$

De aquí los enteros positivos {kd} tal que $p_{ii}^{(kd)} > 0$ forman un conjunto cerrado bajo la adición y su máximo común divisor es d. Como i ——> i entonces existe N_0 (i) ≥ 0 tal que $p_{ii}^{(N_0)} > 0$ y $d|N_0$ (i) luego $p_{ii}^{(kd)} > 0$ $\forall k \geq N_0$ (i).

Teorema:

Sea P *un proceso de Markov irreducible y sea* i *un estado fijo del conjunto de estados de* P. *Entonces para todo estado* j *hay un único entero* r_j *en el rango* $0 \leq r_j \leq d$ *tal que:*

a) $p_{ij}^{(s)} > 0$ *implica* $s \equiv r_j$ (mod d) y

b) $p_{ij}^{(kd+r_j)} > 0$ *para* $k \geq N(j)$.

Demostración:

a) Sea $p_{ij}^{(s)} > 0$ y $p_{ij}^{(r_j)} > 0$. Existe un t (por ser P irreducible) tal que $p_{ij}^{(t)} > 0$ de donde

$p_{ii}^{(s+t)} > 0$ y $p_{ii}^{(r_j+t)} > 0$ luego d|s+t y d|r_j +t y así d|s-r_j por lo tanto $s-r_j \equiv 0$ (mod d). Así $s \equiv rj$ (mod d) lo que prueba a).

b) Como i ——> i y por a) existe un entero positivo m tal que $p_{ij}^{(md+r_j)} > 0$. Sea $N(j) = N_0 + m$, donde N_0 es el número garantizado por el teorema anterior, para el cual $p_{ij}^{(sd)} > 0$ para $s \geq N_0$. De aqui si $k \geq N(j)$ $kd + r = sd + md + r_j$ donde $s \geq N_0$. Además $p_{ij}^{(kd+r_j)} \geq p_{ii}^{(sd)}\ p_{ij}^{(md+r_j)} > 0$ para todo $k \geq N(j)$.

El siguiente lema nos permite extender esas definiciones de estados para procesos y expone parte de los procesos regular en el caso irreducible. Sobre las bases de la parte a) del lema llamaremos un proceso de Markov irreducible periódico si cada estado es periódico y aperiódico de otro modo (4).

Lema:

Sea P *un proceso de Markov irreducible.*
a) Todo estado de P *tiene el mismo periodo.*
b) P *es aperiódico sii* P *es regular.*

Demostración:
a) Sean i y j dos estados arbitrarios de un proceso de Markov irreducible P entonces a todo estado se puede llegar desde cualquier otro, por lo tanto existen enteros r y s tales que $p_{ij}^{(r)} > 0$ y $p_{ji}^{(s)} > 0$. Entonces por [3] tenemos

$$p_{ii}^{(n+r+s)} = \sum_{k,l} p_{ik}^{(r)}\ p_{kl}^{(n)}\ p_{li}^{(s)} \geq p_{ij}^{(r)}\ p_{jj}^{(n)}\ p_{ji}^{(s)}$$

donde i,j,r y s son fijos mientras que n es arbitrario. Si el estado i tiene periodo t entonces para n=0 $p_{ij}^{(r)}\ p_{ji}^{(r)} > 0$ y así r + s es múltiplo de t. Pero $p_{ii}^{(n+r+s)} = 0$ a menos que n sea múltiplo de t y así el estado j tiene periodo que es múltiplo de t. Intercambiando los papeles de i y j resulta que el periodo del estado i es múltiplo del periodo del estado j y por lo tanto estos estados tienen el mismo periodo.

b) $\rightarrow$) Supóngase que P es un proceso de Markov irreducible aperiódico entonces el periodo de los estado de P es 1, por teorema hay un $k \geq N(j)$ tal que $p_{ij}^{(k)} > 0$.

Sea $N^* = \max\limits_{i,j} N(i,j)$ entonces $p_{ij}^{(r)} > 0$; $k \geq N^*$ para todo i,j i.e $P^k > 0$ para $k \geq N^*$, por lo tanto P es regular.

$\leftarrow$) Supóngase que P es regular entonces para cualquier estado i fijo existe un n tal que $p_{ii}^{(n)} > 0$, entonces $p_{ii}^{(n+1)} > 0$ luego el máximo común divisor de n y n + 1 es 1, i.e P es aperiódico.

Decimos que una clase de accesibilidad es una clase absorbente si ningún estado fuera de la clase es accesible a cualquier miembro de la clase. Si el proceso de Markov tiene más de una clase absorbente el proceso no es asintóticamente estable. Además si la restricción de la clase absorbente es periódica, el proceso tampoco es asintóticamente estable. El único caso restante, la restricción de la clase absorbente es regular. En este caso P es asintóticamente estable. El siguiente teorema resume esta situación (4).

Teorema:

Sea P *un proceso de Markov con una única clase absorbente. Un ordenamiento adecuado de las filas de* P *produce la siguiente forma canónica*

$$\begin{pmatrix} R & O \\ S & Q \end{pmatrix}$$

Si la restricción de la clase absorbente es regular entonces R *es regular y el proceso es asintóticamente estable. De lo contrario* P *no es asintóticamente estable.*

Demostración: De la fórmula de recursión [2] se tiene que

$$P^k = \begin{pmatrix} R^k & O \\ S_k & Q^k \end{pmatrix}$$

donde

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} Q^i S R^{k-(i+1)} = \sum_{i=0}^{k-1} Q^{k-(i+1)} S R^i$$

Examinemos esta matriz cuando k —> ∞. Sea M= R - υ_0; donde υ_0 es el único vector equilibrio (garantizado por el teorema fundamental de Markov) entonces $M^i = R^i - \upsilon_0$.

Por el teorema fundamental de Markov, como R es regular, sabemos que cada elemento de M^i está acotado por $K_1\rho^i$ para algún $K_i > 0$ y $0 < \rho^i < 1$ independiente de i, para todo i.

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} Q^{k-(i+1)} S\left(\upsilon_0 + M^i\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} Q^{k-(i+1)} S\upsilon_0 + \sum_{i=0}^{k-1} Q^{k-(i+1)} SM^i \qquad [*]$$

Sea q la mayor entrada de Q y q_i la suma de la i-ésima fila de Q entonces la entrada (i,j) de Q^n es acotada por $q_i^n q$ —> 0, cuando n —> ∞ luego cada elemento de Q^i es acotado por $K_2\rho_2^i$ para algún $K_2 > 0$ y $0 < \rho_2 < 1$ independiente de i, para todo i. Luego cada componente de la matriz derecha de (*) es acotada por $K_3 \sum_{i=0}^{\infty} \rho_2^{k-(i+1)} \rho_1^i$ para algún $K_3 > 0$ y eso tiende a 0 cuando k —> ∞. Por lo tanto cuando k —> ∞ se tiene que:

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \sum_{i=0}^{\infty} Q^i S\upsilon_0 = (I-Q)^{-1} S\upsilon_0 = (I-Q)^{-1}\,(I-Q)\upsilon_0 = \upsilon$$

como se quería.

Anteriormente dijimos que un estado absorbente de una cadena de Markov es uno tal que una vez que el proceso entra en él no puede salir. Un estado que no es absorbente se llama *transitorio*, i.e. un estado i es transitorio si $p_{ii} < 1$. Un proceso de Markov absorbente es un proceso con al menos un estado absorbente tal que cada estado absorbente es accesible a cada estado transitorio (esto es, si el estado i es transitorio y el estado j es absorbente en alguna potencia de P la entrada (i,j) es estrictamente positiva).

Teorema de los Procesos Absorbentes

La matriz de un proceso de Markov absorbente puede ponerse en la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} I & O \\ R & Q \end{pmatrix}$$

donde I *es la matriz identidad y* I - Q *tiene una inversa* N. *Las filas de* NR *dan la probabilidad de pasar eventualmente del estado transitorio indicado por la fila de* N *al estado absorbente indicado por la columna de* R.

Demostración: La forma de P es obtenida reagrupando la matriz de transición de tal forma que haya cuatro submatrices o bloques, donde los estados absorbentes se encuentran en la esquina superior izquierda y los estados transitorios en la esquina inferior derecha. Calculemos P^n: por la fórmula de recursión [2] se tiene que:

$$P^n = \begin{pmatrix} I & O \\ (I+Q+Q^2+\ldots+Q^n)R & Q^n \end{pmatrix}$$

Usando la versión matricial de la suma de una serie geométrica tenemos:

$$I + Q + Q^2 + Q^3 + \ldots = \frac{1}{I-Q} = N$$

llamada matriz fundamental de la cadena absorbente, luego la esquina inferior izquierda de P^{∞} es NR, Q es una matriz de números no negativos menores que 1. Por el mismo argumento usado en el teorema anterior se tiene que la entrada (i,j) de Q^n es acotada por $q_i^n q$. Así Q^n tiende a la matriz 0 luego

$$P^{\infty} = \begin{pmatrix} I & O \\ NR & O \end{pmatrix}$$

y por lo tanto las filas de NR dan la probabilidad de pasar de un estado transitorio dado por una fila de N a un estado absorbente dado por una columna de R.

Resultados y Discusión

Un proceso estocástico o aleatorio es un sistema que sufre a través del tiempo cambios de estados o transiciones aleatorias.

Los procesos de Markov son procesos estocásticos en los que el desarrollo futuro depende solamente del estado actual del sistema y no de su historia anterior ni de la manera como se haya alcanzado el estado actual. Las cadenas de Markov son procesos de Markov donde sólo intervienen una cantidad numerable de estados y depende de un parámetro discreto de tiempo.

Todo proceso de Markov P tiene un vector equilibrio i.e. un vector estocástico x tal que xP=x. Si P es la matriz de transición de una cadena de Markov regular entonces P tiene un único vector equilibrio y además P es asintóticamente estable. El reciproco no es cierto puesto que podemos encontrar cadenas de Markov que tienen un único vector equilibrio y no son regulares o también cadenas de Markov que son asintóticamente estables mas no regulares.

En los procesos de Markov irreducible todos los estados tienen el mismo periodo y el proceso es aperiódico si y sólo si es regular.

Agradecimientos

A Hebert Nieto y a Stella Brassesco por la gran colaboración y paciencia prestada, para la elaboración del manuscrito.

Referencias Bibliográficas

1. COLEMAN R.: *Procesos Estocásticos*. Limusa. México, 1976, pp.7-15.
2. FELLER W.: *Introducción a la Teoria de Probabilidades y sus Aplicaciones*. Vol. 1. Limusa-Wiley, S.A. México, 1973, pp. 373-405.
3. BALDWIN J.: On Markov Processes in Elementary Mathematics Courses. *Amer Math Monthly* 96:147-153, 1989.
4. SENETA E.: *Non Negative Matrices*. John Wiley & Sons. New York (USA), 1973, pp. 1-20, 84-99.