CIENCIA 21(1), 5 - 13, 2013
Maracaibo, Venezuela

Cosmología con campos escalares y ecuación de estado no-local (EEnL)

José Gerardo Caldera[1], *David Sierra Porta*[1,2,*] *y Carlo Guerrero*[1,2]

[1]*Laboratorio de Astronomía y Física Teórica.* [2]*Laboratorio de Campos y Partículas. Departamento de Física. Facultad Experimental de Ciencias. Universidad del Zulia. Maracaibo 4001, Venezuela.*

Recibido: 16-11-11 Aceptado: 19-02-13

Resumen

Se hallan modelos cosmológicos que describen la dinámica del Universo. Se utiliza como teoría básica la formulación Escalar-Tensorial de la Gravedad (TETG), esta formulación provee una buena alternativa a la teoría de la Relatividad General, además explica de manera satisfactoria el comportamiento del Universo en etapas tempranas. Para resolver las ecuaciones se usará una Ecuación de Estado Nolocal (EENL), esto permite establecer un modelo modificado del universo. Se propone una acción del tipo Brans-Dicke con constante cosmológica, y un elemento de línea que posee simetría esférica y sólo posee dependencia radial en los coeficientes métricos. Se obtienen modelos de Universo oscilante correspondientes con aquellos embebidos en espacios del tipo AdS, asimismo se obtienen modelos de Universos en expansión acelerada que muestran comportamiento asintótico de las funciones densidad y presión correspondiente con las observaciones.

Palabras clave: ecuación de estado no-local, escalar-tensor, cosmología.

Cosmology with scalar fields and non-local state of equation (NLSE)

Abstract

We obtain cosmological models that describe the dynamics of the Universe. It is used as basic theory Scalar-Tensor formulation of gravity (TETG), this formulation provides a good alternative to the theory of general relativity also explains satisfactorily the behavior of the universe in its early stages. A noLocal equation of state (EENL) is used to solve the equations, this allows for a modified model of the universe. We propose a Brans-Dicke type action with cosmological constant, and a line element that has spherical symmetry and has only radial dependence in the metric coefficients. Models are obtained for oscillating universe with those embedded in AdS type spaces also obtained expanding universe model showing accelerated asymptotic behavior of the density and pressure functions for the observations.

Keywords: non-local equation of state, escalar-tensor, cosmology.

* Autor para la correspondencia: sierraporta@gmail.com

1. Introducción y motivación

La Relatividad General (RG), a través de los años, ha sufrido extensiones interesantes en el transcurso de su estudio. Algunas veces a la teoría se le ha modificado y se le ha añadido información adicional para hacerla más completa y/o añadir la descripción de correcciones y objetos que tradicionalmente quedan fuera de su ámbito de estudio. Una de las tantas extensiones interesantes de la teoría de la RG son las llamadas teorías de gravedades escalares-tensoriales. Estas incorporan en su descripción campos escalares como mediadores de las variaciones e interacciones del espacio-tiempo a través de cantidades escalares que tradicionalmente son asumidas constantes en Relatividad General. Estos escenarios son ricos por una razón importante: representan escenarios naturales en los cuales es posible explorar y probar las consecuencias de variar las constantes "naturales", es decir, variar dentro de parámetros razonables, la constante *G* de Newton, la constante de Sommerfeld de estructura fina α, por mencionar algunos ejemplos.

Este punto de vista ha sido rescatado la por sus principales pioneros, P. Jordan 1959 entre otros (1), en la cual se establecen estos escenarios como generalizaciones de la RG, posteriormente refinada años más tarde por Brans y Dicke en 1961 (2), en la cual una constante de acoplamiento de los campos escalares a gravitación, ω, da cuentas de variaciones de la constante universal *G*. El caso de las teorías de Brans-Dicke es justamente considerado como el caso más simple de las TETG.

Un interés importante para el estudio de estos escenarios proviene del hecho de que en el contexto de reducciones dimensionales (3), constantemente aparecen dilatones minimalmente acoplados a gravedad como una consecuencia del procedimiento de reducir dimensionalmente teoría a altas energías y dimensiones altas.

Estudios mucho más laboriosos y extensivos de han sido hechos en aras de encontrar soluciones cosmológicas a TETG (4) en la cual la atención se dirige en dos sectores. En el primero, se restringen las soluciones cosmológicas exactas a sistemas de gravitación de expansión isotrópica con curvatura espacial nula. El segundo, describiendo cosmologías espacialmente homogéneas. Esto significará luego que la constante universal *G* depende en el tiempo lo cual es requerido en algunos tipos de universos.

En todos estos escenarios, sin embargo, ampliamente estudiados, se introducen como requerimientos propios del cierre del sistema de las ecuaciones de movimiento de Eisntein, como es natural, Ecuaciones de Estado, siendo del tipo

$$p = \omega\rho, \qquad [1]$$

donde p es la presión y ρ la densidad respectivamente para el fluido cosmológico considerado en la teoría, mientras que el valor de este parámetro, ω, determina el modelo de universo que se pretende modelar, por ello se asume de antemano el valor de este parámetro. Usualmente se consideran los valores ω=1/3 para señalar que el tipo de material es un gas diluido radiante, o ω=0 para el caso de que la materia está conformada por una distribución de un material sin presión (polvo). Pese a ser estos valores los más comunes, no quiere decir que son los únicos valores que permiten obtener modelos de universo.

Para los modelos conocidos más simples se tiene primeramente que asumir que el universo es isótropo y homogéneo (estas premisas son apoyadas por la observación) de modo que el espacio-tiempo puede ser descrito por el siguiente elemento de línea (5)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2_{(2)}\right] \qquad [2]$$

donde *k* geométricamente describe la curvatura espacial y *a(t)* es el factor de escala.

Ahora bien de las ecuaciones de campo de Einstein para la Cosmología se tiene

$$R_{ab} - Rg_{ab} = 8\pi G T_{ab'} \quad [3]$$

el tensor de energía-impulso T_{ab} considerado es el que describe una distribución de fluido perfecto esto es (6):

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b + p\eta_{ab}, \quad [4]$$

donde u_a es la cuadrivelocidad del fluido, ρ es la densidad de energía en el marco de referencia del fluido en reposo, *p* es la presión del fluido en ese marco de referencia y $\eta_{ab}=diag(-1,+1,+1,+1)$. Así se consigue que la ecuación de Friedmann-Roberson-Walker (FRW) que describe la dinámica del sistema es

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G \sum_i (\rho_i + 3p_i) \quad [5]$$

además de

$$\rho(a) = a(t)^{-3(1+\omega)} \quad [6]$$

de tal manera que asumiendo que la densidad es constante se obtiene una relación del factor de escala, así:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}} \quad [7]$$

El siguiente manuscrito está estructurado básicamente como sigue. En la sección 2 se presentan las ecuaciones para el modelo considerado en una clase particular de TETG. Para fijar las ideas, se resuelven las ecuaciones de movimiento de Einstein dando lugar a soluciones cosmológicas exactas siempre para algunos valores de los parámetros métricos considerados. Se usa una ecuación de estado no local para describir las nuevas familias de soluciones cosmológicas que involucran no localidad para la función de estado, se analizan y se discuten las soluciones. Por último, los resultados y conclusiones se presentan en la sección 3.

2. El modelo

Como es usual, clásicamente se describe el comportamiento de un conglomerado de materia, dividiéndola en partes pequeñas (infinitésimos de materia) y estudiando el comportamiento de este elemento, asumiendo que todas las leyes de la física son válidas para este trozo. Asimismo, la influencia que puede ejercer el resto del material circundante en la dinámica del movimiento del elemento es despreciada.

En otras palabras, la interacción que puede ejercer el material ubicado a mayor distancia del elemento estudiado, también es ignorada (7). Es en los años 60 que se empiezan a considerar los efectos del material circundante sobre el elemento de materia estudiado estas ideas se desarrollan en el marco de la *Nonlocal Continuum Mechanics* (8), estas ideas se aplican en gran cantidad de áreas donde es común que los efectos no locales determinan el comportamiento macroscópico de la materia.

En RG, ecuaciones de este tipo se han usado para obtener modelos de objetos compactos (9, 10). A continuación se plantea usar una ecuación de estado formal del tipo extendido, en el sentido anterior, para obtener un modelo cosmológico que incorpore los efectos no locales sobre las variables dinámicas que describen el comportamiento del universo. La ecuación de estado no local se presenta como (7, 11)

$$P_r(r) = \rho(r) - \frac{2}{r^3}\int_0^r \bar{r}^2 \rho(\bar{r}) d\bar{r} + \frac{c}{2\pi r}, \quad [8]$$

donde *C* es una constante de integración arbitraria. En esta ecuación se evidencia que la presión radial $P_r(r)$ es función del resto de la configuración. Una de las características más relevantes de las TETG es el hecho que presenta no localidad en las propiedades de los campos asociados con las acciones de las que se derivan las ecuaciones de campo.

El concepto de no localidad se asocia con el hecho de que las propiedades de los campos escalares asociados no solo se asocian al entorno del evento estudiado, sino que se considera una propiedad global de toda la variedad en la que se encuentra embebido el espacio-tiempo (12). Formalmente, esta propiedad se manifiesta al generar los campos a partir de operadores D'Alembertianos, infinitamente derivables de la forma:

$$e^{r\circ\Delta} = 1 + r_0\Delta + r_0^2\Delta^2 + \ldots \qquad [9]$$

donde r_0 es un numero fijado por la teoría (13).

Esta propiedad del espacio-tiempo es considerada como la responsable de la inflación en las etapas tempranas del universo (14), expansión que es dominada por el campo escalar que tiende lentamente a un mínimo (este mecanismo se conoce también como slow roll) (15). Además de la expansión, se asume que los campos no-locales son responsables de la aceleración que presenta el universo en la actualidad (16). Los modelos obtenidos al considerar campos no locales, se presentan en algunos casos como modelos generales de los que es posible derivar los resultados estáticos de la Cosmología de Friedman-Robertson-Walker (FRG) (17, 18). En este capítulo se presenta un modelo cosmológico en el marco de las TETG, considerando un campo escalar Nolocal y además una ecuación de estado no local.

El modelo considerado es Einstein + Campo Escalar + Materia, en este sentido empezamos por proponer la siguiente acción,

$$S = \int d^4x\left[\frac{1}{2x^2}R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + U(\phi) + \Lambda\right] \qquad [10]$$

donde R es la traza del tensor de Ricci, ϕ es un campo escalar minimalmente acoplado a gravedad, $U(\phi)$ es el potencial de autointeracción dependiente del campo escalar, Λ es la constante cosmológica.

Las ecuaciones de campo para esta teoría resultan ser como es sabido

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} - T^{\phi}_{ab} = T^{m}_{ab}\,, \qquad [11]$$

donde T^{m}_{ab} es el tensor de energía-momentum de la materia asociada con las variables termodinámicas presión, densidad, etc, y T^{ϕ}_{ab} es el tensor de energía asociado a la configuración del campo escalar, así que puede expresarse estándarmente como

$$T^{\phi}_{ab} = \partial_a\phi\partial_b\phi - 2g_{ab}U\,. \qquad [12]$$

Además haciendo variaciones independientes en la acción [10] se consigue la ecuación de movimiento para el campo escalar de tal manera que,

$$(\Delta - m^2)\phi - \frac{d}{d\phi}U(\phi) = 0\,. \qquad [13]$$

Primeramente se considera un elemento de línea del tipo FRW

$$ds^2 = e^{\upsilon(r)}ft^2 + e^{\mu(r)}a^2(t)\left[dr^2 + d\Omega^2_{(2)}\right], \qquad [14]$$

donde $a(t)$ depende del tiempo y $\mu(r)$ y $\upsilon(r)$ de la coordenada radial respectivamente y $\Omega^2_{(2)}$ es el elemento de ángulo sólido en simetría esférica.

La componente mixta de las ecuaciones de campo da origen a la ecuación

$$\frac{\dot{a}}{a}\upsilon' = \phi'\dot{\phi}\,, \qquad [15]$$

de tal manera que suponiendo una solución para el campo escalar en términos de variables separables, se tendrá en conclusión que

$$\phi(r,t)=\sqrt{\upsilon\ln\left(\frac{1}{a^4(t)}\right)}. \qquad [16]$$

Usando la ecuación [13] en este caso para un campo escalar sin masa y con potencial constante se tendrá la siguiente condición

$$\frac{1}{s}e^{\upsilon-\mu}\left[\left(\frac{\upsilon'}{\upsilon}\right)^2-\frac{\upsilon''}{\upsilon}\right]=\frac{1}{\ln a^{-4}}\left[\frac{2\dot{a}^2}{\ln a^{-4}}-\dot{a}^2+\ddot{a}a\right] \qquad [17]$$

En esta última ecuación es fácil ver que cada uno de los miembros dependen de dos variables métricas distintas, por tanto, es claro que cada uno de los miembros puede resolverse por separado.

El lado izquierdo de la ecuación anterior se puede escribir como el producto de una función *f(r)* por la función métrica, así que conociendo la forma de la función *f(r)* es posible resolverla. Con este fin, se propone el siguiente cambio de variable:

$$\frac{\upsilon'}{\upsilon}=\frac{n}{r\ln r^n}, \quad n\in\mathcal{R} \qquad [18]$$

de la ecuación anterior se obtiene entonces que

$$\upsilon=\ln r^n. \qquad [19]$$

Por tanto, usando la expresión para el campo escalar queda determinada como

$$f(r,t)=\sqrt{4l\ln r^n\ln a^{-4}}. \qquad [20]$$

El sistema tiene una solución la cual que el factor de escala tiene una dependencia que obedece a una ley de potencia como la usual en otros sistemas análogos, mientras que para las demás se tiene

$$a=\beta t^l$$

$$\upsilon=\ln r^n$$

$$e^{\mu}=-\frac{1}{\gamma}\frac{r^{n-2}}{(\ln r)^2}. \qquad [21]$$

Ahora se puede obtener una expresión para la función densidad, así al sustituir [20], [21] y [12] en la ecuación faltante de las ecuaciones de Einstein se llega a:

$$\begin{aligned}\rho(r,t)=&\frac{(n-2)(\ln r)^2+\ln r-1}{\beta t^l}-\\&\gamma\frac{(n-2)^2-4(n-2)\ln r-4}{4\beta^2t^{2l}}-\\&2\ln r\frac{(n-2)\ln r-2}{\beta^2t^{2l}}-3\frac{l^2}{t^2}+\Lambda r^2+\\&\frac{1}{2}m^2r^n\ln(\beta t^{-4l})\ln r^n-\\&\frac{4l^2\ln r}{t^2\ln(\beta t^{-4l})},\end{aligned} \qquad [22]$$

donde l, n, γ, Λ y m son constantes.

Para concluir, se puede ahora hallar una expresión para la presión mediante la ecuación de estado nolocal [8],

$$\begin{aligned}p(r,t)=&(\delta-1)\Big[\rho(r,t)+\frac{A}{R^3}\Big(r_b^3(\ln r_b-1)-\\&r_a^3(\ln r_a-1)\Big)+B\frac{r_b^3-r_a^3}{r^3}\Big]+(\delta-1)\times\\&\Big[\frac{C}{R^s}\Big(r_b^3(\ln r_b)^2-r_a^3(\ln r_a)^2\Big)-\\&\Lambda\frac{r_b^3-r_a^3}{n-3}\Big]+(\delta-1)\Big[\frac{m^2\ln(\beta t^{-4l})}{(n+3)R^3}\times\\&(r_b^{n+3}\ln r_b^n-r_a^{n+3}\ln r_a^n)+\\&\frac{nm^2\ln(\beta t^{-4l})}{(n+3)^2R^3}(r_b^{n+3}-r_a^{n+3})\Big],\end{aligned} \qquad [23]$$

donde $r_a \leq R \leq r_b$, $\rho(r, t)$ es la densidad calculada en [22] y los coeficientes A, B y C se definen como:

$$A := \frac{4(n-2)}{9\beta t^{2l}} - \frac{2}{3\beta t^{2l}} - \frac{2\gamma(n-2)}{3\beta t^{2l}} - \frac{2(n-2)}{9\beta^2 t^{2l}} - \frac{8}{3\beta^2 t^{2l}} + \frac{8l^2}{3t^2 \ln \beta t^{-4l}},$$

$$B := \frac{2}{3\beta t^{l}} + \frac{\gamma(n-2)^2}{6\beta^2 t^{2l}} + \frac{2l^2}{t^2},$$

$$C := \frac{4(n-2)}{3\beta^2 t^{2l}} - \frac{2(n-2)}{3\beta t^{2l}}. \qquad [24]$$

Todas estas expresiones [20], [21], [22] y [23], determinan el conjunto completo de variables gravitacionales y termodinámicas macroscópicas, que han sido resueltas exactamente, salvo constantes numéricas de integración que en principio toman valores arbitrarios numéricos. En la sección siguiente vamos a dar una interpretación de las mismas, analizando cada una y graficando algunos casos para una mayor comprensión.

3. Discusión y conclusiones

A continuación se discuten los resultados que se presentaron en la sección anterior de este trabajo donde se consideró una ecuación de estado no local para resolver un sistema de gravedad acoplado a campos escalares minimalmente.

Primeramente, se obtuvo la forma de la función potencial escalar [20] en términos de los coeficientes métricos. En el marco de las TETG, el potencial escalar está relacionado con la fuerza de la gravedad o presumiblemente con la fuente propia de gravitación, de modo que de la dinámica mostrada en la Figura 1, se observa una disminución del potencial con el tiempo (Figura 2), esto puede explicarse de la siguiente manera; a medida que transcurre el tiempo el valor de

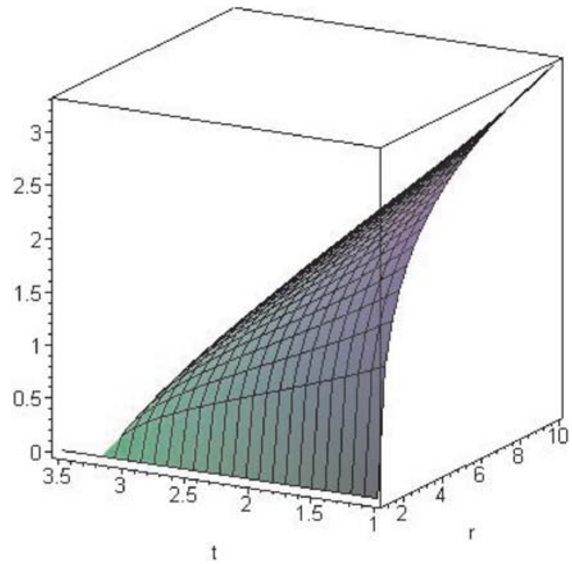

Figura 1. Dinámica radial y temporal de la función potencial escalar en el modelo de cosmología con ecuación de estado no local.

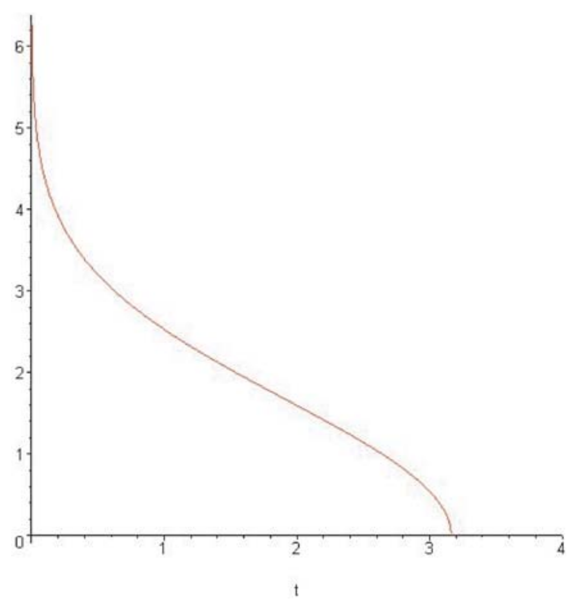

Figura 2. Evolución temporal para el campo escalar. Corte para r = constante.

la fuerza gravitatoria cede en importancia en favor de otras fuerzas que pudieran estar asociadas con la materia y/o energía oscura, actualmente se ha reconocido que este tipo de materia es responsable de la aceleración que actualmente presenta el Universo.

Por otro lado, del comportamiento radial del Potencial (Figura 3) se desprende

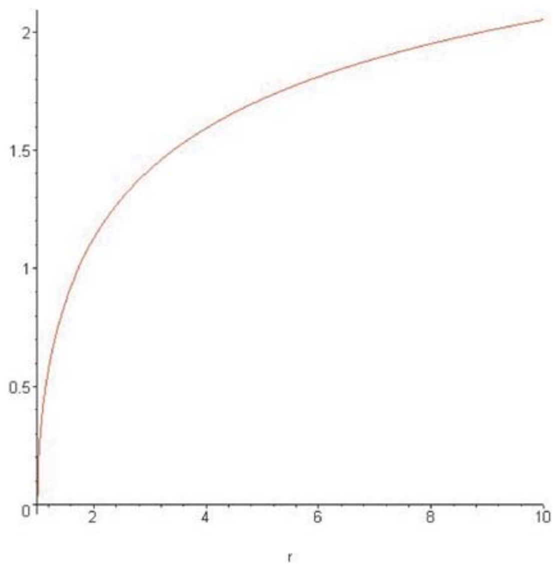

Figura 3. Dinámica radial para el campo escalar. Corte para t = constante.

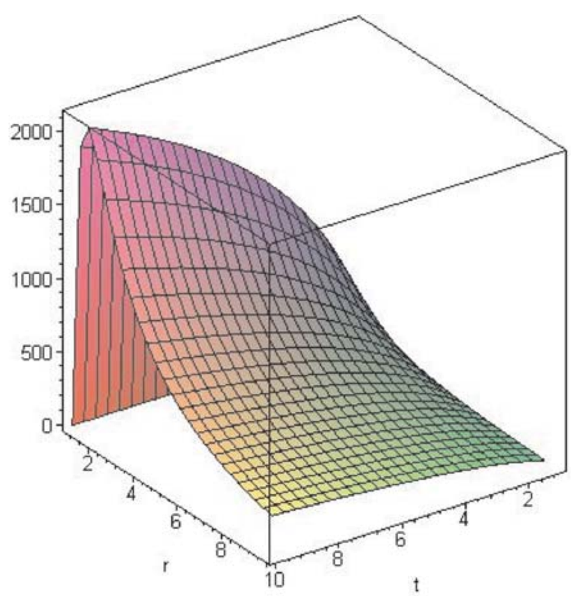

Figura 4. Dinámica radial y temporal de la función densidad en el modelo de cosmología con ecuación de estado no local.

que debido a la mayor cantidad de masa encerrada en un radio mayor, el potencial asociado aumenta en la misma proporción. Sin embargo al combinar el comportamiento radial y la evolución dinámica del Potencial se hace evidente de las observaciones que el efecto asociado a esta función está de acuerdo con un universo en expansión.

Al analizar la función densidad (Figura 4), se observa que la misma evoluciona con el tiempo tal y como lo hace la densidad en un espacio de FRW (Figura 5), además la densidad es isotrópica y asintóticamente tiende a ser constante para $r \to \infty$ (Figura 6), asimismo, como era de esperarse se puede apreciar que esta función presenta una singularidad en el origen.

Análogamente de la función Presión se puede observar que el comportamiento esta de acuerdo con los modelos FRW (Figuras 7 -9) cuando se considera una ecuación de estado parámetro ω, pero a diferencia de estos modelos, se ha utilizado una Ecuación de Estado Nolocal, esta describe de modo más realista las contribuciones de los compo-

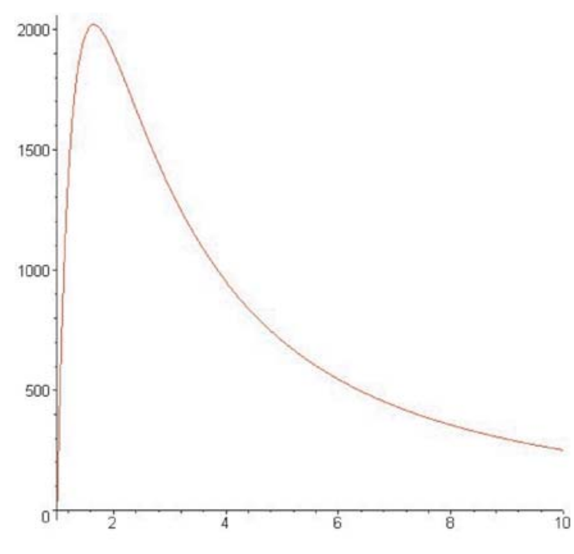

Figura 5. Evolución temporal para la densidad. Corte para r = constante.

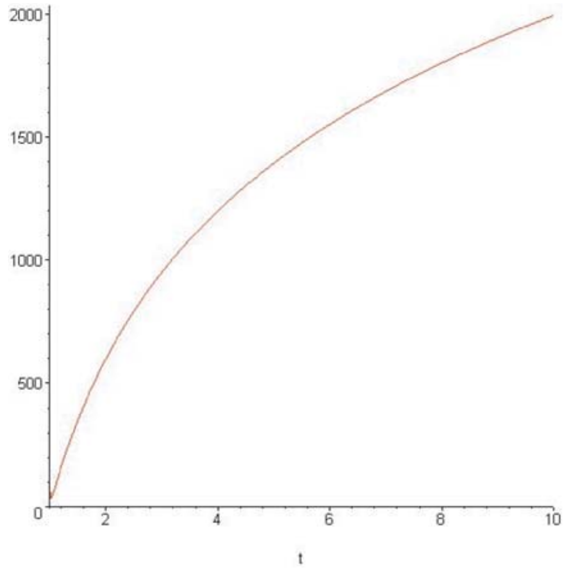

Figura 6. Dinámica radial para la densidad. Corte para t = constante.

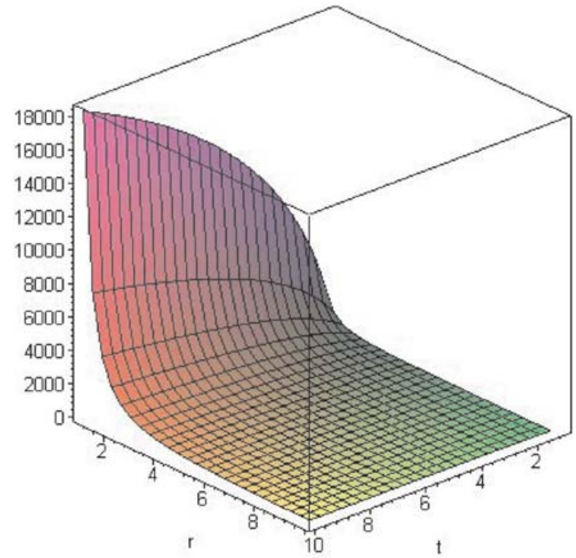

Figura 7. Dinámica radial y temporal de la función presión en el modelo de cosmología con ecuación de estado no local.

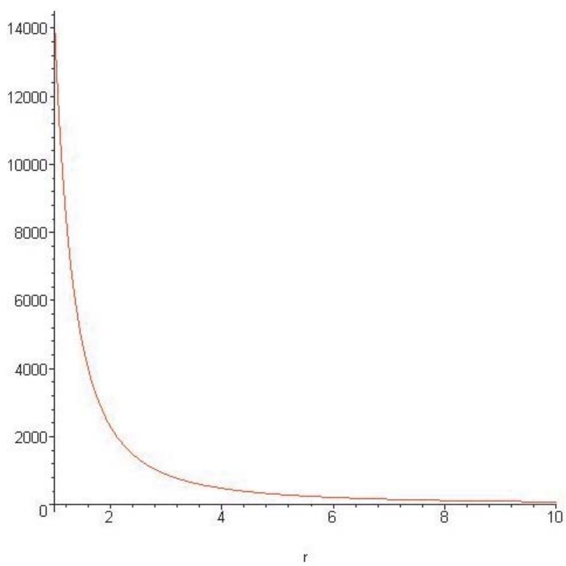

Figura 8. Evolución temporal para la presión. Corte para r = constante.

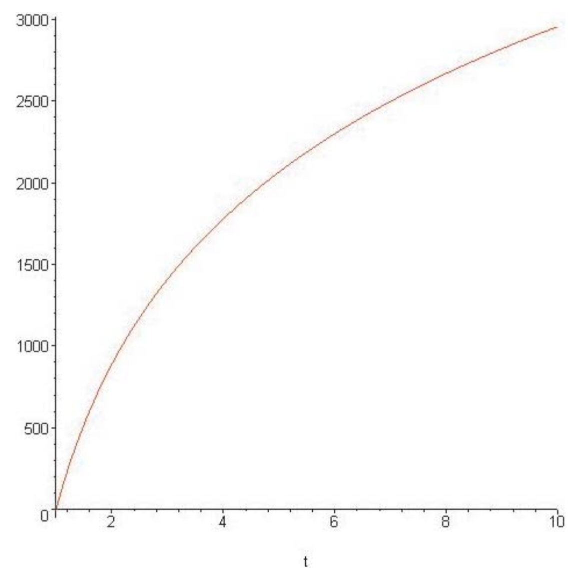

Figura 9. Dinámica radial para la presión. Corte para t = constante.

nentes asociados con la distribución de materia.

Finalmente, se ha mostrado un método para generar modelos de universo considerando una ecuación de estado alternativa a la usual así como una teoría de la gravedad alterna, y al resolver las ecuaciones se obtienen modelos que claramente reproducen los resultados clásicos mostrados en la literatura y que fueron obtenidos por otros métodos, esto es una indicio claro de la validez de esta aproximación.

Agradecimientos

DSP agradece al Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Técnico (CONDES) por subvencionar esta investigación bajo el proyecto número CC-0844-08. Gracias también a TS y AR por las discusiones y orientaciones en el desarrollo de esta investigación.

Referencias bibliográficas

1. JORDAN P.Z. ***Phys*** 157: 112-121. 1959.
2. BRANS C., DICKE R.H. ***Phys Rev*** 124: 925-935. 1961.
3. GREEN M.B., SCHWARZ J.H., WITTEN E. ***Superstring Theory.*** Vol. 1: Introduction, Cambridge, Uk: Univ. Pr. 469. 1987. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics).
4. FUJII Y., MAEDA K. ***The scalar-tensor theory of gravitation.*** Cambridge (USA). Univ. Pr. 240. 2003.
5. TRODDEN M., CARROLL S.M. TASI lectures: Introduction to cosmology. ***ArXiv:astro-ph/0401547***, 1-82. 2004.
6. WEIMBERG S. ***Gravitation and Cosmology.*** Jhon Willey & Sons. N.Y. (U.S.A.). 470-480. 1872.
7. HERNANDEZ H., NUNEZ L.A. Static anisotropic solutions to Einstein equations with a nonlocal equation of state. ***ArXiv:gr-qc/0012019.*** 1-12. 2000.
8. NARASIMHAN M.N.L. ***Principles of Continuum Mechanics.*** Jhon Willey & Sons. N.Y. (U.S.A.). 300-350. 1993.
9. FUJII Y. Brans-Dicke cosmology corrected for a quantum effect due to the scalar-matter coupling. ***ArXiv:gr-qc/9609044.*** 1-13. 1996.
10. HERNANDEZ H., NUNEZ L.A. ***Can J Phys*** 82: 29-51. 2004.
11. HERNANDEZ H., NUNEZ L.A., PERCOCO U. ***Class Quant Grav*** 16: 871-896. 1999.
12. WETTERICH C. ***Gen Rel Grav*** 30: 159-172. 1998.
13. CALCAGNI G., MONTOBBIO M., NARDELLI G. ***Phys Rev* D**76: 126001. 2007.
14. TSAMIS N.C., WOODARD R.P. ***Annals Phys*** 267: 145-192. 1998.
15. CALCAGNI G. ***Phys Rev* D**69: 103508. 2004.
16. DESER S., WOODARD R.P. ***Phys Rev Lett*** 99: 111301. 2007.
17. HAMBER H.W., WILLIAMS R.M. ***Phys Rev* D**72: 044026. 2005.
18. SOUSSA M.E., WOODARD R.P. ***Class Quant Grav*** 20: 2737-2752. 2003.
19. CLIFTON T., MOTA D.F., BARROW, J.D. ***Mon Not Roy Astron Soc*** 358: 601-613. 2005.